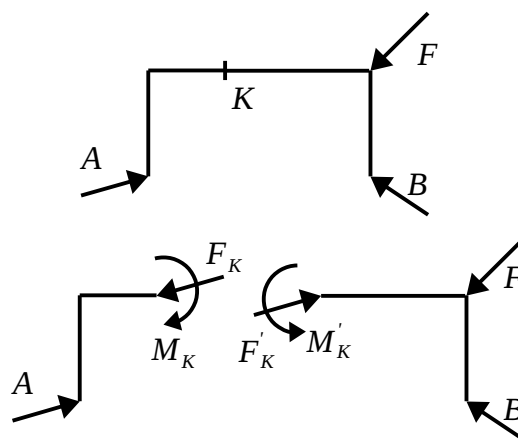


Igénybevételek

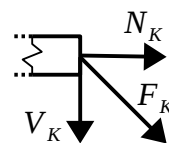
A továbbiakban egyensúlyban levő *rúdszerkezetek* belső erőivel, igénybevételeivel foglalkozunk. Ennek során *rúd*nak (esetleg *oszlop*nak vagy *gerendának*) azokat a karcsú szerkezeti részeket nevezzük, amelyek egyik irányú kiterjedése lényegesen nagyobb a többinél, ezt az irányt nevezzük hossziránynak. Egy, a hosszirányra merőleges síkkal a rúdból kimetszett síkidomot a rúd *keresztmetszetének* nevezzük. A rúd (esetleg görbe) *tengelyének* azt a vonalat nevezzük, mely a keresztmetszetek súlypontján megy keresztül. A keresztmetszetre a tengelyen elhelyezkedő pontja segítségével hivatkozunk. A továbbiakban használt rúdfogalmunk tehát általánosabb a rácsos tartóknál használatnál, így a kapcsolatokat nem korlátozzuk a csuklós kapcsolatra, és a terhek is tetszőleges megoszló, vagy koncentrált terhek lehetnek. Rúdszerkezet alatt az ilyen rudakból összeépített szerkezetet értjük.

Az összetett tartóknál már kimondott elv szerint ha a szerkezet egyensúlyban van, akkor bármely része is egyensúlyban van. A tartórész egyensúlyának vizsgálatához a rá ható külső erőkön kívül az elkülönítéshez szükséges átvágás helyén ébredő belső (reakció-)erőket kell figyelembe vennünk.

Vágjuk el a tartót egy keresztmetszetében! Az egyensúly miatt a vágás mindkét oldalán levő részeknek külön-külön egyensúlyban kell lenniük. Tetszőleges terhelés esetén ez csak úgy lehetséges, hogy az elvágott keresztmetszetenél egy merev befogásnak megfelelő belső reakció-pár keletkezik, azaz a vágás mindkét oldalán egy tetszőleges nagyságú és irányú erő (amely az egyértelműség kedvéért menjen át a keresztmetszet súlypontján) és egy befogási nyomaték. (A hatás-ellenhatás alapján a két oldalra ható erők, illetve nyomatékok egymásnak ellentettjei.) A gyakorlatban a belső reakció erő- és nyomatékvektorát nem az eddig szokásos *xyz*-koordináta-rendszerben bontjuk komponensekre, hanem a hatásuk alapján az alábbiak szerint.



Az erővektornak a tartótengellyel párhuzamos komponensét *normálerő*nek hívjuk és *N*-nel jelöljük (az elnevezés arra utal, hogy a keresztmetszet síkjára merőleges erő a sík normálisával párhuzamos). Az erővektornak a keresztmetszet síkjába eső komponensét *nyíróerő*nek nevezzük és *V*-vel jelöljük (az irodalomban előfordul még *T* és *Q* jelölés is). Térbeli feladatok esetén a nyíróerőt a keresztmetszet síkjában további két komponensre lehet bontani, célszerűen a keresztmetszethez rendelt lokális koordináta-rendszer tengelyeinek irányába eső komponensekre. Síkbeli feladat esetén a síkra merőleges nyíróerő-komponens mindig 0.



A nyomatékvektornak a tartótengely adott pontbeli érintőjével párhuzamos komponensét *csavarónyomaték*nak hívjuk és *T*-vel jelöljük (előfordul az *M_{cs}* jelölés is). A csavarónyomaték síkbeli feladatoknál 0. A nyomatékvektornak a keresztmetszet síkjába eső komponenseit *hajlítónyomaték*nak nevezzük és *M_H*-val jelöljük. Térbeli feladatok esetén a hajlítónyomatékot a keresztmetszet síkjában további két komponensre lehet bontani, célszerűen itt is a keresztmetszethez rendelt lokális koordináta-rendszer szerinti komponensekre. Síkbeli feladat esetén mindig 0 a tartó síkjába eső hajlítónyomaték-komponens értéke.

Összegezve: síkbeli feladatoknál egy normál- és egy nyíróerő, valamint egy hajlítónyomaték lesz a keresztmetszet igénybevétele.

Igénybevételek előjele

Annak érdekében, hogy az igénybevételként megadott belső erők iránya alatt mindenki ugyanazt értse, az alábbi előjelszabályokat rögzítjük.

A *normálerő* akkor pozitív, ha a keresztmetszetből kifelé mutat, azaz húzza a keresztmetszetet. A keresztmetszetet nyomó normálerő negatív előjelű, befelé mutat. (Ez a definíció rudaknál korábban már megállapított rúderő-előjel definíciójához hasonló.)

A *csavarónyomaték* akkor pozitív, ha a vektora kifelé mutat a keresztmetszetből, azaz az elvágott keresztmetszetre kívülről ránézve a pozitív csavarónyomaték az óramutató járásával ellenkező irányba forgat.

Térbeli feladatoknál a nyíróerők és a hajlítónyomatékok előjelének definíciója további megfontolásokat igényelne, ezért itt csak a síkbeli feladatokra adunk egy egyértelmű változatot.

A pozitív nyíróerő irányát úgy kapjuk meg, hogy az adott keresztmetszetben a pozitív normálerő irányát az óramutató járásával megegyező irányban 90° -kal elforgatjuk.

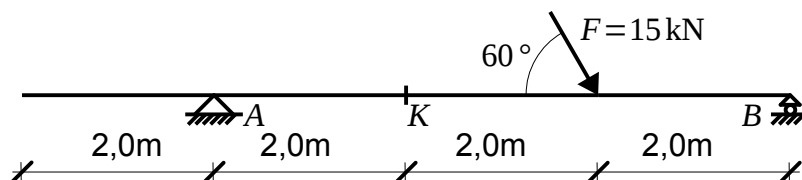
A hajlítónyomaték előjelének eldöntéséhez ki kell jelölnünk a tartótengely egyik oldalát pozitív, másik oldalát negatív oldallá. A hajlítónyomaték félköríves nyílát kívülről rárajzolva a keresztmetszetre pozitívnak nevezzük azt a hajlítónyomatékot, melynek a pozitív oldalról indítjuk a nyílát. A gyakorlatban a vízszintes, vagy közel vízszintes szakaszokon az alsó oldalt választjuk pozitívnak.

Igénybevételek számítása

Természetesen akár a definíció alapján is számíthatóak az igénybevételek:

Mintapélda – 1

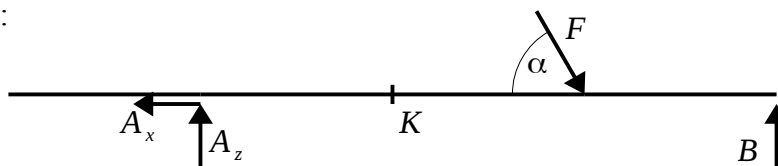
Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit



Megoldás

Első lépés a reakciók kiszámítása.

Elkülönítés:



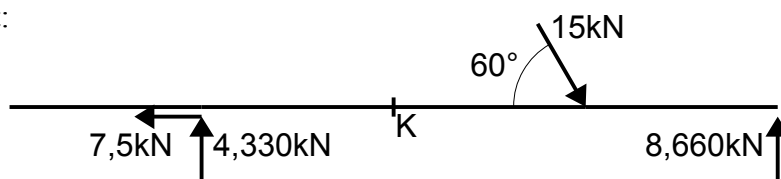
$$\sum M_i^{(A)}: -15 \sin 60^\circ \cdot 4 + B \cdot 6 = 0 \rightarrow B = 8,660 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: 15 \sin 60^\circ \cdot 2 - A_z \cdot 6 = 0 \rightarrow A_z = 4,330 \text{ kN} (\uparrow)$$

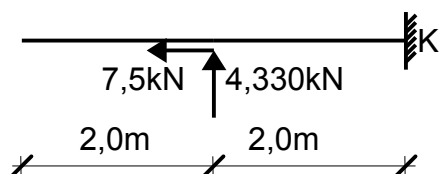
$$\sum F_{ix}: 15 \cos 60^\circ - A_x = 0 \rightarrow A_x = 7,5 \text{ kN} (\leftarrow)$$

Ellenőrzés: $\sum F_{iz} = 15 \cdot \sin 60^\circ - 4,330 - 8,660 = 0,0004 \approx 0$

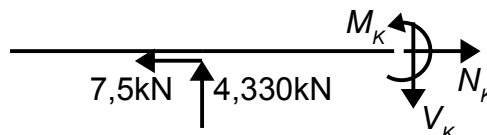
Eredményvázlat:



Igénybevételek számítása a K-tól balra levő tartórész egyensúlya alapján:



Elkülönítés:

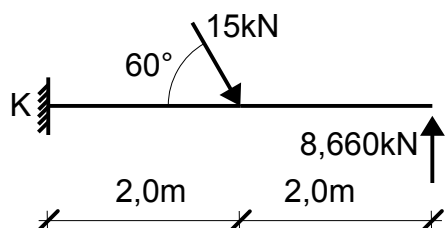


$$\sum F_{ix} : -7,5 + N = 0 \rightarrow N = +7,5 \text{ kN}$$

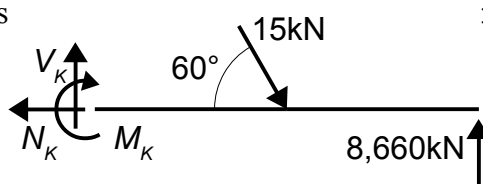
$$\sum F_{iz} : -4,330 + V = 0 \rightarrow V = +4,330 \text{ kN}$$

$$\sum M_i^{(K)} : -4,330 \cdot 2 + M = 0 \rightarrow M = +8,660 \text{ kNm}$$

Igénybevételek számítása a K-tól jobbra levő tartórész egyensúlya alapján:



Elkülönítés



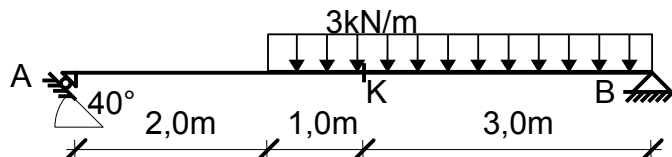
$$\sum F_{ix} : -N + 15 \cos 60^\circ = 0 \rightarrow N = +7,5 \text{ kN}$$

$$\sum F_{iz} : -V + 15 \sin 60^\circ - 8,660 = 0 \rightarrow V = +4,330 \text{ kN}$$

$$\sum M_i^{(K)} : -M - 15 \sin 60^\circ \cdot 2 + 8,660 \cdot 4 = 0 \rightarrow M = +8,659 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa – 1

Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit!



Megoldás

Egyensúlyi egyenletek alapján a reakciók:

$$\sum :$$

$$\rightarrow A =$$

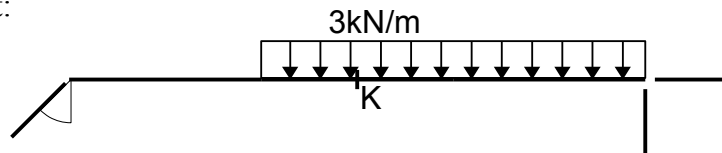
$$\sum :$$

$$\rightarrow B_z =$$

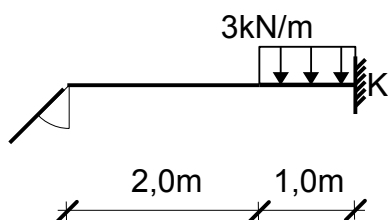
$$\sum : \quad \rightarrow B_x =$$

Ellenőrzés: $\sum :$

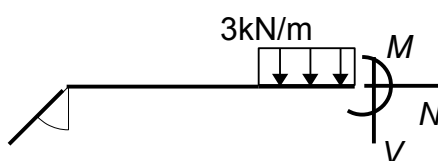
Eredményvázlat:



Igénybevételek számítása a bal oldali tartórész egyensúlyából:



Elkülönítés:



$$\sum :$$

$$\rightarrow N =$$

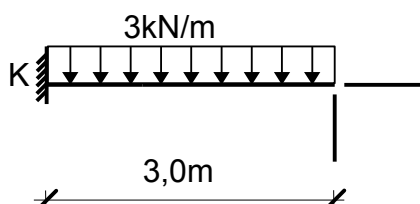
$$\sum :$$

$$\rightarrow V =$$

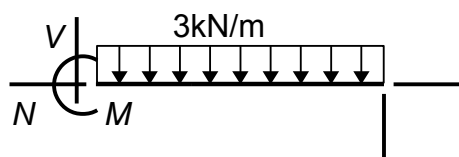
$$\sum :$$

$$\rightarrow M =$$

Igénybevételek számítása a jobb oldali tartórész egyensúlyából:



Elkülönítés:



$$\sum :$$

$$\rightarrow N =$$

$$\sum :$$

$$\rightarrow V =$$

$$\sum :$$

$$\rightarrow M =$$

A fenti példában látható, hogy mindig legalább kétféleképpen számítható egy keresztmetszet bármelyik igénybevétele, és mindegyik számítási módnak azonos eredményt kell szolgáltatnia. Eltérés csak a kerekítések halmozódása miatt lehet, annak nagyságrendjében. A nagyobb eltérés számítási hibára utalhat. A gyakorlatban természetesen elég lesz az egyik módon számolni.

Igénybevételek számítása pontra redukálással

Tegyük fel, hogy egy K keresztmetszet igénybevételeit akarjuk kiszámítani. A keresztmetszet átvágásától egyik, illetve másik irányban levő tartórészre ható külső erők eredőit jelöljük rendre R_1

-gyel és R_2 -vel. Mivel az egész tartó egyensúlyban van, így a két erő egyensúlyban van:

$$(R_1, R_2) \doteq 0.$$

Az egyik, illetve másik oldal egyensúlyát biztosító igénybevételeket jelöljük az I_1 -gyel és I_2 -vel. Az egyensúly miatt:

$$(R_1, I_1) \doteq 0 \text{ és } (R_2, I_2) \doteq 0.$$

A három egyensúlyi kijelentés alapján megállapítható, hogy

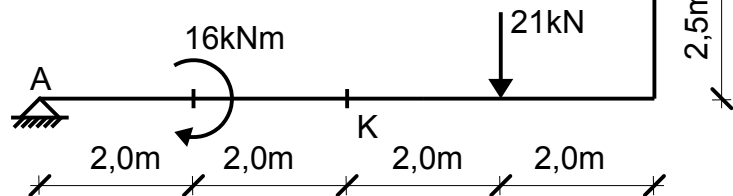
$$I_1 \doteq R_2 \text{ (és } I_2 \doteq R_1),$$

azaz az egyik (másik) oldalra ható igénybevételek a másik (egyik) tartórészre ható külső erőkkel (azok eredőjével) egyenértékű. Amennyiben az I_1 (vagy I_2) igénybevételeket a keresztmetszetben működő erőkomponensekkel és az ehhez tartozó nyomatékkkal fejezzük ki, úgy (az előjelszabály betartásával) egy pontra redukálást kell végrehajtanunk a második (vagy első) részre ható összes külső erőből.

E módszer előnye, hogy a pontra redukálás három egyenletének felírásakor az egyik oldalon csak valamelyik igénybevételi komponens szerepel. Ha az egyenlet felírásakor a pozitív irányt ennek az igénybevételnek az irányába vesszük fel, akkor az egyenlet másik oldalán levő kifejezést kiszámolva nincs szükség az egyenlet átrendezésére a megoldáshoz (azaz kevesebb hibalehetőséget hagyunk magunknak).

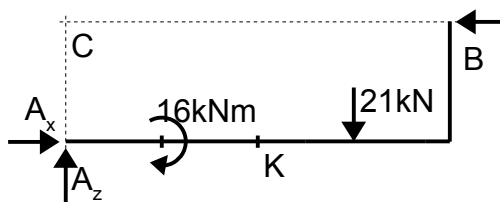
Mintapélda – 2

Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit



Megoldás

Elkülönítés:



$$\sum M_i^{(A)}: -16 - 21 \cdot 6 + B \cdot 2,5 = 0 \rightarrow B = +56,8 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum M_i^{(C)}: -16 - 21 \cdot 6 + A_x \cdot 2,5 = 0 \rightarrow A_x = +56,8 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\sum F_{iz}: -A_z + 21 = 0 \rightarrow A_z = +21 \text{ kN} (\uparrow)$$

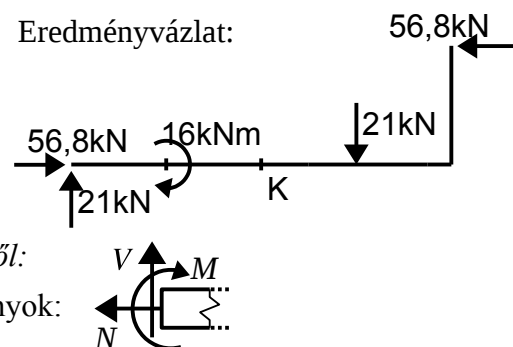
$$\text{Ell.: } \sum F_{ix}: 56,8 - 56,8 = 0$$

Ígybevételek a K-tól balra levő tartórészre ható erők:

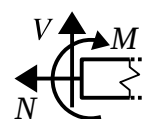
Itt: A_x, A_z, M -ből.

$$\sum F_{i\leftarrow}: N = -56,8 \text{ kN}$$

Eredményvázlat:



A pozitív irányok:



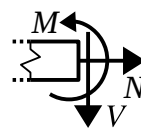
$$\sum F_{i\uparrow}: V = +21 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i\curvearrowright}^{(K)}: M = +21 \cdot 4 + 16 = +100 \text{ kNm}$$

Igénybevételek a K-tól jobbra levő tartórészre ható erőkkel:

Itt: F, B -ből.

A pozitív irányok:



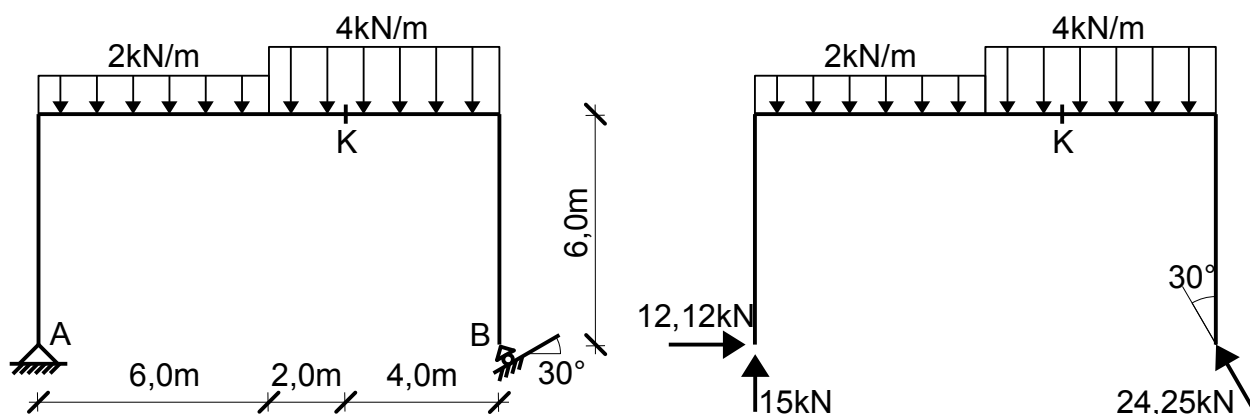
$$\sum F_{i\rightarrow}: N = -56,8 \text{ kN}$$

$$\sum F_{i\downarrow}: V = +21 \text{ kN}$$

$$\sum M_{i\curvearrowright}^{(K)}: M = -21 \cdot 2 + 56,8 \cdot 2,5 = +100 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa – 2

Számítsuk ki az alábbi tartó reakcióerőinek ismeretében a K keresztmetszet igénybevételeit!

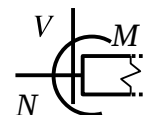


Megoldás

Igénybevételek számítása balról:

Figyelembe veendő erők:

Pozitív irányok:



$$N =$$

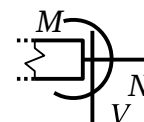
$$V =$$

$$M =$$

Igénybevételek számítása jobbról:

Figyelembe veendő erők:

Pozitív irányok:



$$N =$$

$$V =$$

$$M =$$

Ha eddig nem vettük észre, most mindenképpen feltűnhetett, hogy az igénybevételek számításánál

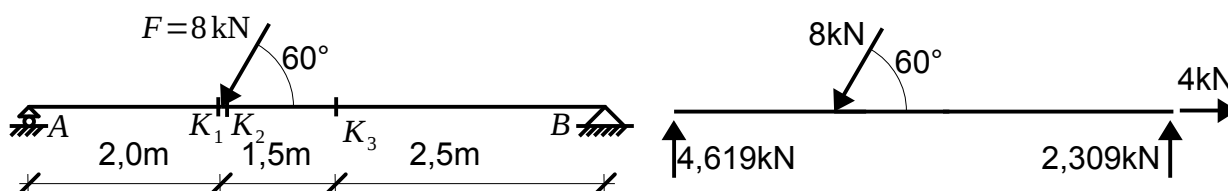
nincs jelentősége annak, hogy egyes erők terhek, vagy reakcióerők voltak-e. A számítás mindig a keresztmetszettől jobbra, vagy balra levő tartórészre ható összes külső erő alapján történt.

Igénybevételek számítása egy másik keresztmetszet igénybevételeiből

Ha a tartót elvágjuk egy keresztmetszetben és ott működtetjük az igénybevételnek megfelelő erőket és nyomatékokat, akkor a kapott két tartórész külön-külön egyensúlyban lesz. Az egyensúlyban levő tartó bármely részének a keresztmetszetének igénybevételeit csak a részre ható erők befolyásolják, így azt az alapján is számíthatjuk.

Mintapélda – 3

Számítsuk ki az F erő támadáspontjától végtelen kis távolságban balra levő K_1 keresztmetszet igénybevételeit, majd azt felhasználva az F erő támadáspontjától végtelen kis távolságra jobbra levő K_2 és a jelölt K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!



Megoldás

K_1 igénybevételei (célszerűen balról):

$$N_1 = 0 \text{ kN}, \quad V_1 = +4,619 \text{ kN}, \quad M_1 = +4,619 \cdot 2 = +9,238 \text{ kNm}$$

Ezek berajzolhatók a jobb oldali tartórészre ható igénybevételekként (most a számítás során kapott irányokkal megegyezően, de általában az előjelek alapján az igénybevételek pozitív definíciójának megfelelően határozhatjuk meg az irányokat).

K_2 igénybevételei (balról)

(figyelembe veendő: K_1 igénybevételei és az F erő)

$$N_2 = 0 + 8 \cos 60^\circ = +4 \text{ kN}$$

$$V_2 = +4,619 - 8 \sin 60^\circ = -2,309 \text{ kN}$$

$$M_2 = 9,238 + 4,619 \cdot 0 - 8 \sin 60^\circ \cdot 0 = +9,238 \text{ kNm}$$

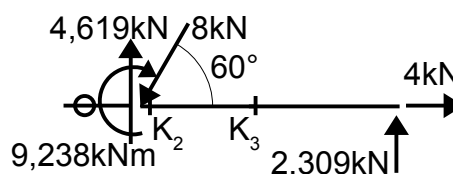
K_3 igénybevételei (balról)

(figyelembe veendő: K_1 igénybevételei és az F erő)

$$N_3 = 0 + 8 \cos 60^\circ = +4 \text{ kN}$$

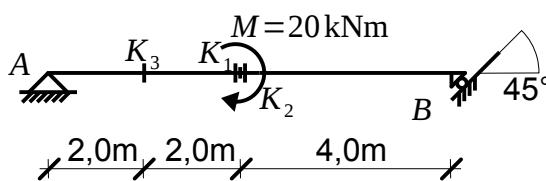
$$V_3 = +4,619 - 8 \sin 60^\circ = -2,309 \text{ kN}$$

$$M_3 = 9,238 + 4,619 \cdot 1,5 - 8 \sin 60^\circ \cdot 1,5 = +5,774 \text{ kNm}$$



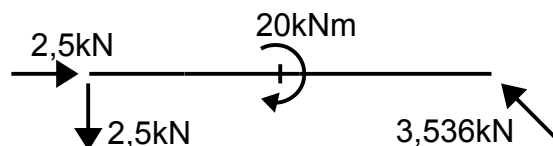
Gyakorló példa – 3

Számítsuk ki az M nyomaték támadáspontjától végtelen kis távolságban balra levő K_1 keresztmetszet igénybevételeit, majd azt felhasználva az M nyomaték támadáspontjától végtelen kis távolságra jobbra levő K_2 és a jelölt K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!



Megoldás

A reakciók (a részleteket most mellőzzük):

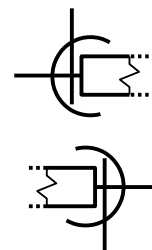


K_1 igénybevételei (tetszőleges irányból):

$$N_1 =$$

$$V_1 =$$

$$M_1 =$$



Rajzoljuk fel a keresztmetszet-csonkokra az előjelek alapján a tényleges igénybevétel-irányokat!

K_2 igénybevételei (mivel K_1 igénybevételeit fel kell használnunk, ezért balról):

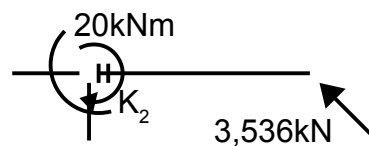
Rajzoljuk be a K_1 keresztmetszet igénybevételeinek valós irányát!

Mit kell figyelembe venni?

$$N_2 =$$

$$V_2 =$$

$$M_2 =$$



K_3 igénybevételei (mivel K_1 igénybevételeit fel kell használni, így jobbról):

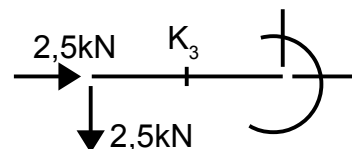
Rajzoljuk be a K_1 keresztmetszet igénybevételeinek valós irányát!

Mit kell figyelembe venni?

$$N_3 =$$

$$V_3 =$$

$$M_3 =$$



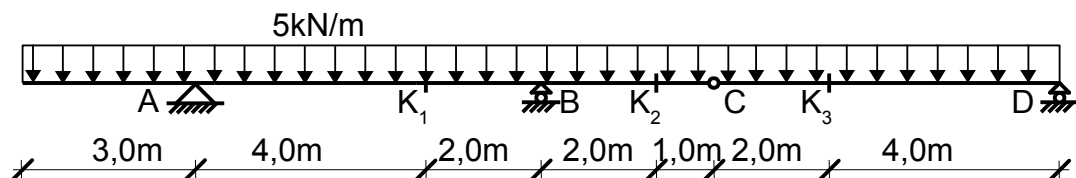
Tanulságok: koncentrált erő támadáspontjának a két oldalán az erő vetületének megfelelő nagyságú ugrás van a normál-, illetve nyíróerő értékében, míg koncentrált nyomaték támadáspontjának két oldalán a nyomaték értékének megfelelő nagyságú ugrás van a hajlítónyomaték értékében, a többi igénybevétel azonban nem változik.

Összetett tartó keresztmetszetének igénybevételei

Összetett szerkezet esetén az igénybevételek számításához még több lehetőségünk van, mint egyszerű tartók esetén volt. Ennek oka, hogy az egész szerkezet egyensúlya mellett annak bármely része is egyensúlyban kell, hogy legyen, ezért bármely, a keresztmetszetet tartalmazó szerkezeti résszel is számolhatunk, ha a rá ható belső reakciókat is figyelembe vesszük. Ezen felül minden ilyen rész, vagy az egész szerkezet használata esetén számolhatunk "jobbról", vagy "balról", azaz legalább négy módon tudjuk bármely keresztmetszet igénybevételeit számítani. A gyakorlatban viszont továbbra is igaz, hogy elég egyetlen módon számolni, ezért később az első lépés később mindig az lesz, hogy erre a lehető legegyszerűbb módszert találjuk meg.

Mintapélda – 4

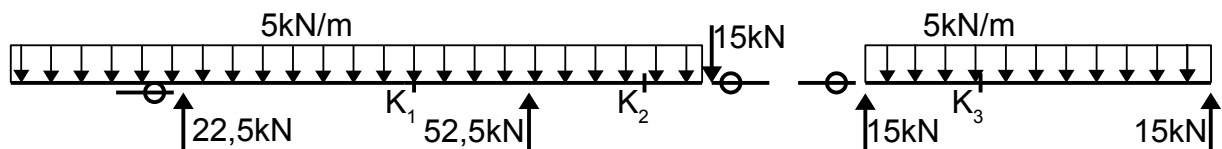
Számítsuk ki a K_1 , K_2 , K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!



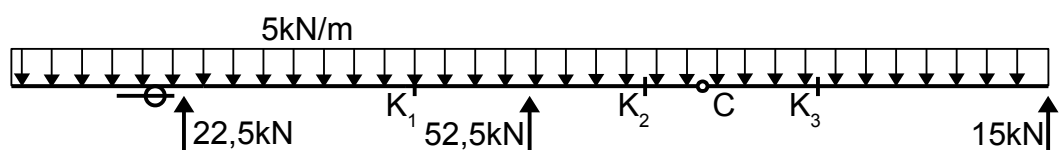
Megoldás

Ez a tartó egy Gerber-tartó. Az erőjellegű mennyiségek számításának menete: először a befüggesztett rész, utána a fix rész. Ezt figyelembe véve a reakciók számításának eredményvázlatai:

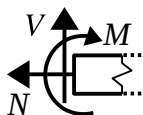
A két elkülönített tartórészre:



Az egész szerkezetre:



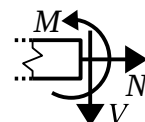
A tartó tengelye vízszintes, ezért minden normálerő vízszintes, ugyanakkor az összes külső erő függőleges, ezért a normálerők számítására szolgáló képletekbe mindig zérus vetületek kerülnének, így: $N_1 = N_2 = N_3 = 0$. A továbbiakban csak a nyíróerőkkel és hajlítónyomatékokkal foglalkozunk.



K_1 km. elkülönített rész balról:

$$V_1 = 22,5 - 5 \cdot 7 = -12,5 \text{ kN}$$

$$M_1 = 22,5 \cdot 4 - (5 \cdot 7) \cdot 3,5 = -32,5 \text{ kNm}$$



K_1 km. elkülönített rész jobbról:

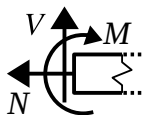
$$V_1 = 15 + 5 \cdot 5 - 52,5 = -12,5 \text{ kN}$$

$$M_1 = -15 \cdot 5 - (5 \cdot 5) \cdot 2,5 + 52,5 \cdot 2 = -32,5 \text{ kNm}$$

K_1 km. teljes tartó balról:

$$V_1 = 22,5 - 5 \cdot 7 = -12,5 \text{ kN}$$

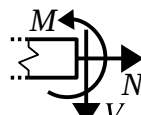
$$M_1 = 22,5 \cdot 4 - (5 \cdot 7) \cdot 3,5 = -32,5 \text{ kNm}$$



K_1 km. teljes tartó jobbról:

$$V_1 = -15 + 5 \cdot 11 - 52,5 = -12,5 \text{ kNm}$$

$$M_1 = 15 \cdot 11 - (5 \cdot 11) \cdot 5,5 + 52,5 \cdot 2 = -32,5 \text{ kNm}$$



K_2 km. elkülönített rész balról:

$$V_2 = 22,5 - 5 \cdot 11 + 52,5 = +20 \text{ kN}$$

$$M_2 = 22,5 \cdot 8 - (5 \cdot 11) \cdot 5,5 + 52,5 \cdot 2 = -17,5 \text{ kNm}$$

K_2 km. elkülönített rész jobbról:

$$V_2 = 15 + 5 \cdot 1 = +20,0 \text{ kN}$$

$$M_2 = -15 \cdot 1 - (5 \cdot 1) \cdot 0,5 = -17,5 \text{ kNm}$$

K_2 km. teljes tartó balról:

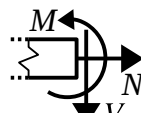
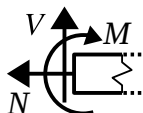
$$V_1 = 22,5 - 5 \cdot 11 + 52,5 = +20 \text{ kN}$$

$$M_1 = 22,5 \cdot 8 - (5 \cdot 11) \cdot 5,5 + 52,5 \cdot 2 = -17,5 \text{ kNm}$$

K_2 km. teljes tartó jobbról:

$$V_2 = -15 + 5 \cdot 7 = +20 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 15 \cdot 7 - (5 \cdot 7) \cdot 3,5 = -17,5 \text{ kNm}$$



K_3 km. elkülönített rész balról:

$$V_3 = 15 - 5 \cdot 2 = +5 \text{ kN}$$

$$M_3 = +15 \cdot 2 - (5 \cdot 2) \cdot 1 = +20 \text{ kNm}$$

K_3 km. elkülönített rész jobbról:

$$V_3 = -15 + 5 \cdot 4 = +5 \text{ kN}$$

$$M_3 = +15 \cdot 4 - (5 \cdot 4) \cdot 2 = +20 \text{ kNm}$$

K_3 km. teljes tartó balról:

$$V_3 = 22,5 - 5 \cdot 14 + 52,5 = +5 \text{ kN}$$

$$M_3 = +22,5 \cdot 11 - (5 \cdot 14) \cdot 7 + 52,5 \cdot 5 = +20 \text{ kNm}$$

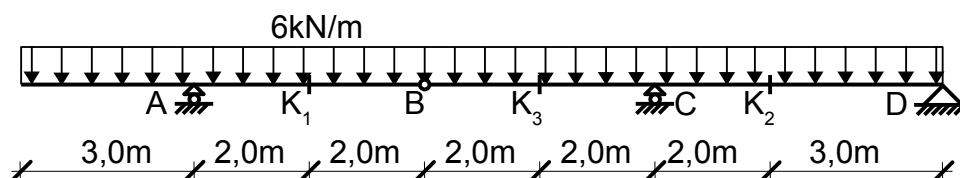
K_3 km. teljes tartó jobbról:

$$V_3 = -15 + 5 \cdot 4 = +5 \text{ kN}$$

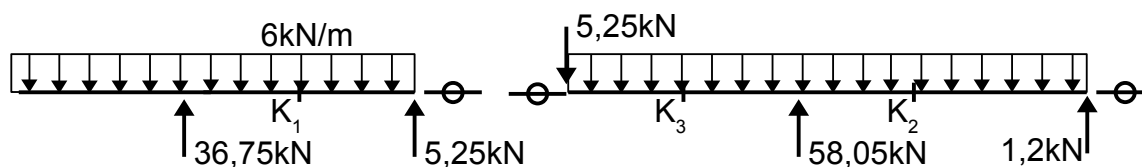
$$M_3 = +15 \cdot 4 - (5 \cdot 4) \cdot 2 = +20 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa – 4

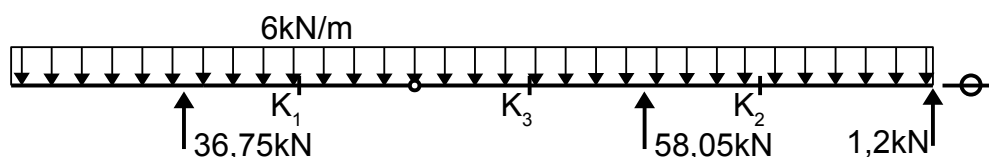
Számítsuk ki a K_1 , K_2 , K_3 keresztmetszetek igénybevételeit a reakciók ismeretében!



Eredményvázlatok testenként:



Az egész szerkezetre ható összes külső erő:



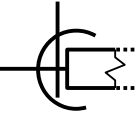
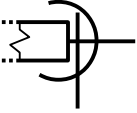
Megoldás

Normálerők számítása

Vízszintes tengelyű tartón milyen irányú erőkől származik normálerő?

Ez alapján: $N_1 =$ $N_2 =$ $N_3 =$

A nyíróerők és a hajlítónyomatékok számítása

Potitív előjelek balról történő számításnál: , jobbról történő számításnál: 

K_1 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_1 =$
 $M_1 =$

jobbról: $V_1 =$
 $M_1 =$

K_1 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_1 =$
 $M_1 =$

jobbról: $V_1 =$
 $M_1 =$

K_2 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_2 =$
 $M_2 =$

jobbról: $V_2 =$
 $M_2 =$

K_2 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_2 =$
 $M_2 =$

jobbról: $V_2 =$
 $M_2 =$

K_3 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_3 =$
 $M_3 =$

jobbról: $V_3 =$
 $M_3 =$

K_3 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_3 =$
 $M_3 =$

jobbról: $V_3 =$
 $M_3 =$

Mint láhattuk a fenti példákban, egy keresztmetszet igénybevételeinek számításához mindig több lehetőség is van. A célszerű eljárás itt is az, hogy először végiggondoljuk, milyen egyenletek írhatók fel, azaz melyik erőkből lehet számítani az igénybevételeket, majd a lehetséges formulák közül a lehető legegyszerűbben és legbiztosabban kiszámolhatót írjuk fel. E döntésnél két (néha egymásnak ellentmondó) dologra kell figyelni. Egyrészt arra, hogy a rövidebb kifejezés gyorsabban számolható, másrészt arra, hogy ha kevesebb általunk korábban kiszámított mennyiséget használunk fel, akkor kisebb az esetleges korábbi hibák továbbgörgetésének esélye. Ezekből az elvekből levezethető néhány ökölszabály:

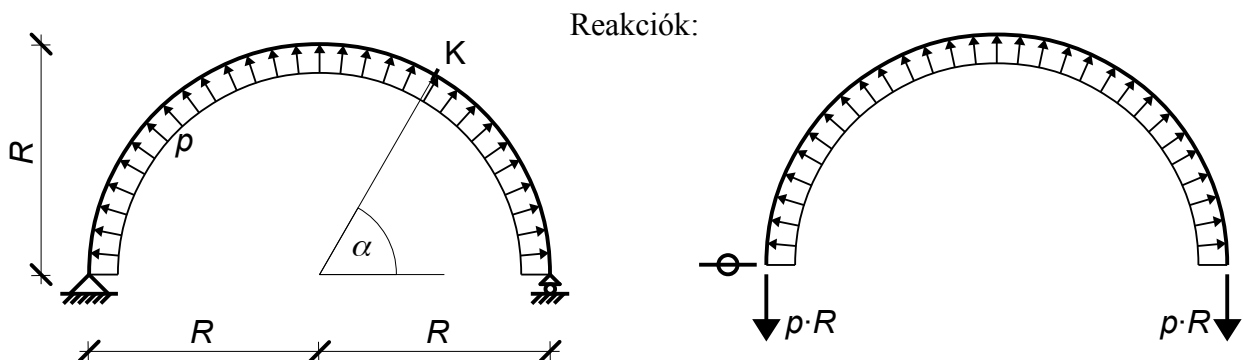
- Konzolon (akár merev befogással, akár kéttámaszú tartóként van megtámasztva) az igénybevételeket mindig kívülről számoljuk (azaz a reakciók kiszámítása nélkül).
- Ha egy tartóvégen (ami lehet a fizikai vége, vagy az összetett tartó egy testének a környezetéhez egy csuklóval kapcsolódó vége) ismerjük a tartóvégre ható koncentrált erők (esetleg nyomatékok) értékét, akkor azokból közvetlenül számolható a tartóvégi igénybevétel (ami ráadásul gyakran nulla), csak az előjelet kell eldönteni.

Melléklet: Nem vízszintes tengelyű tartó

Ezen az órán eddig csupa vízszintes tengelyű tartó igénybevételeit számoltuk. Később olyan példáink is lesznek, ahol az erőkomponensek számításánál a külső erők megfelelő vetületét kell képeznünk. Ezt demonstrálja az utolsó példa:

Mintapélda – 5 M

Számítsuk ki a félkör alakú tartó K keresztmetszetének igénybevételeit a megadott teher mellett!



Megoldás

Az igénybevételeket jobbról számítjuk. A felületre merőleges erőt vetület mentén megoszló erőkké alakítjuk az ábra szerint.

Három erőt veszünk figyelembe:

A reakcióerőt: $p \cdot R$

A megoszló erő függőleges vetületének eredőjét: $P_f = p \cdot R(1 - \cos \alpha)$

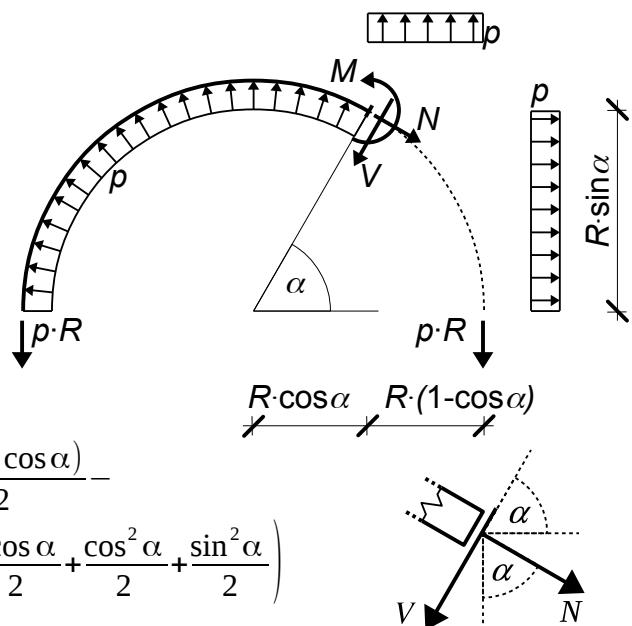
A megoszló erő vízszintes vetületének eredőjét: $P_v = p \cdot R \sin \alpha$

Az erőknél minden egyes erőkomponens alapján eldöntjük az előjelet, majd (a szög melletti, vagy szöggel szemkötti helyzet függvényében) a használandó trigonometrikus függvényt:

$$N = +p \cdot R \cos \alpha - p \cdot R(1 - \cos \alpha) \cos \alpha - \\ + p \cdot R \sin \alpha \sin \alpha = \\ = +p \cdot R \cos^2 \alpha + p \cdot R \sin^2 \alpha = +p \cdot R$$

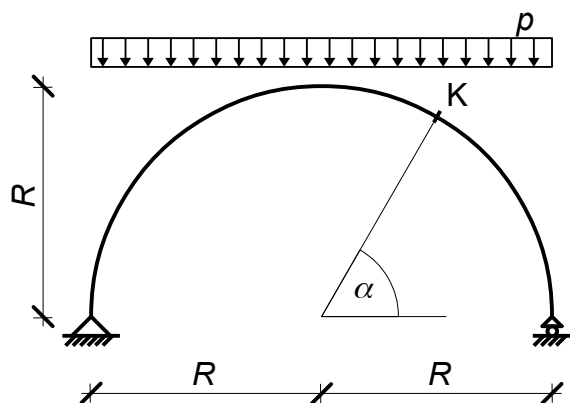
$$V = +p \cdot R \sin \alpha - p \cdot R(1 - \cos \alpha) \sin \alpha - \\ - p \cdot R \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$M = -p \cdot R \cdot R(1 - \cos \alpha) + p \cdot R(1 - \cos \alpha) \frac{R(1 - \cos \alpha)}{2} - \\ + p \cdot R \sin \alpha \frac{R \sin \alpha}{2} = p \cdot R^2 \left(-1 + \cos \alpha + \frac{1}{2} - \frac{2 \cos \alpha}{2} + \frac{\cos^2 \alpha}{2} + \frac{\sin^2 \alpha}{2} \right) \\ = 0$$

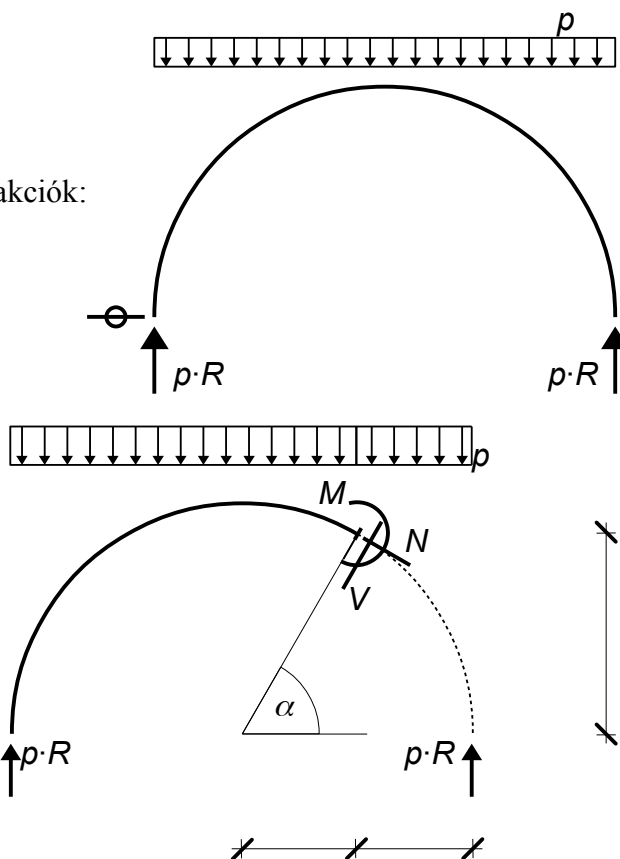


Gyakorló példa – 5M

Számítsuk ki a félkör alakú tartó K keresztmetszetének igénybevételeit a megadott teher mellett!



Reakciók:



Megoldás

A számításhoz a kiválasztott keresztmetszethez képest egyik irányba levő tartórészre ható erőket kell figyelembe venni.

Jelöljük be az ábrán ezeket az erőket és adjuk meg a pozitív igénybevételek irányait!

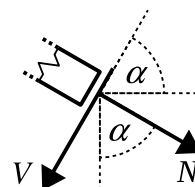
Mekkora a figyelembe veendő megoszló erő eredője:

Az igénybevételek:

$$N =$$

$$V =$$

$$M =$$



Igénybevételi ábrák

Az előző órán láthattuk, hogyan számíthatók egy egyensúlyban levő szerkezet bármely keresztmetszetének igénybevételei. Egymástól kis távolságban levő keresztmetszetek igénybevételeinek kiszámításával közelítő képet kaphatunk az igénybevételeknek a tartó hossza mentén való alakulásáról, azonban jobb lenne egy olyan módszer, mellyel *minden* keresztmetszet igénybevételeit felírhatnánk. Ezt ugyan megtehetnénk egy tartótengely mentén értelmezett ívhosszparaméter segítségével szakaszonként felírt függvényekkel is, de sokkal áttekinthetőbb eredményre vezet, ha ezeket a függvényeket a tartó tengelyére rajzoljuk fel. Mivel síkbeli feladatnál háromféle igénybevétel lehetséges, ezt a három ábrát összefoglalva igénybevételi ábrának nevezzük. (Külön-külön normálerőábra, nyíróerőábra és hajlítónyomatéki ábra a nevük.) Az ábrákon egy tetszőleges keresztmetszetet kiválasztva az ottani értéket a tartó tengelyére merőlegesen mérjük, a tengely pozitív oldalának azt tekintjük, amelyiket a hajlítónyomaték pozitív definíciójához is használtunk.

A fenti követelményeknek megfelelő igénybevételi ábrákat természetesen megrajzolhatnánk a definíció segítségével is, azaz az igénybevételi függvények szakaszonkénti felírásával és ábrázolásával, de ezt inkább elkerüljük. Ehelyett a szokásos eljárás az, hogy a terhelés függvényében azonosítjuk az egyes szakaszokon az ábrák jellegét, és a jellegnek megfelelő számú igénybevétel kiszámításával ábrázoljuk azokat.

Ilyen viselkedési forma lehet: a konstans érték, amikor az ábrázolt függvény a tartó tengelyével párhuzamosan halad; a lineáris szakasz, melyet a két végpontjában kiszámított érték határozhat meg, melyeket egy egyenessel kötünk össze; a másodfokú parabola, melynek megrajzolásához a két végponti értékén kívül még egy adatra lesz szükségünk.

Terhek és igénybevételek közötti összefüggés

Ha egy (végtelenül) rövid tartószakaszt elkülönítünk és a két keresztmetszetére az ott működő igénybevételeket felrajzoljuk, akkor e darab egyensúlyi egyenleteiből azt a megállapítást tehetjük, hogy a hajlítónyomaték hosszmenti első deriváltja a nyíróerővel arányos, a nyíróerő hosszmenti deriváltja a tartó tengelyére merőleges megoszló erő intenzitásával arányos, a normálerő hosszmenti deriváltja a tartó tengelyével párhuzamos megoszló erő intenzitásával arányos. E három összefüggés a biztos pont, amiből az alábbi következtetések levezethetők, de direkt használatuk a koncentrált erők és nyomatékok miatt kevésbé egyértelmű. Ráadásul mi visszafelé szeretnénk megtalálni a terheffüggvényből az igénybevételeket, ehhez azonban nem elegendő a sorrend felcserélése után a derivált helyett integrált mondani, az a bizonyos $+C$ is szakaszonként illesztendő. A differenciális kapcsolatok hatása, hogy nagyobb nyíróerőhöz meredekebb, kisebb nyíróerőhöz laposabb hajlítónyomatéki ábra tartozik, zérus nyíróerő esetén a nyomatéki ábra érintője vízszintes. Hasonlóképpen, nagyobb intenzitású megoszló erő alatt meredekebben, kisebb intenzitású megoszló erő alatt laposabban változik a nyíróerőábra.

A gyakorlatban legtöbbször használt kapcsolatokat az alapján is ki tudjuk jelteni, ha végiggondoljuk, milyen egyenletről számítanánk egy kiválasztott igénybevételt. Ezt vezetjük végig az alábbiakban.

Azokon az egyenes szakaszokon, ahol nem hat külső erő a tartóra, a normál- és a nyíróerőábra *konstans* értékű lesz. (Ennek oka, hogy a szakasz két keresztmetszetében azonos oldalról számolva e két igénybevételt ugyanazoknak az erőknek ugyanolyan irányú vetületeit vesszük figyelembe ugyanolyan előjelszabály mellett.)

Azokon az egyenes szakaszokon, ahol nem hat külső erő a tartóra, a hajlítónyomatéki ábra lineáris

lesz. (Ennek oka, hogy a szakasz két keresztmetszetében azonos oldalról számolva a hajlítónyomatékot ugyanabból az erőrendszerből ugyanannak az eredő erőnek kellene kiszámolnunk a nyomatékát ugyanolyan előjelszabállyal a két keresztmetszetre. E számítás során az erő karja változna csak. Hasonló háromszögek alapján belátható, hogy e változás a két keresztmetszet távolságával lineárisan arányos.)

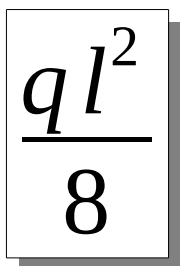
Koncentrált nyomaték keresztmetszetében a normál- és nyíróerő számítása ugyanazon vetületi egyenletek alapján történik, így azokban nincs változás. A hajlítónyomatékot ugyanazon irányból számolva ugyanazokat az erőket és nyomatékokat kellene figyelembe vennünk, egyetlen kivételt a koncentrált nyomaték jelentene, ami attól függően kerül be a számításba, hogy a működés keresztmetszetétől végtelen kis távolságra jobbra, vagy balra levő keresztmetszetet számoljuk. Emiatt a hajlítónyomatéki ábrában egy ugrás lesz (de más változás a nyomatéki teher miatt nem).

Koncentrált erő keresztmetszetében a normál- és nyíróerő számítása ugyanazon vetületi egyenletek alapján történhet ugyanazon oldalra ható erők alapján. Az egyetlen kivétel a koncentrált erő (egészen pontosan annak normál- és nyíróerő irányú vetülete), mely attól függően kerül be a számításba, hogy az erő támadáspontjától végtelen kis távolságban egyik, vagy másik oldalon levő keresztmetszet igénybevételeit számoljuk. Emiatt ezen igénybevételi ábrákban a koncentrált erő vetületének megfelelő nagyságú ugrás lesz a keresztmetszetben. A hajlítónyomaték számításakor a az erő támadáspontjának két oldalán ugyanarra a geometriai pontra írhatjuk fel ugyanazon előjelszabály alapján a nyomatéki egyenletet. E pont körül a koncentrált erő nem forgat, míg a többi figyelembe vett erő és nyomaték hatása ugyanakkora, így a hajlítónyomaték értékében nem lesz változás a keresztmetszet alatt. (Az ábra azonban megtörik, ha a nyíróerő ábrájában ugrás van.)

Egyenletesen megoszló erő esetén különböztessük meg a tartó tengelyével párhuzamos és az arra merőleges komponenseket. A párhuzamos komponens a normálerőt befolyásolja, méghozzá lineárisan, hiszen a tartó tengelye mentén haladva a vetületi egyenletben figyelembe veendő megoszló erő hossza lineárisan változik. A másik két igénybevételt ez a teher nem befolyásolja.

A tartó tengelyére merőleges egyenletesen megoszló erő esetén a tengely mentén haladva a nyíróerő számítására szolgáló vetületi egyenletben a haladással arányosan kell egyre több, vagy kevesebb megoszló erőt figyelembe venni, így annak hatása és ezáltal a nyíróerő-ábra lineárisan változik. A hajlítónyomaték számításakor a megoszló erő lineárisan változó nagyságú eredőjének a karja is lineárisan változik a hely függvényében, az e kettő szorzataként kapott hajlítónyomaték tehát egy másodfokú parabola lesz. A másodfokú parabolát a két végpontján kívül az ún. belógásával adjuk meg, mely a két végpontot összekötő egyeneshez képesti legnagyobb eltérést jelenti a szakasz közepén a tartó tengelyére merőleges irányban mérve. Értéke $ql^2/8$ ahol q a tengelyre merőleges megoszló erő intenzitása, l a kérdéses szakasz hossza.

Használata: A tartószakasz két végpontjában levő hajlítónyomaték-értékeket egy szerkesztővonallal



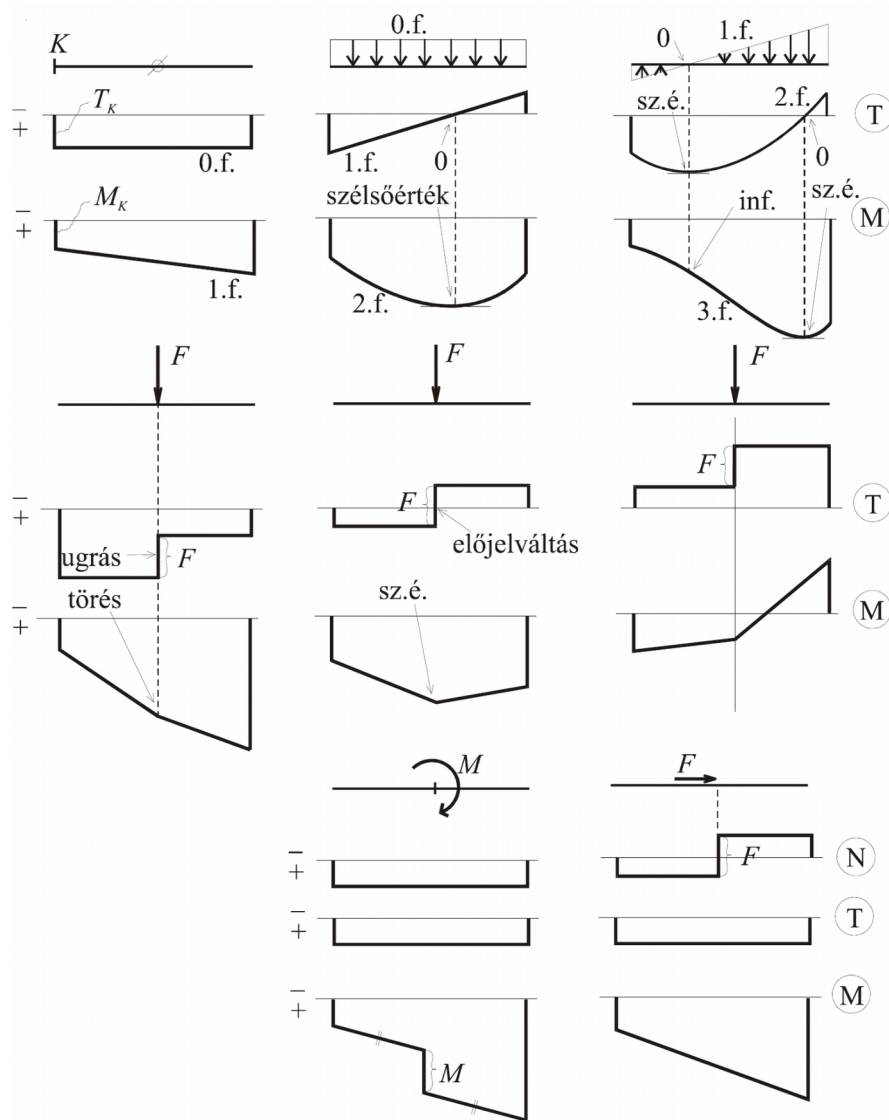
$$\frac{ql^2}{8}$$

összekötjük. Az így kapott szakasz felezőpontjából kiindulva a tartó tengelyére merőlegesen a megoszló erő irányába felmérjük a $ql^2/8$ -at. Kétszer. (Hangsúlyozzuk, hogy a mérés iránya az egyenes szerkesztővonaltól független, mindig a tartótengelyre merőleges.) Az első felmért érték a parabola közbenső pontja lesz. A második felmért pont a szakasz két végpontjában húzott érintők metszéspontja lesz. A parabola közbenső pontjában az érintő a két végpontot összekötő egyenessel párhuzamos vonal. Végül a három ponton át egy könnyed csuklómozdulattal berajzoljuk az érintőkre rásimuló parabolát.

Hosszabb szakasz esetén a már meglevő pontokból és érintőkből tetszés szerint tudjuk tovább sűríteni a parabolánk pontjait, ha ismerjük két pont helyét és az ottani érintőket: felezzük meg az érintők metszéspontja és a parabolapontok közötti szakaszokat (ez két pontot eredményez a két

érintőn). E két pontot összekötve a kapott szakasz a parabola érintője lesz, a szakasz felezőpontja pedig a parabola egy újabb pontja. Ezt a műveletet tovább ismételve végül annyi pontunk lesz, hogy arra már begipszelt csuklóval is lehet ívet húzni.

A fenti összefüggéseknek visszafelé is működniük kell, azaz bármelyik ábrán csak ott lehet ugrás, vagy törés, ahol azt valami okozza, csak ott lehet egyenestől eltérő az ábra, ahol annak megfelelő külső erő működik. A leggyakoribb teher-igénybevétel kapcsolatokat a fenti elveket követve az alábbi ábrán foglaltuk össze.



A teher és a nyomatéki ábra közötti kapcsolatot úgy is ellenőrizhetjük, hogy képzeletben egy kifeszített gumikötélre működtetjük a tartó terheit. A köté alakja a nyomatéki ábra alakjához fog hasonlítani: a terheletlen szakaszon egyenes lesz, koncentrált erő alatt törés lesz benne, megoszló erő alatt pedig meggörbül.

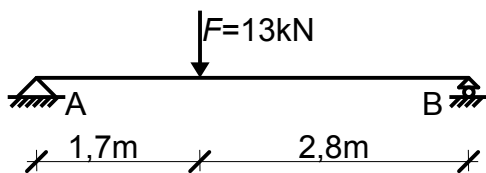
Az ábrák megrajzolásához az ábra melletti részen tüntetjük fel a kiszámított értékeket, segédmenységeket. Ezeket az értékeket balról-jobbra haladva sorszámozzuk (tehát M_2 balról a második kiszámított hajlítónyomaték-érték). A kiszámítás sorrendje azonban elvileg tetszőleges lehet, ezért esetenként eltérünk a sorszám szerinti sorrendtől, például a konzolon levő keresztmetszetek igénybevételei esetén, hiszen ezek a reakcióktól függetlenül, akár azok

meghatározása nélkül számolhatók. A gyakorló feladatoknál az előírt formulák tippet adhatnak a kiszámítandó mennyiségekre, de nem feltétlenül szükséges mindig mindegyik értéket kiírni (ha például beláthatóan nulla, vagy azonos egy másik értékkel).

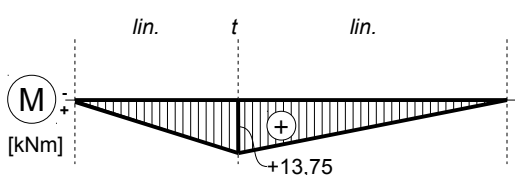
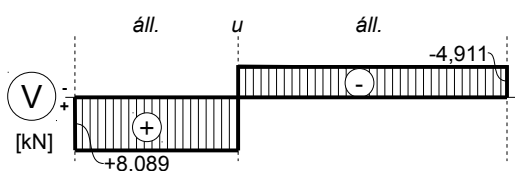
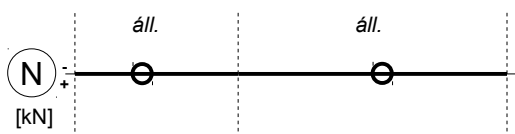
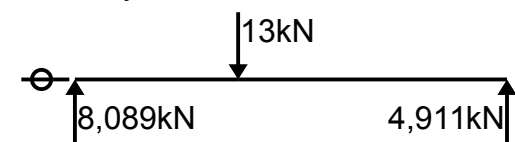
Igénybevételi ábrák rajzolása (erőtani) számítás alapján

Mintapélda – 1

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

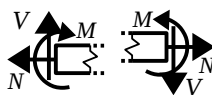
Először most is a reakciókat kell kiszámolnunk:

$$\sum M_i^{(A)}: -13 \cdot 1,7 + B \cdot 4,5 = 0 \rightarrow B = 4,911 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: 13 \cdot 2,8 - A_z \cdot 4,5 = 0 \rightarrow A_z = 8,089 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0 \text{ kN}$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 13 - 4,911 - 8,089 = 0$$



A normálerőábra két konstans szakaszból áll, melyek között az F erő vízszintes vetületével megegyező (azaz zérus) ugrás van. Bármely szakaszon bármely oldalról számolva nincs olyan erő, aminek lenne vízszintes komponense, így az ábra egy zérus ábra.

A tengelyre rajzolt kis nullkörrel jelezzük, hogy 'kiszámoltuk', nem pedig elfelejtkeztünk róla.

A nyíróerőábra két konstans szakaszból áll, melyek között az F erő függőleges vetületével megegyező ugrás van. A két szakaszon a nyíróerő:

$$V_1 = +8,089 \text{ kN} \text{ (célszerűen balról)}$$

$$V_2 = -4,911 \text{ kN} \text{ (célszerűen jobbról)}$$

A nyomatéki ábra két lineáris szakaszból áll, melyek között egy törés van (de ugrás nincs)

A szakaszok külső végén, (a tartó végén)

a nyomaték nulla, a törésnél:

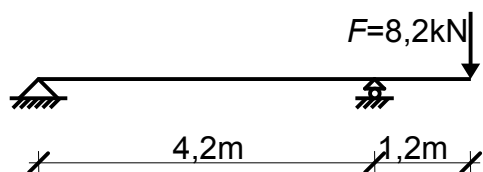
$$M_1 = +8,089 \cdot 1,7 = 13,75 \text{ kNm} \text{ (Balról)}$$

$$\text{Jobbról: } M_1 = 4,911 \cdot 2,8 \text{.)}$$

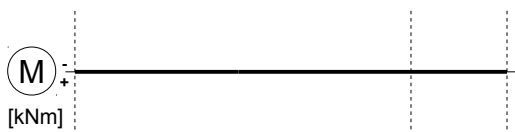
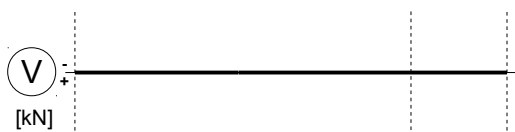
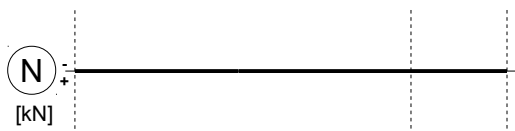
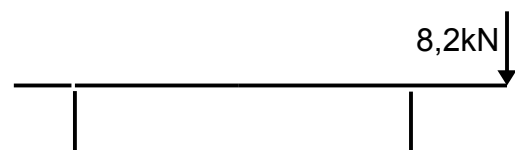
M-ábra röviden: A támaszoknál egyaránt nulla a nyomaték (kívülről számolva). A reakciók felfelé mutatnak, ezeknél a koncentrált erőknél a képzeletbeli terheletlen konzolos rész, nyomaték nélküli ábrája a reakcióknak megfelelően lefelé törik. A teher alatt szintén törik, de nem ugorhat, ezért a két oldalról érkező ferde egyenes ott metszi egymást.

Gyakorló példa – 1

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



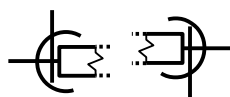
Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\begin{array}{l} \sum \\ \sum \\ \sum \end{array} \quad \begin{array}{l} : \\ : \\ : \end{array}$$



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

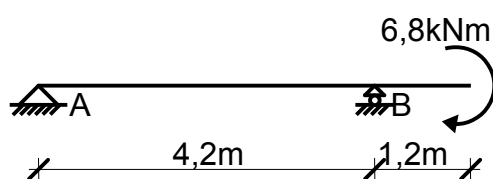
$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

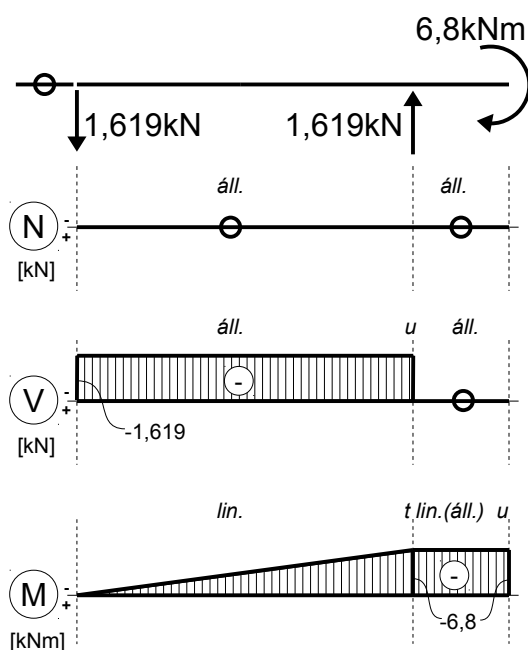
Ellenőrizzük az ugrások és törések meglétét, irányát!

Mintapélda – 2

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

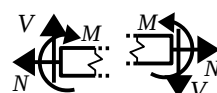
Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -6,8 + B \cdot 4,2 = 0 \rightarrow B = 1,619 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: -6,8 - A_z \cdot 4,2 = 0 \rightarrow A_z = -1,619 \text{ kN} (\downarrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 1,619 - 1,619 = 0$$



A normálerőábra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők hóján nulla.

A nyíróerőábra két konstans szakaszból áll, köztük a B -nek megfelelő ugrással. A konzolon kívülről (jobbról) számolva zérus a nyíróerő, a két támasz között bármely oldalról számolva: $V = -1,619 \text{ kN}$

A teher alapján a hajlítónyomatéki ábra két lineáris szakaszból áll. A konzolon ez ráadásul konstans függvénné egyszerűsödik a nyíróerő zérus volta miatt. Értéke jobbról számolva: $M_2 = -6,8 \text{ kNm}$ (A szakasz két végpontjában egyaránt ennyi, így azt a két pontot is összeköthettük volna.)

A két támasz közötti lineáris szakasz jobb oldali végén ugyancsak $-6,8 \text{ kNm}$, hiszen a B erő alatt a hajlítónyomaték értéke nem változik. A bal oldali végén balról számolva:

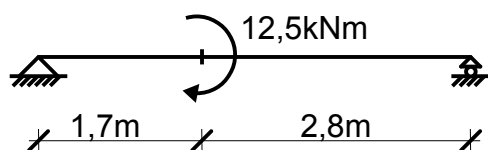
$$M_1 = 0 \text{ (De jobbról is)}$$

$$-6,8 + 1,619 \cdot 4,2 = -0,0002 \approx 0 \text{ lenne.)}$$

M-ábra röviden: A konzolon nincs semmilyen erő, így nyíróerő sem, ezért ott az ábra konstans lesz, a felül húzó nyomaték miatt felülre kerül.

Gyakorló példa – 2

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

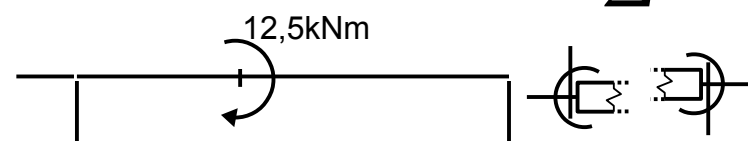


Megoldás

Reakciók:

$$\begin{array}{l} \sum \\ \sum \\ \sum \\ \sum \end{array} \quad \begin{array}{l} : \\ : \\ : \\ : \end{array}$$

Eredményvázlat:



(N)
[kN]

Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

(V)
[kN]

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

(M)
[kNm]

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

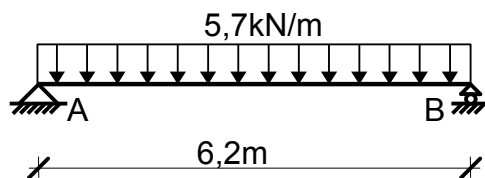
$$M_3 =$$

$$M_4 =$$

Ellenőrizzük az ugrások és törések meglétét, irányát, a párhuzamosok párhuzamosságát!

Mintapélda – 3

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

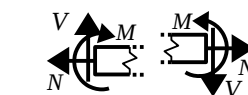
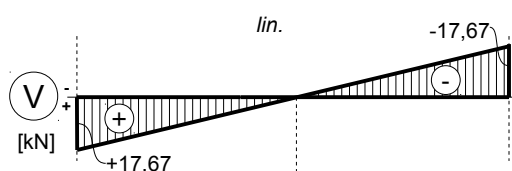
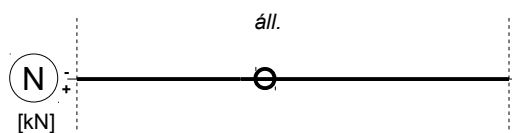
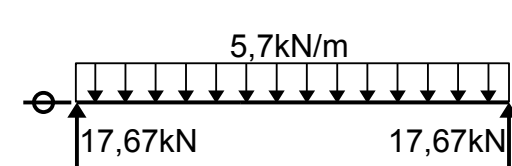
$$\sum M_i^{(A)}: -(5,7 \cdot 6,2) \cdot 3,1 + B \cdot 6,2 = 0 \rightarrow B = 17,67 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: (5,7 \cdot 6,2) \cdot 3,1 - A_z \cdot 6,2 = 0 \rightarrow A_z = 17,67 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 5,7 \cdot 6,2 - 17,67 - 17,67 = 0$$

Eredményvázlat:



A normálerőábra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők híján nulla.

A nyíróerőábra a teher alapján egyetlen lineáris szakaszból áll. Ennek végértéke a jobb oldalon: $V_2 = -17,67 \text{ kN}$ (Jobbról B-ből.)

A bal oldalon:

$V_1 = 17,67 \text{ kN}$ (Balról A_z -ből.)

A zérushely pont középre esik.

A hajlítónyomatéki ábra a teher alapján egyetlen másodfokú parabolából áll. A két végpontban az értéke (rendre kívülről számolva) zérus. A két végpontot összekötő szakasz a tengelyre esik.

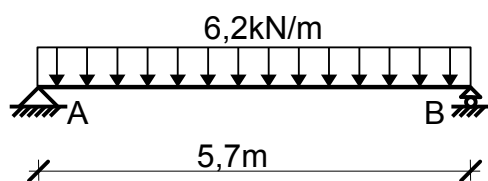
A parabola belógása: $\frac{ql^2}{8} = \frac{5,7 \cdot 6,2^2}{8} = 27,39 \text{ kNm}$.

Ezt a végpontokat összekötő szakasz felezőpontjából mérjük (a teher iránya miatt) *lefelé* kétszer. Az első pont a parabola közbenső pontja lesz, a második a végponti érintők metszéspontja. A közbenső pontban az érintő most vízszintes lesz, azaz az ábra maximuma is itt lesz, értéke $+27,39 \text{ kNm}$.

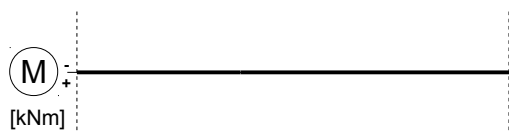
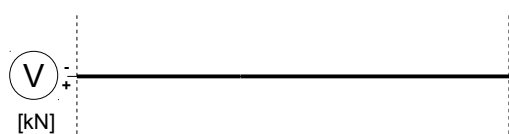
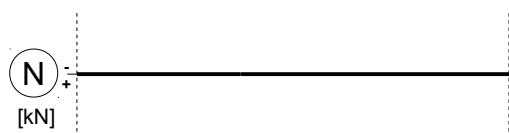
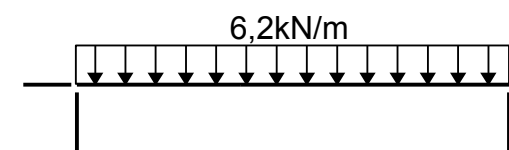
M-ábra röviden: A két végpontban nulla a nyomaték értéke, a kettő közé a megoszló erő miatt lefelé kell belógnia a parabolát.

Gyakorló példa – 3

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



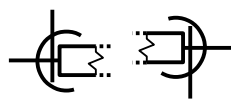
Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\begin{array}{l} \sum \\ \sum \\ \sum \\ \sum \end{array} \quad \begin{array}{l} : \\ : \\ : \\ : \end{array}$$



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

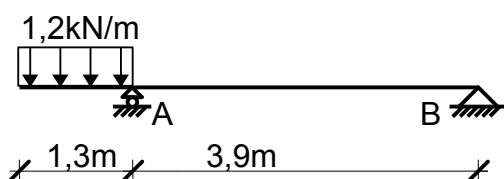
$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

parabola: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

Mintapéllda – 4

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

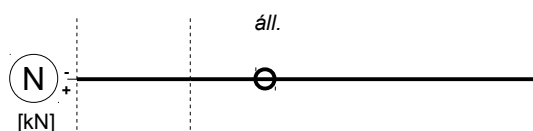
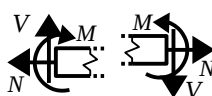
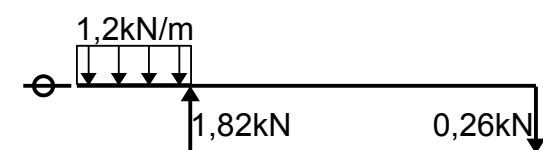
$$\sum M_i^{(B)}: (1,2 \cdot 1,3) \cdot 4,55 - A \cdot 3,9 = 0 \rightarrow A = 1,82 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(A)}: (1,2 \cdot 1,3) \cdot 0,65 + B_z \cdot 3,9 = 0 \rightarrow B_z = -0,26 \text{ kN} (\downarrow)$$

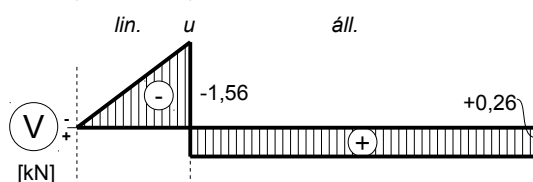
$$\sum F_{ix}: B_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 1,3 \cdot 1,2 - 1,82 + 0,26 = 0$$

Eredményvázlat:



A normálerőreóra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők híján nulla.

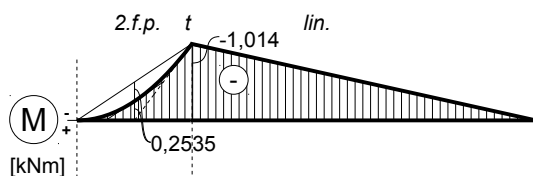


A nyíróerőreóra a teher alapján egy lineáris és egy konstans szakaszokból áll. Előbbi két végponti értékét kívülről (balról) számoljuk:

$$V_1 = 0, \quad V_2 = -1,2 \cdot 1,3 = -1,56 \text{ kN}$$

A konstans szakaszt könnyebb jobbról számolni:
 $V_3 = +0,26 \text{ kN}$ (B-ből.)

(A két szakasz között A-nak megfelelő ugrás van.)



A nyomatéki ábra a teher alapján egy másodfokú parabolából és egy lineáris szakaszokból áll. A parabola két végponti értéke:

$$M_1 = 0, \quad M_2 = -1,2 \cdot 1,3 \cdot 0,65 = -1,014 \text{ kNm},$$

$$\text{belógása: } \frac{ql^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 1,3^2}{8} = 0,2535 \text{ kNm}.$$

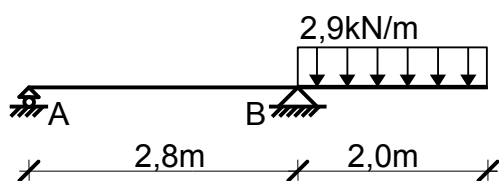
(A kétszeri felméréssel épp a tartótengelyre kerülünk, azaz a külső végponti érintő vízszintes lesz, ahogy a zérus nyíróerő is sugallja.)

A lineáris szakasz bal oldali végpontjában a hajlítónyomaték $-1,014 \text{ kNm}$, az A erő miatt még nem változhat. A jobb oldali végen jobbról:
 $M_3 = 0 \text{ kNm}.$

M-ábra röviden: a konzol végén nincs koncentrált erő, sem nyomaték, ezért vízszintes érintővel nulláról indul a teher miatt alulról domború másodfokú parabola, ami a bal támaszig tart. A támasznál a reakció miatt az ábra megtörik, a két támasz között egy egyenes lesz, amit a jobb oldali végpontig kell húzni, ami nulla.

Gyakorlópélda – 4

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

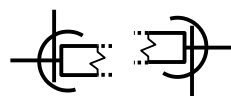
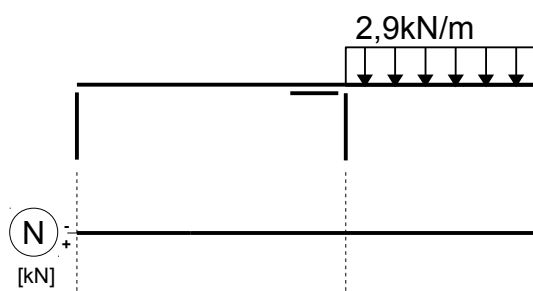


Megoldás

Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum & : \\ \sum & : \\ \sum & : \end{aligned}$$

Eredményvázlat:

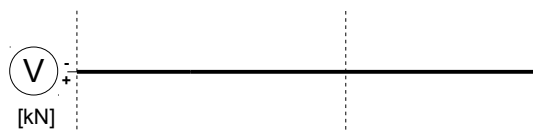


Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$



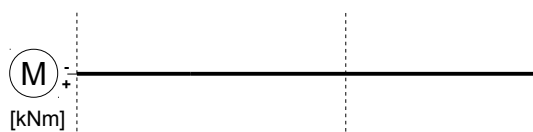
Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

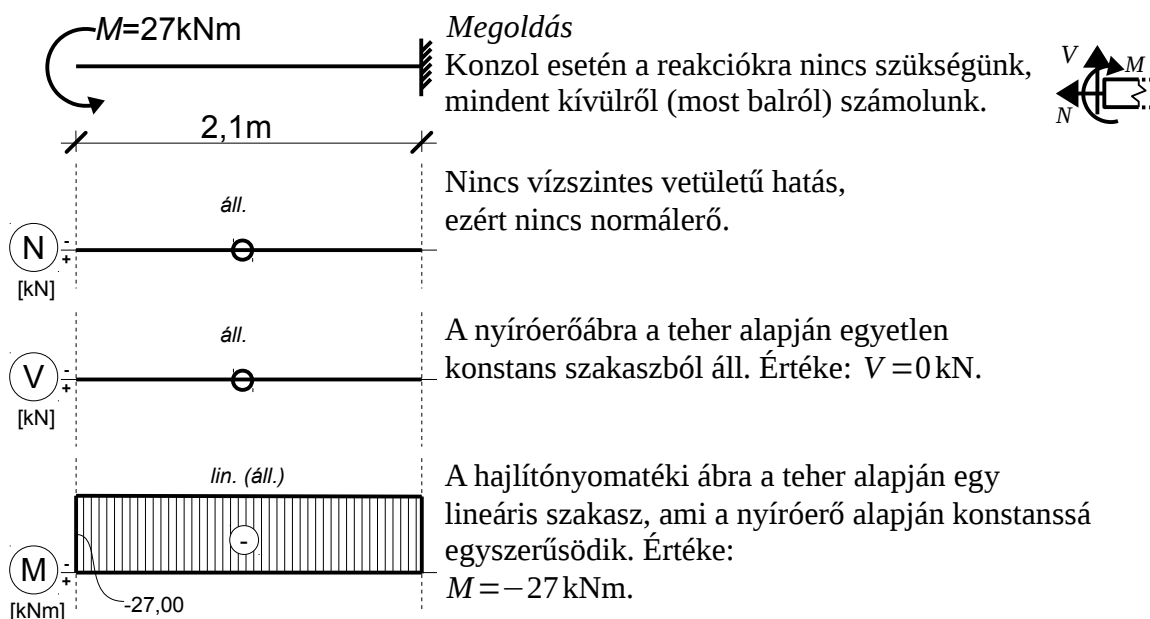
$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

parabola: $\frac{ql^2}{8} = \underline{\hspace{2cm}} =$

Mintapélda – 5

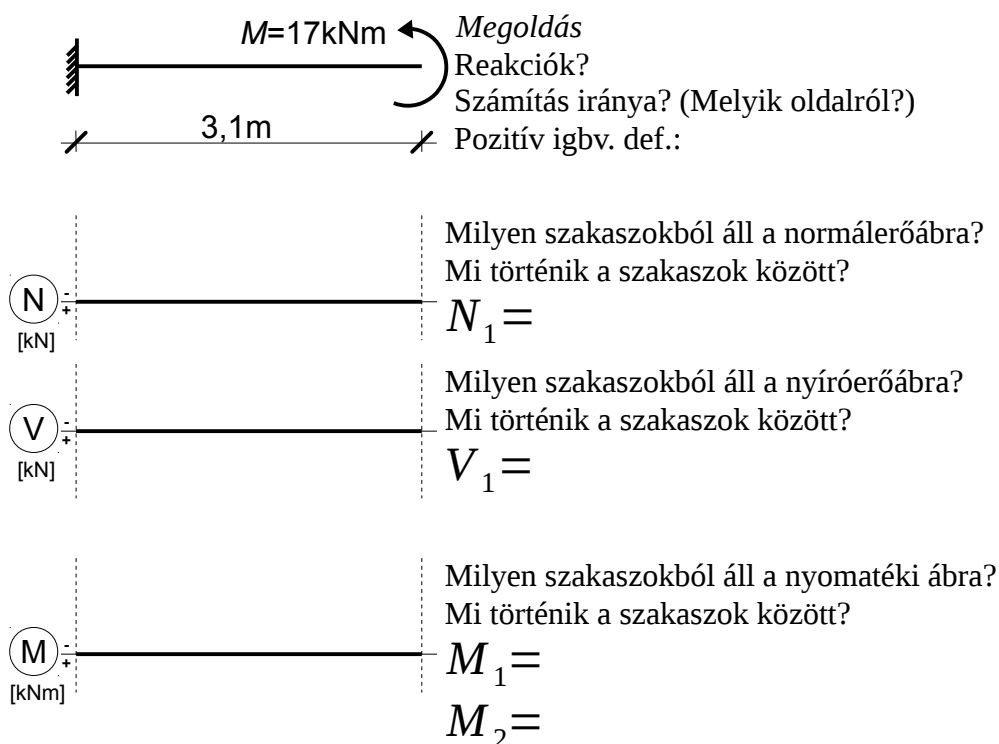
Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



M-ábra röviden: a konzolon sehol nincs erő, ezért nincs nyíróerő, így a külső végén vízszintes érintővel indul a húzott oldalán a konstans nyomatéki ábra, ami a jobb támaszig tart.

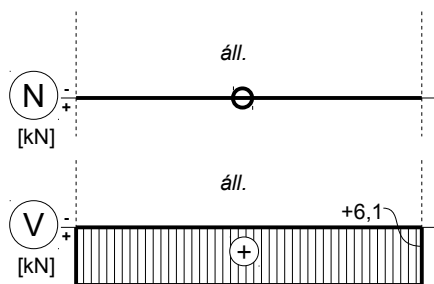
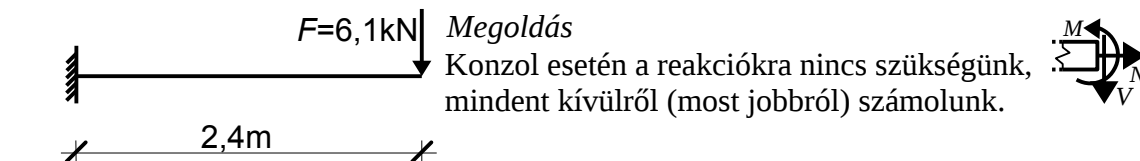
Gyakorló példa – 5

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



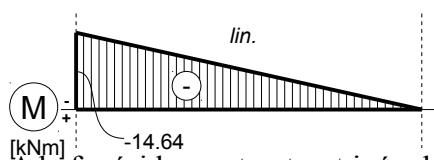
Mintapéllda – 6

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.

A nyíróerőábra egyetlen konstans szakaszból áll. Értéke: $V=6,1\text{ kN}$.



A hajlítónyomatéki ábra a teher alapján egy lineáris szakasz. Végponti értékei kívülről (jobbról) számolva:

$$M_2=0, \quad M_1=-6,1 \cdot 2,4 = -14,64\text{ kNm}.$$

A befogási keresztmetszet igénybevételeinek balról történő számításával a befogási reakciók meghatározhatók:

$$N=0 \rightarrow A_x=0$$

$$V=6,1\text{ kN} \rightarrow A_y=6,1\text{ kN} (\uparrow)$$

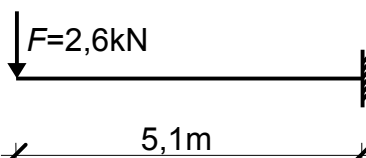
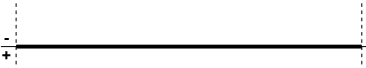
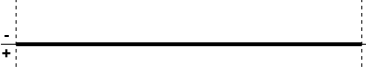
$$M=-14,64\text{ kNm} \rightarrow M_A=14,64\text{ kNm} (\curvearrowright)$$



M-ábra röviden: az ábra lineáris lesz, a külső végen nulla, a konzol képzeletbeli (kifelé történő) meghosszabbításán levő zérusfüggvényhez képest úgy kell megtörnie a koncentrált erő alatt, hogy az erő nyila beleilljen a törésbe, ezért a befelé haladó egyenesnek felfelé kell változnia a befogásig.

Gyakorló példa – 6

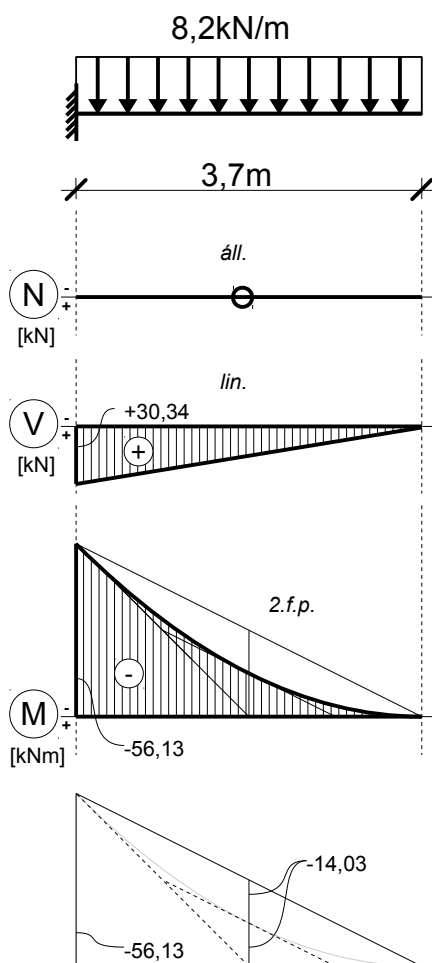
Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

	<i>Megoldás</i> Reakciók? Számítás iránya? (Melyik oldalról?) Pozitív igbv. def.:
(N) [kN] 	Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra? Mi történik a szakaszok között? $N_1 =$
(V) [kN] 	Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra? Mi történik a szakaszok között? $V_1 =$
(M) [kNm] 	Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra? Mi történik a szakaszok között? $M_1 =$ $M_2 =$

Határozzuk meg a reakciókat a befogási keresztmetszet igénybevételeiből!

Mintapéllda – 7

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Konzol esetén a reakciókra nincs szükségünk, mindent kívülről (most jobbról) számolunk.



Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.

A nyíróerőábra egyetlen lineáris szakasz lesz.

Végponti értékei:

$$V_2 = 0 \text{ kN}, V_1 = +8,2 \cdot 3,7 = +30,34 \text{ kN}.$$

A nyomatéki ábra a teher alapján egy másodfokú parabolából áll. A parabola két végponti értéke:

$$M_2 = 0, M_1 = -8,2 \cdot 3,7 \cdot 1,85 = -56,13 \text{ kNm},$$

$$\text{belógása: } \frac{ql^2}{8} = \frac{8,2 \cdot 3,7^2}{8} = 14,03 \text{ kNm}.$$

(A kétszeri felméréssel végponti érintők metszéspontja épp a tartótengelyre kerül, azaz a külső végponti érintő vízszintes (ahogy az a nyíróerő ottani zérusértékéből is következik).

(Az alsó ábra a parabola szerkesztéséhez felmérendő és behúzendó segédvonalakat mutatja.)

M-ábra röviden: a konzol végén nincs koncentrált erő, sem nyomaték, ezért vízszintes érintővel nulláról indul a teher miatt alulról domború másodfokú parabola, ami a befogásig tart.

Gyakorló példa – 7

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

Megoldás

Reakciók?
 Számítás iránya? (Melyik oldalról?)
 Pozitív igbv. def.:

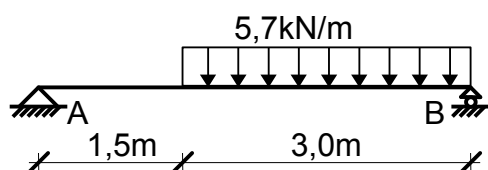
Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?
 Mi történik a szakaszok között?
 $N_1 =$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?
 Mi történik a szakaszok között?
 $V_1 =$
 $V_2 =$

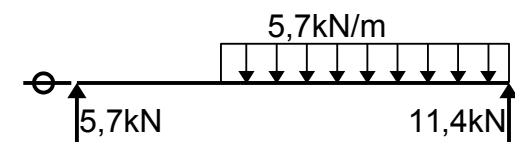
Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
 Mi történik a szakaszok között?
 $M_1 =$
 $M_2 =$
 parabola: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

Mintapélda – 8

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

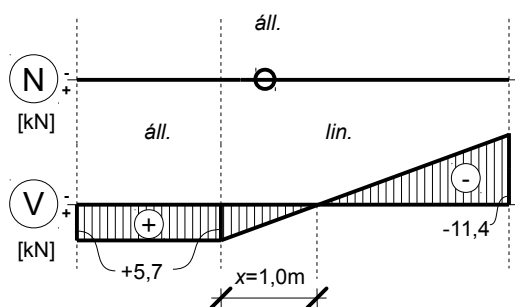
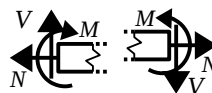
Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -(5,7 \cdot 3,0) \cdot 3,0 + B \cdot 4,5 = 0 \rightarrow B = 11,4 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: (5,7 \cdot 3,0) \cdot 1,5 - A_z \cdot 4,5 = 0 \rightarrow A_z = 5,7 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 5,7 \cdot 3,0 - 5,7 - 11,4 = 0$$



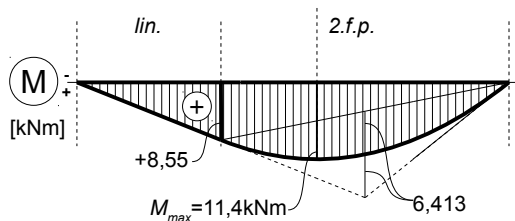
Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.

A nyíróerőábra a teher alapján egy konstans és egy lineáris szakaszból áll. Előbbi értékét célszerűen balról számoljuk: $V_1 = +5,7 \text{ kN}$.

Ez egyben a lineáris szakasz bal oldali végértéke. A lineáris szakasz jobb oldali végértéke jobbról: $V_2 = -11,4 \text{ kN}$ (B-ből).

A két végpontot összekötve az valahol metszi a tengelyt. Ennek helyét a megoszló erő kezdetétől jelölje x . Az itteni nyíróerő balról:

$$V(x) = +5,7 - 5,7 \cdot x = 0 \rightarrow x = 1,0 \text{ m}$$



A nyomatéki ábra a teher alapján egy lineáris szakaszból és egy másodfokú parabolából áll. A lineáris szakasz két végértéke: $M_1 = 0$, $M_2 = +5,7 \cdot 1,5 = 8,55 \text{ kNm}$.

Utóbbi a parabola bal oldali végértéke is, míg a jobb oldali végen: $M_3 = 0$.

$$\text{A parabola belógása: } \frac{ql^2}{8} = \frac{5,7 \cdot 3,0^2}{8} = 6,413 \text{ kNm.}$$

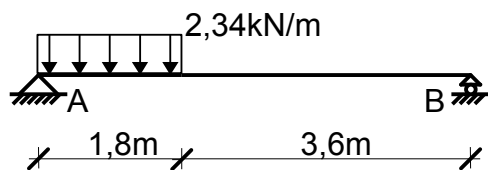
A végponti érintők dőlésének iránya ellenkező, ahol vízszintessé válik, ott egy lokális maximum van. Ennek helyét a nyíróerő-ábránál kiszámoltuk, a maximum értéke:

$$M_{\max} = 5,7 \cdot 2,5 - (5,7 \cdot 1,0) \cdot 0,5 = +11,4 \text{ kNm.}$$

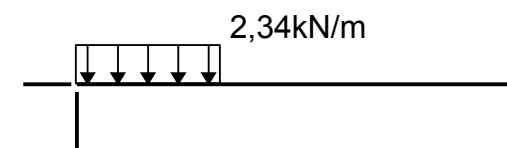
Ellenőrzés: a parabola bal oldali érintője és az egyenes szakasz egybeesik.

Gyakorló példa – 8

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



(N)
[kN]

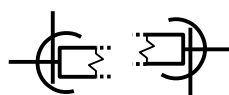
(V)
[kN]

(M)
[kNm]

Megoldás

Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum &: \\ \sum &: \\ \sum &: \end{aligned}$$



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

parabola: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

Van maximum? → Nyíróerőnél van zérushely? Hol?

$$V_m = \text{---} = 0$$

$$x_m =$$

Mekkora itt a nyomaték?

$$M_{max} =$$

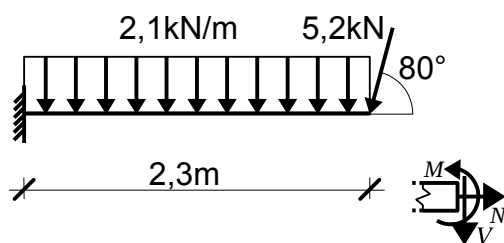
Igénybevételi ábrák konzolon

Konzolok igénybevételi ábráinál az eddigi módszerek használhatók, az a tény azonban, hogy bármely igénybevétel kívülről (a nem megtámasztott vég felől) a reakcióktól függetlenül számolható, alapvetően meghatározza a számítás módját és menetét. Bár ugyanúgy azzal kezdjük a munkát, hogy megkülönböztetjük az ábrák egyes szakaszait és a köztük lévő változást, az ábrát magát kívülről kezdve rajzoljuk, pontonként a pontbeli, illetve szakaszonként a hossz mentén való változás figyelembevételével. Így akár lehetőség nyílik a terhek intenzitásától független ún. alakhelyes ábrák megrajzolására is.

Példáinkban a kiszámított mennyiségek alsó indexbe írt sorszámát most is balról-jobbra haladva számozzuk, a számítást azonban mindig kívülről kezdjük majd.

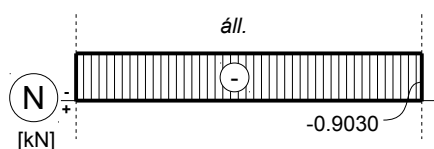
Mintapélda – 1

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

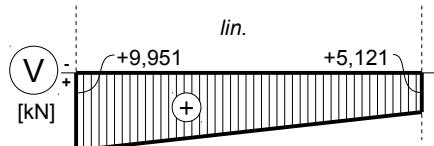


Megoldás

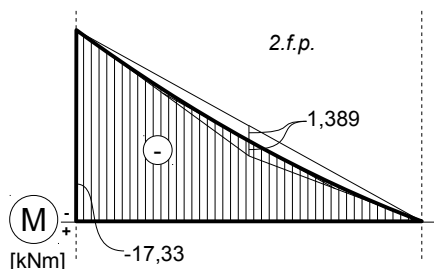
Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most jobbról számolunk.



Normálerő vízszintes erőből keletkezik, a hossz mentén ilyen hatás nincs, ezért az ábra konstans. Értéke: $N_1 = -5,2 \cos 80^\circ = -0,9030 \text{ kN}$.



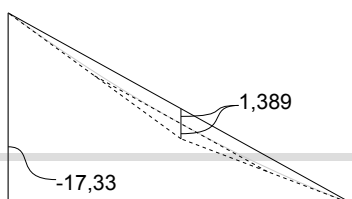
A nyíróerőábra egyetlen lineáris szakaszból áll, végponti értékei: $V_2 = +5,2 \sin 80^\circ = +5,121 \text{ kN}$, $V_1 = +5,121 + 2,1 \cdot 2,3 = +9,951 \text{ kN}$.



A nyomatéki ábra egyetlen másodfokú parabola. Végponti értékei: $M_2 = 0 \text{ kNm}$,

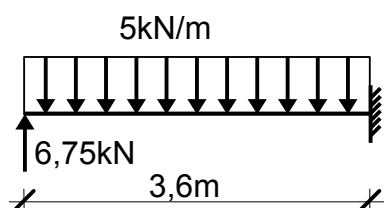
$$M_1 = -5,2 \sin 80^\circ \cdot 2,3 - (2,1 \cdot 2,3) \cdot \frac{2,3}{2} = -17,33 \text{ kNm}.$$

A parabola belógása: $\frac{2,1 \cdot 2,3^2}{8} = 1,389 \text{ kNm}$



Gyakorló példa – 1

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

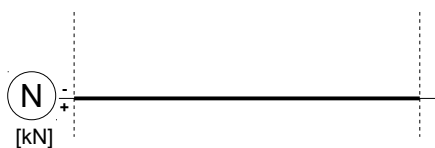


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

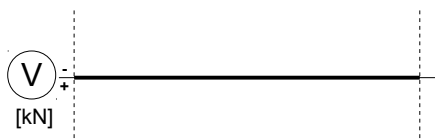
Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$



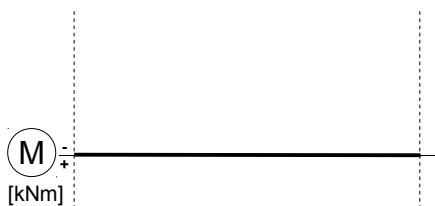
Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

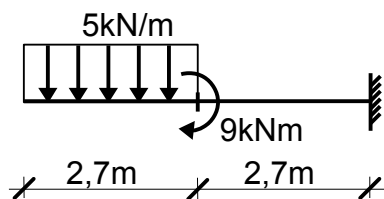
$$M_2 =$$

$$\text{parabola: } \frac{ql^2}{8} = \text{---} =$$

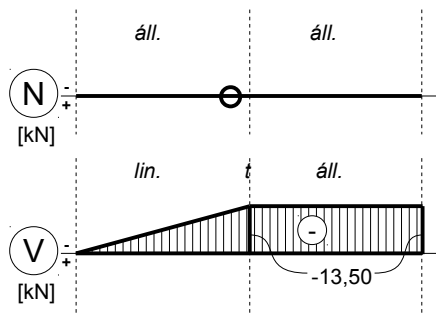
$$\text{maximum: } M_{\max} =$$

Mintapélda – 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

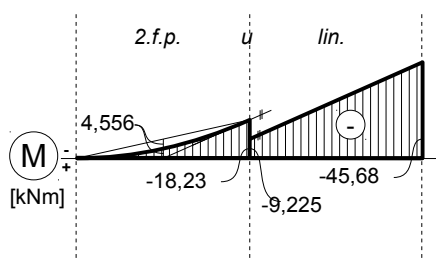
*Megoldás*

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most balról számolunk.



Normálerő vízszintes hatások miatt változhat. Ilyen a tartó hossza mentén nincs, ezért konstans lesz az ábra, értéke: $N_1 = 0 \text{ kN}$.

A nyíróerőábra egy lineáris és egy konstans szakaszból áll, ugrás nincs a kettő között. Az értékek a szakaszhatárokon: $V_1 = 0 \text{ kN}$, $V_2 = -5 \cdot 2,7 = -13,5 \text{ kN}$.



A nyomatéki ábra egy másodfokú parabola és egy lineáris szakaszból áll. A kettő között ugrás van, de az ugrás előtti és utáni érintők párhuzamosak.

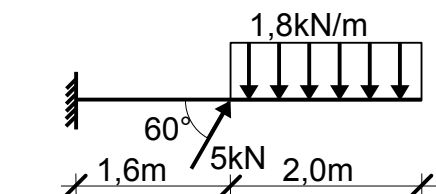
A parabola végponti értékei: $M_1 = 0 \text{ kNm}$, $M_2 = -(5 \cdot 2,7) \cdot 1,35 = -18,23 \text{ kNm}$, a lineáris szakasz végpontjai: $M_3 = -(5 \cdot 2,7) \cdot 1,35 + 9 = -9,225 \text{ kNm}$, $M_4 = -(5 \cdot 2,7) \cdot 4,05 + 9 = -45,68 \text{ kNm}$.

A parabola belógása: $\frac{5 \cdot 2,7^2}{8} = 4,556 \text{ kNm}$

(A középpontban kétszer felmérve a belógást a tengelyre kerül a végponti érintők metszéspontja. A bal oldali végkeresztmetszet érintője tehát vízszintes lesz, ami a nyíróerő ottani zérus értékéből is következik.)

Gyakorló példa – 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás:

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

Pozitív igbv. def.:

Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

N
[kN]

$$N_2 =$$

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

V
[kN]

$$V_3 =$$

$$V_2 =$$

$$V_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

M
[kNm]

$$M_3 =$$

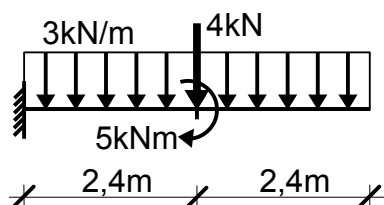
$$M_2 =$$

$$M_1 =$$

parabola: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

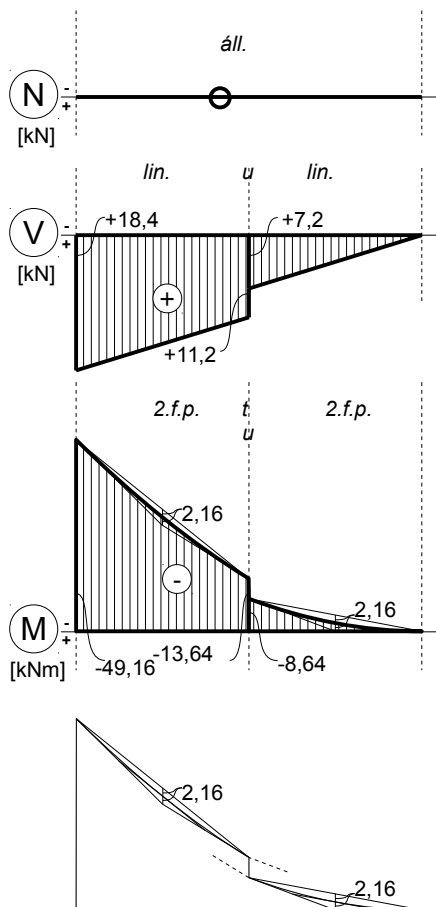
Mintapélda – 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most jobbról számolunk.



A normálerő vízszintes hatások miatt változhatna, a hossz mentén nincs ilyen, így az ábra konstans lesz, értéke: $N_1 = 0$ kN.

A nyíróerőábra két (egymással párhuzamos) lineáris szakaszból áll, melyek között a függőleges erő miatt egy ugrás van. A szakaszhatárokon az értékek:

$$V_4 = 0 \text{ kN}, \quad V_3 = +3 \cdot 2,4 = +7,2 \text{ kN},$$

$$V_2 = +7,2 + 4 = 11,2 \text{ kN}, \quad V_1 = +11,2 + 3 \cdot 2,4 = 18,4 \text{ kN}.$$

A nyomatéki ábra két másodfokú parabolából áll, melyek között ugrás van, és a kétoldali érintők sem párhuzamosak. A parabolák értékei a végpontokban: $M_4 = 0$ kNm,

$$M_3 = -(3 \cdot 2,4) \cdot 1,2 = -8,64 \text{ kNm},$$

$$M_2 = -(3 \cdot 2,4) \cdot 1,2 - 5 = -13,64 \text{ kNm},$$

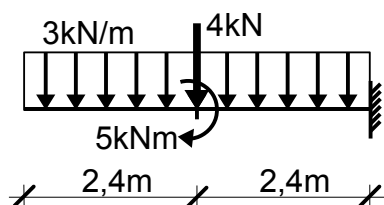
$$M_1 = -(3 \cdot 4,8) \cdot 2,4 - 5 = -49,16 \text{ kNm}.$$

A parabolák belógása: $\frac{3 \cdot 2,4^2}{8} = 2,16$ kNm (mindkettő)

(Az ugrás két oldalán szaggatott vonallal berajzoltuk a másik szakasz érintőjét. Ebből látható, hogy nem csak a forgatónyomaték miatti ugrás, de a koncentrált erő miatti törés is megjelenik az ábrában.)

Gyakorló példa – 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

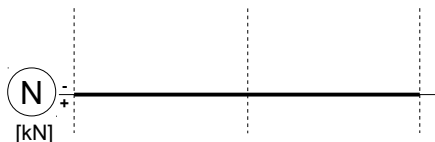


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

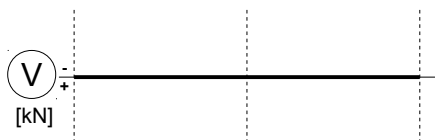
Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Milyen az egyes szakaszok meredeksége?

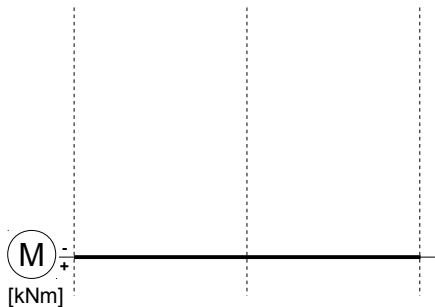
Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$V_4 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

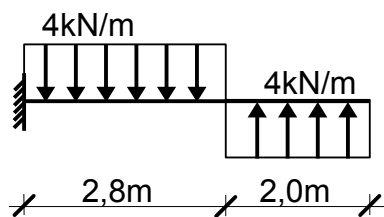
$$M_3 =$$

$$M_4 =$$

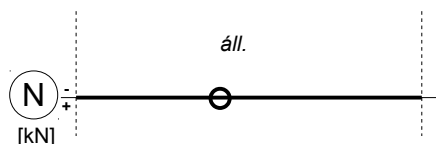
parabola: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

Mintapéllda – 4

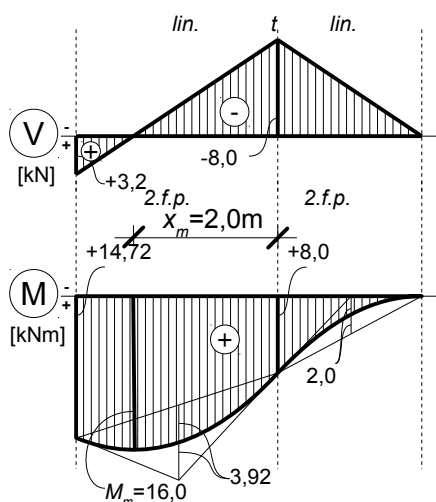
Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

*Megoldás*

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most jobbról számolunk.



A normálerő vízszintes hatások miatt változhatna, a hossz mentén nincs ilyen, így az ábra konstans lesz, értéke: $N_1 = 0 \text{ kN}$.



A nyíróerőábra két lineáris szakaszból áll, melyek között nincs ugrás. Az értékek a szakaszhatárokon: $V_3 = 0 \text{ kN}$, $V_2 = -4 \cdot 2,0 = -8,0 \text{ kN}$, $V_3 = -8,0 + 4 \cdot 2,8 = +3,2 \text{ kN}$. zérushely: $T_m = -4 \cdot 2 + 4 \cdot x_m = 0 \Rightarrow x_m = 2,0 \text{ m}$.

A nyomatéki ábra két parabolából áll, melyek közös érintővel csatlakoznak. (A külső fölülről domború!) Értékek a parabolák végeinél: $M_3 = 0 \text{ kNm}$,

$$M_2 = +(4 \cdot 2,0) \cdot 1,0 = +8,0 \text{ kNm},$$

$$M_1 = +(4 \cdot 2,0) \cdot 3,8 - (4 \cdot 2,8) \cdot 1,4 = +14,72 \text{ kNm}.$$

$$\text{A parabolák belógása: } \frac{4 \cdot 2,0^2}{8} = 2,00 \text{ kNm (fel!)}$$

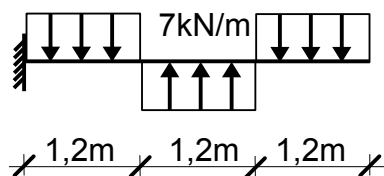
$$\frac{4 \cdot 2,8^2}{8} = 3,92 \text{ kNm (le)}$$

A maximum értéke:

$$M_{\max} = +(4 \cdot 2,0) \cdot 3,0 - (4 \cdot 2,0) \cdot 1,0 = +16,00 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa – 4

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

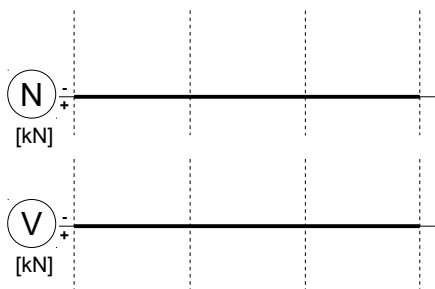


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

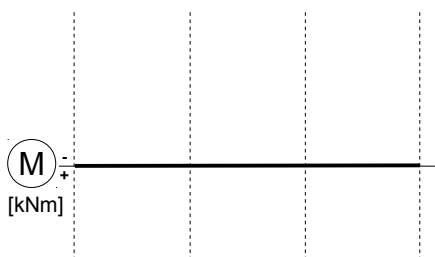
$$V_4 =$$

$$V_3 =$$

$$V_2 =$$

$$V_1 =$$

előjelváltás?



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_4 =$$

$$M_3 =$$

$$M_2 =$$

$$M_1 =$$

parabolák: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

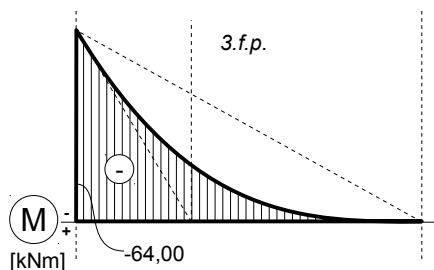
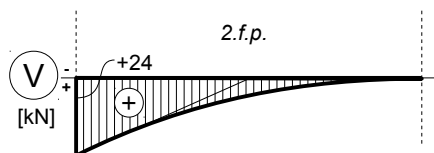
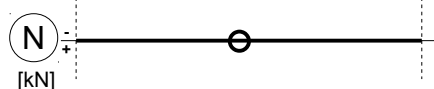
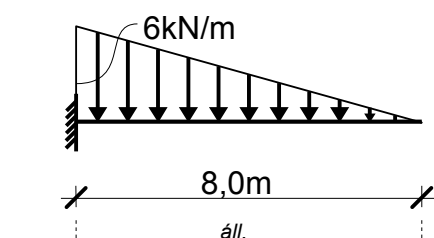
maximum: ?

Tetszőleges megoszló teher hatása az igénybevételi ábrákra

Egy tartó hossza mentén a megoszló erő intenzitása nem mindig állandó. Tipikus példa erre a szélnyomásból származó teher, ahol a felszín feletti magasságtól függően növekszik a szélesség és így a teher intenzitása, vagy gabona tárolásakor a depóniába rakott búza alatti földemre átható nyomás, ami közelítőleg a magassággal arányosan változik. A tetszőleges módon, de függvényyszerűen változó teher esetén több lehetőségünk van az ábrák megrajzolására. Polinommal megadott teherfüggvény alatt a nyíróerőábra egy, a nyomatéki ábra két fokkal magasabb fokú polinom lesz, mint a teherfüggvény. Bár magasabb fokú polinomok rajzolására nem vezetünk be általános szabályokat, érdemes tudni, hogy a nyomatéki ábrának egy vizsgált szakasz végpontjaiban meghúzott érintői az adott szakaszon megoszló erő eredője alatt metszik egymást.

Mintapélda – 5

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most jobbról számolunk.



A normálerő vízszintes hatások miatt változhatna, a hossz mentén nincs ilyen, így az ábra konstans lesz, értéke: $N_1 = 0 \text{ kN}$.

A lineárisan változó teher miatt a nyíróerő másodfokú parabola szerint változik. A külső végén a zérus teherintenzitás miatt vízszintes az érintője, balra haladva egyre meredekebb lesz. A végponti értékek: $V_2 = 0 \text{ kN}$,

$$V_1 = +\frac{6 \cdot 8}{2} = +24 \text{ kN}.$$

(Mivel a másodfokú parabola végponti érintői a szakasz közepén metszik egymást, a baloldali végpontból ezt felhasználva húzhatunk egy érintőt, ha további támpontot keresünk a parabolához.)

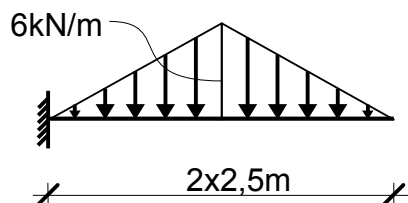
A teher miatt a nyomatéki ábra harmadfokú parabola lesz. A végponti értékek: $M_2 = 0 \text{ kNm}$,

$$M_1 = -\frac{6 \cdot 8}{2} \cdot \frac{8,0}{3} = -64 \text{ kNm}.$$

A külső végpontban a nyíróerő miatt vízszintes az érintő, a lefelé mutató teher miatt az ábra végig alulról domború. További támpont lehet, hogy a megoszló erő eredője a háromszög súlypontján halad át, ahol ez metszi a jobb oldali vízszintes érintőt, azon a ponton kell átmennie a bal oldali érintőnek is.

Gyakorló példa – 5

Erőteni számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

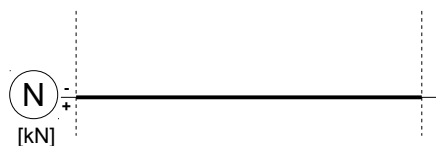


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

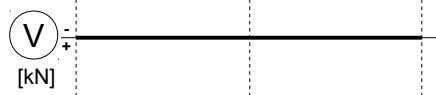
Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

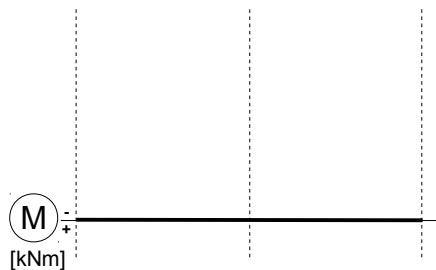
Mi történik a szakaszok között?

Hol lesz vízszintes az érintő?

$$V_3 =$$

$$V_2 =$$

$$V_1 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

Melyik irányból domborúak az egyes szakaszok?

Hogyan változik az érintő a szakaszok mentén?

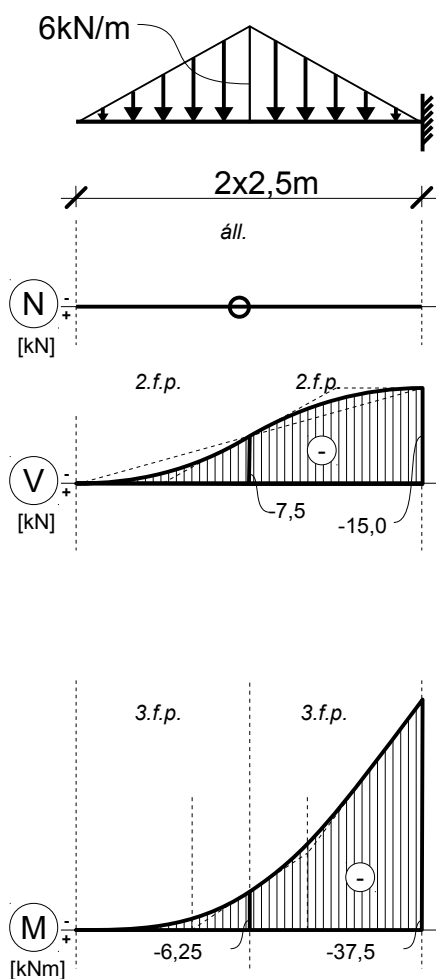
$$M_3 =$$

$$M_2 =$$

$$M_1 =$$

Mintapélda – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

*Megoldás*

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most balról számolunk.



A normálerő vízszintes hatások miatt változhatna, a hossz mentén nincs ilyen, így az ábra konstans lesz, értéke: $N_1 = 0$ kN.

A nyíróerőábra két másodfokú parabola. A végértékek:

$$V_1 = 0 \text{ kN}, \quad V_2 = -\frac{6 \cdot 2,5}{2} = -7,5 \text{ kN},$$

$$V_3 = -7,5 - \frac{6 \cdot 2,5}{2} = -15 \text{ kN.}$$

A két parabola közös érintővel kapcsolódik, míg a teher zérusértékeinél az ábra érintője vízszintes. A végponti érintők a szakaszok közepén metszik egymást.

A nyomatéki ábra két harmadfokú parabolából áll. Mindkét parabola alulról domború, a végponti értékek:

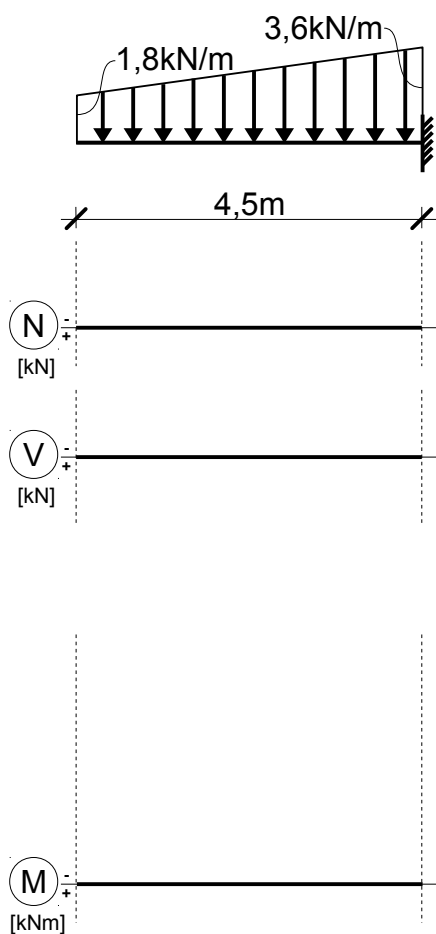
$$M_1 = 0 \text{ kNm}, \quad M_2 = -\frac{6 \cdot 2,5}{2} \cdot \frac{2,5}{3} = -6,25 \text{ kNm},$$

$$M_3 = -\frac{6 \cdot 2,5}{2} \cdot \left(2,5 + \frac{2,5}{3}\right) - \frac{6 \cdot 2,5}{2} \cdot 2 \cdot \frac{2,5}{3} = -37,5 \text{ kNm},$$

A bal oldali végen a nyíróerő miatt vízszintes az érintő, e szakaszon a másik végponti érintő a háromszög-teher súlypontjában metszi a vízszintest. Ez az egyenes egyben a jobb oldali szakasz bal oldali végponti érintője is, melyet éppen a jobb oldali háromszög súlypontja alatt metsz a jobb oldali végponti érintő.

Gyakorló példa – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

Pozitív igbv. def.:

Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Hogyan változik az ábra meredeksége?

Van-e ismert érintő?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Hogyan változik az ábra meredeksége?

Van-e ismert érintő?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

Hol metszik egymást a végponti érintők?

$$R_1 = \quad x_{R1} =$$

$$R_2 = \quad x_{R2} =$$

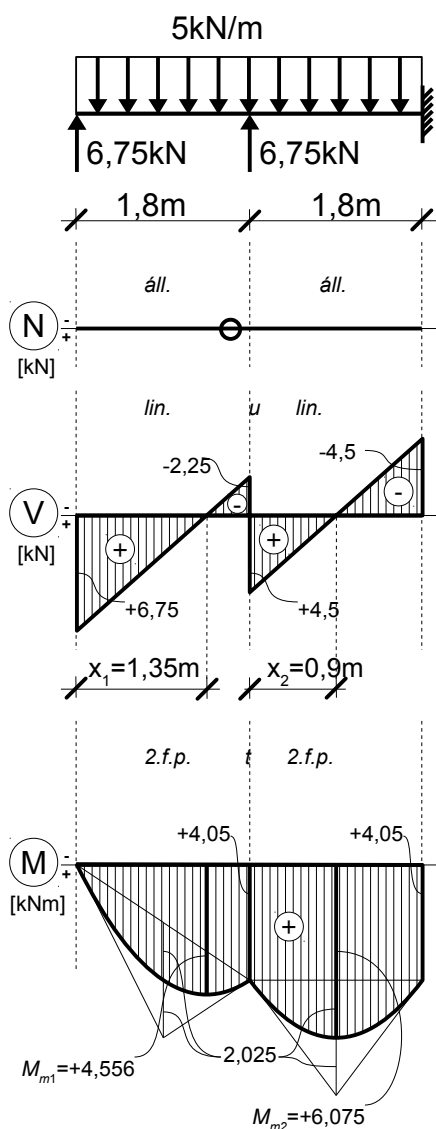
$$R =$$

$$R_1 x_{R1} + R_2 x_{R2} = R x_R$$

$$x_R =$$

Mintapélda – 7

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Mivel konzol, ezért nem számolunk reakciókat. Az igénybevételek számítása során a szabad végtől haladunk a befogásig és mindig kívülről, most balról számolunk.



A normálerő vízszintes hatások miatt változhatna, a hossz mentén nincs ilyen, így az ábra konstans lesz, értéke: $N_1 = 0 \text{ kN}$.

A nyíróerőábra két (párhuzamos) lineáris szakasz, amik között egy ugrás van. Az értékek a szakaszok végein: $V_1 = +6,75 \text{ kN}$, $V_2 = +6,75 - 5 \cdot 1,8 = -2,25 \text{ kN}$, $V_3 = -2,25 + 6,75 = +4,5 \text{ kN}$, $V_4 = +6,75 - 5 \cdot 3,6 + 6,75 = -4,5 \text{ kN}$.

Két zérushely van:

$$V_{m1} = +6,75 - 5 \cdot x_1 = 0 \rightarrow x_1 = 1,35 \text{ m}$$

$$V_{m2} = +4,5 - 5 \cdot x_2 = 0 \rightarrow x_2 = 0,9 \text{ m}$$

A nyomatéki ábra két parabolából áll, köztük törés van. A szakaszok végpontjaiban a nyomatékok: $M_1 = 0 \text{ kNm}$, $M_2 = +6,75 \cdot 1,8 - (5 \cdot 1,8) \cdot 0,9 = +4,05 \text{ kNm}$, $M_3 = +6,75 \cdot 3,6 - (5 \cdot 3,6) \cdot 1,8 + 6,75 \cdot 1,8 = +4,05 \text{ kNm}$.

A parabolák belógása: $\frac{5 \cdot 1,8^2}{8} = 2,025 \text{ kNm}$ (mindkettő)

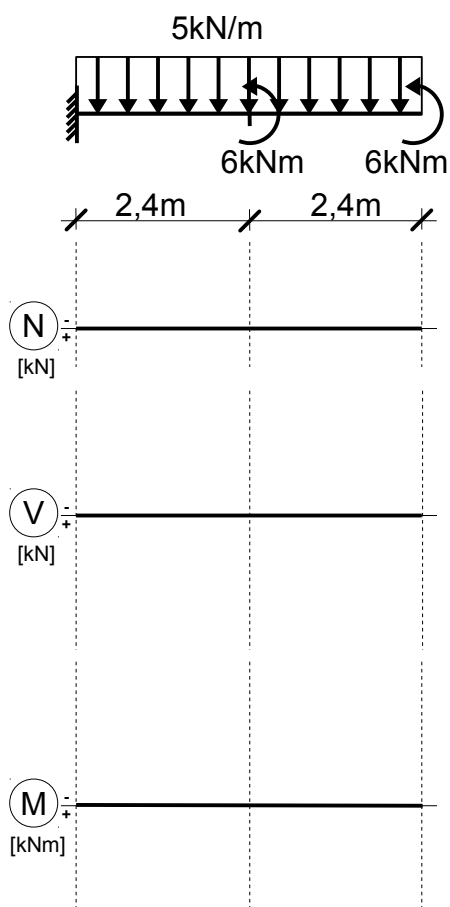
A maximumok értékei:

$$M_{m1} = +6,75 \cdot 1,35 - (5 \cdot 1,35) \cdot \frac{1,35}{2} = +4,556 \text{ kNm}$$

$$M_{m2} = +6,75 \cdot 2,7 - (5 \cdot 2,7) \cdot \frac{2,7}{2} + 6,75 \cdot 0,9 = +6,075 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa – 7

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

Pozitív igbv. def.:

Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_2 =$$

$$V_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_4 =$$

$$M_3 =$$

$$M_2 =$$

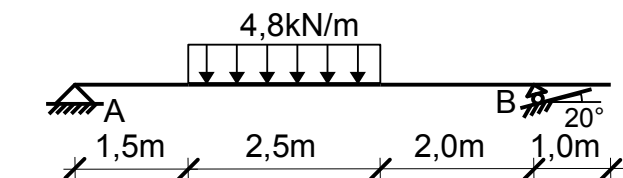
$$M_1 =$$

parabolák: $\frac{ql^2}{8} = \text{---} =$

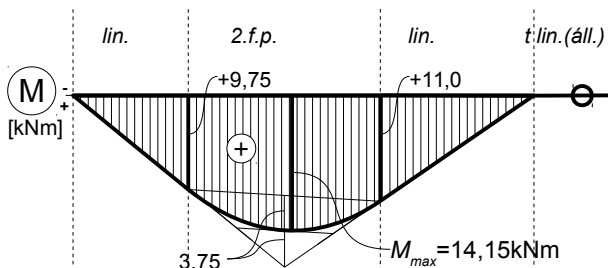
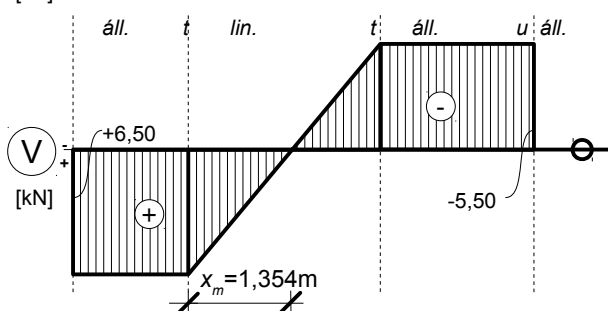
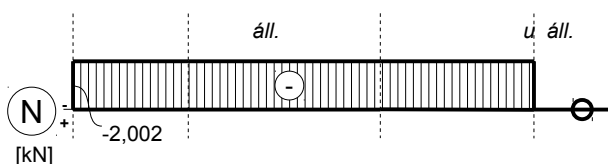
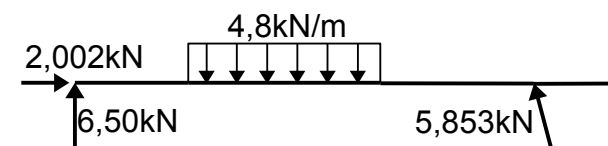
Igénybevételi ábrák kéttámaszú tartón

Mintapélda – 1

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -(4,8 \cdot 2,5) \cdot 2,75 + B \cos 20^\circ \cdot 6,0 = 0$$

$$\rightarrow B = 5,853 \text{ kN} (\nearrow)$$

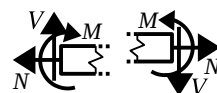
$$\sum M_i^{(B)}: (4,8 \cdot 2,5) \cdot 3,25 - A_z \cdot 6,0 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 6,50 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x - 5,853 \sin 20^\circ = 0 \rightarrow A_x = 2,002 \text{ kN} (\rightarrow)$$

Ell.:

$$\sum F_{iz}: 4,8 \cdot 2,5 - 5,853 \cdot \cos 20^\circ - 6,5 = -2 \cdot 10^{-5} \approx 0$$



A vízszintes normálerőre csak az A_x és a B vízszintes vetülete van hatással, az ábra két állandó szakaszból áll:

$$N_1 = -2,002 \text{ kN}, \quad N_2 = 0 \text{ kN}$$

A megoszló erő alatt lineárisan változik a nyíróerő, a B erő alatt pedig ugrás van az ábrán. A maradék három szakasz konstans. $V_3 = 0 \text{ kN}$, $V_2 = -5,853 \cos 20^\circ = -5,50 \text{ kN}$, $V_1 = -5,50 + 4,8 \cdot 2,5 = +6,50 \text{ kN}$

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$$V_m = +6,50 - 4,8 \cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = 1,354 \text{ m}$$

A nyomatéki ábra egy lineáris, egy másodfokú, és két lineáris szakaszból áll. A konzolon a 0 nyíróerő miatt konstans. (Sőt, itt most ez a konstans 0.) A hajlítónyomaték értéke a szakaszhatárokon: $M_4 = 0 \text{ kNm}$, $M_3 = +5,853 \cos 20^\circ \cdot 2,0 = +11,00 \text{ kNm}$, $M_2 = +6,5 \cdot 1,5 = +9,75 \text{ kNm}$, $M_1 = 0 \text{ kNm}$

$$\text{A parabola belógása: } \frac{4,8 \cdot 2,5^2}{8} = 3,75 \text{ kNm}$$

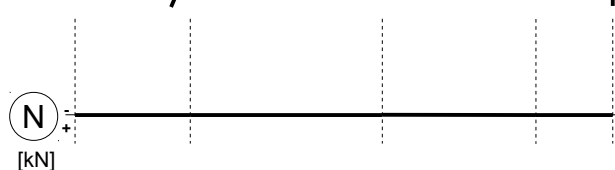
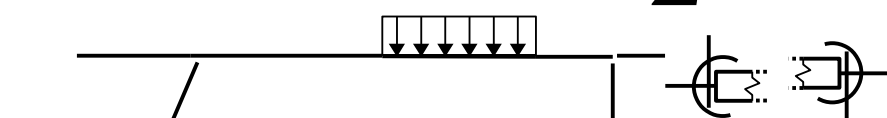
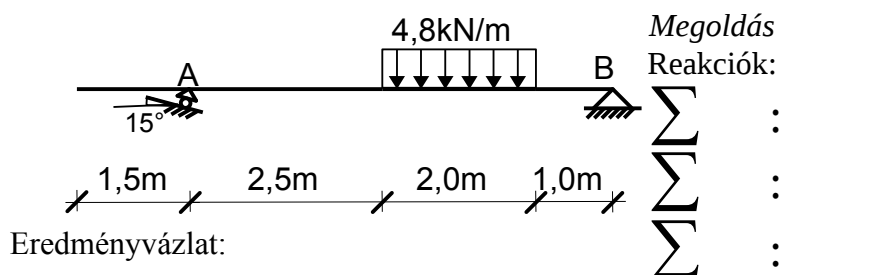
A maximum értéke:

$$M_{max} = +6,5 \cdot 2,854 - (4,8 \cdot 1,354) \frac{1,352}{2} = +14,15 \text{ kNm}$$

Vegyük észre, hogy a terheletlen konzol minden igénybevétele zérus.

Gyakorló példa - 1

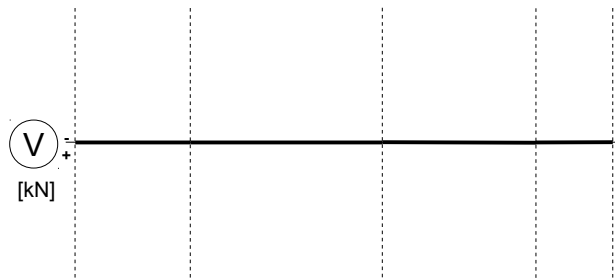
Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Milyen szakaszokból áll a normál erő ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$



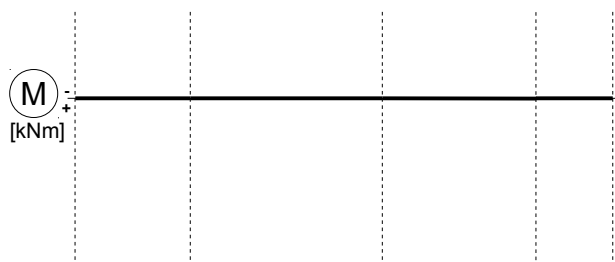
Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomaték ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

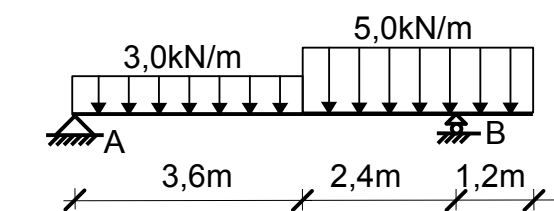
$$M_4 =$$

$$\text{parabola: } \frac{ql^2}{8} = \text{---} =$$

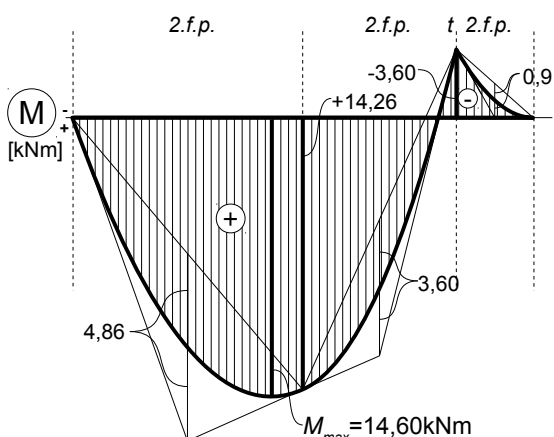
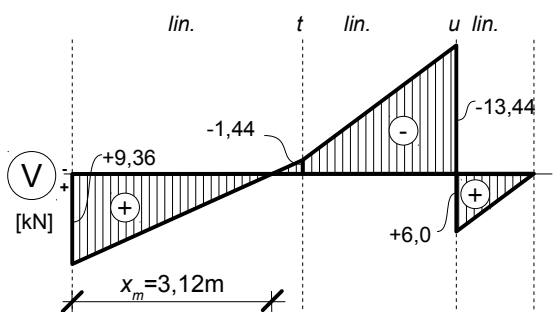
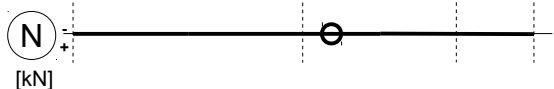
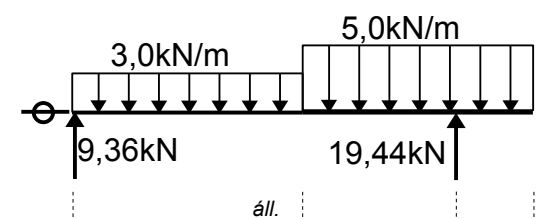
$$\text{maximum: } M_{\max} =$$

Mintapéllda – 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Eredők: $R_1 = 3,0 \cdot 3,6 = 10,8 \text{ kN}$, $R_2 = 5,0 \cdot 3,6 = 18 \text{ kN}$

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -10,8 \cdot 1,8 - 18 \cdot 5,4 + B \cdot 6,0 = 0$$

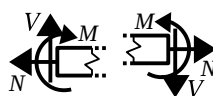
$$\rightarrow B = 19,44 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: 10,8 \cdot 4,2 + 18 \cdot 0,6 - A_z \cdot 6,0 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 9,36 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 3,0 \cdot 3,6 + 5,0 \cdot 3,6 - 9,36 - 19,44 = 0$$



Vízszintes erők híján a vízszintes tartón sehol sincs normálerő.

A nyíróerőábra három lineáris szakaszból áll, az első és a második határán törés, a második és a harmadik határán ugrás van, utóbbi két szakasz egymással párhuzamos, az első szakasz e kettőnél laposabb. Értékek a szakaszhatárokon:

$$V_5 = 0 \text{ kN}, V_4 = +5,0 \cdot 1,2 = 6,0 \text{ kN}$$

$$V_3 = +5,0 \cdot 1,2 - 19,44 = -13,44 \text{ kN}$$

$$V_2 = +5,0 \cdot 3,2 - 19,44 = -1,44 \text{ kN}, V_1 = +9,36 \text{ kN}$$

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$$V_m = +9,36 - 3,0 \cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = 3,12 \text{ m}$$

A nyomatéki ábra három másodfokú szakaszból áll, az első kettő érintőlegesen csatlakozik, a második és a harmadik között törés van. Értékek a szakaszhatárokon: $M_4 = 0 \text{ kNm}$,

$$M_3 = -\frac{5 \cdot 1,2^2}{2} = -3,6 \text{ kNm}, M_1 = 0 \text{ kNm}$$

$$M_2 = 9,36 \cdot 3,6 - 10,8 \cdot 1,8 = +14,26 \text{ kNm}.$$

$$\text{Parabolák: } \frac{3,0 \cdot 3,6^2}{8} = 4,86 \text{ kNm},$$

$$\frac{5,0 \cdot 2,4^2}{8} = 3,60 \text{ kNm}, \frac{5,0 \cdot 1,2^2}{8} = 0,9 \text{ kNm}$$

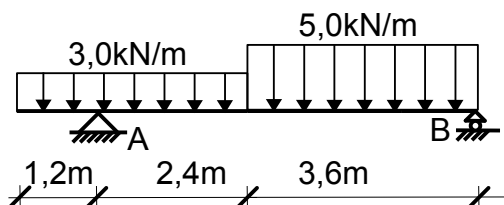
A maximum értéke:

$$M_{\max} = +9,36 \cdot 3,12 - (3,0 \cdot 3,12) \frac{3,12}{2} = +14,60 \text{ kNm}$$

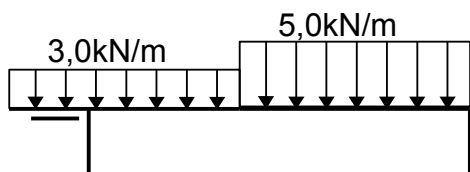
Megjegyzés: a nyomatéki maximum számításakor a zárójelben levő szorzat értéke a 3,12 m számítási módjából adódóan 9,36, így a nyomaték most számítható lenne $+9,36 \cdot 3,12/2$ alakban is.

Gyakorló példa - 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



N
[kN]

V
[kN]

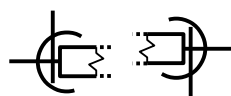
M
[kNm]

Megoldás

Részeredők:

Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum &: \\ \sum &: \\ \sum &: \end{aligned}$$



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$V_4 =$$

$$V_5 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

$$M_4 =$$

A maximum értéke:

$$M_{max} =$$

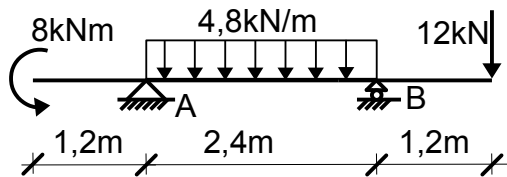
$$\text{parabolák: } \frac{ql^2}{8} = \quad =$$

$$\quad =$$

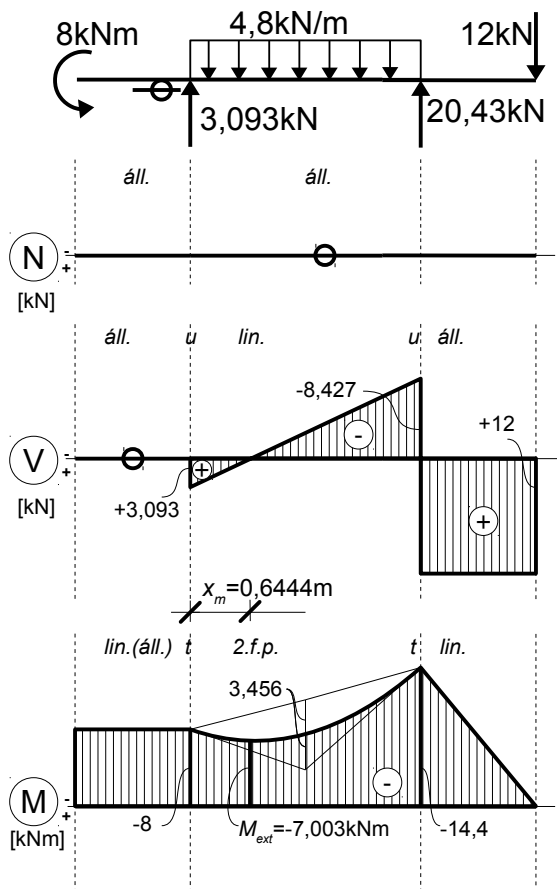
$$\quad =$$

Mintapélda – 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: 8 - (4,8 \cdot 2,4) \cdot 1,2 - 12 \cdot 3,6 + B \cdot 2,4 = 0$$

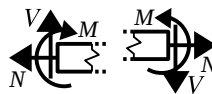
$$\rightarrow B = 20,43 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: 8 + (4,8 \cdot 2,4) \cdot 1,2 - 12 \cdot 1,2 - A_z \cdot 2,4 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 3,093 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 4,8 \cdot 2,4 + 12 - 3,093 - 20,43 = -0,003 \approx 0$$



Normálerő vízszintes komponensű hatásokból keletkezne, mivel minden erő függőleges, az ábra értéke állandó és zérus.

A nyíróerőábra egy konstans, egy lineáris és egy konstans szakaszból áll, a szakaszhatárokon ugrás van. Az értékek (először a konzolokon!):

$$V_1 = 0 \text{ kN}, V_4 = +12 \text{ kN}, V_2 = +3,093 \text{ kN},$$

$$V_3 = +3,093 - 4,8 \cdot 2,4 = -8,427 \text{ kN}.$$

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$$V_m = +3,093 - 4,8 \cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = 0,6444 \text{ m}$$

A nyomatéki ábra a teher szerint lineáris, másodfokú, lineáris szakaszból áll, köztük törés van. A zérus nyíróerő miatt az első szakasz konstans.

Értékek a szakaszhatárokon: $M_1 = -8 \text{ kNm}$,

$$M_2 = -12 \cdot 1,2 = -14,4 \text{ kNm}, M_3 = 0 \text{ kNm}.$$

$$\text{A parabola belógása: } \frac{4,8 \cdot 2,4^2}{8} = 3,456 \text{ kNm}$$

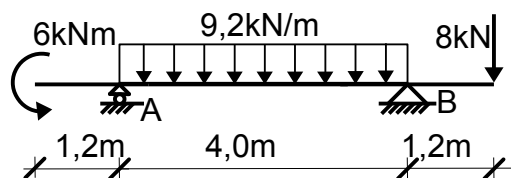
A lokális szélsőérték:

$$M_{ext} = -8 + 3,093 \cdot 0,6444 - (4,8 \cdot 0,6444) \frac{0,6444}{2} = -7,003 \text{ kNm}$$

Megjegyzés: A nyomatéki ábra megrajzolásához csak a lokális szélsőértékhez volt szükségünk a reakciókra. Az így kapott M -ábra alapján a nyíróerőábrát is meg lehetne határozni: a konzolok konzolként rajzolhatók, a nyomatéki ábrán a végponti érintők metszéspontja $(-8 - 14,4)/2 + 2 \cdot 3,456 = -4,288 \text{ kNm}$. A végponti érintők meredeksége (azaz a nyíróerő) pedig: $\left| \frac{-8 - (-4,288)}{1,2} \right| = 3,093$ és $\left| \frac{-14,4 - (-4,288)}{1,2} \right| = 8,427$ (az előjelet szemléletből, az érintő dőlésének irányából dönthetjük el).

Gyakorló példa - 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

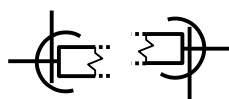
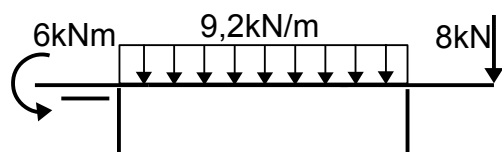


Megoldás

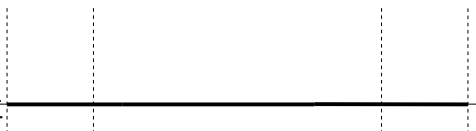
Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum & : \\ \sum & : \\ \sum & : \\ \sum & : \end{aligned}$$

Eredményvázlat:



(N)
[kN]

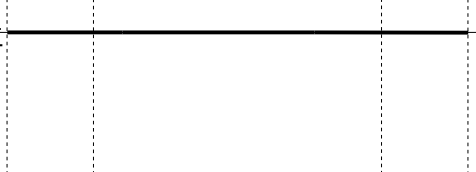


Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

(V)
[kN]



Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_4 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$

(M)
[kNm]



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_3 =$$

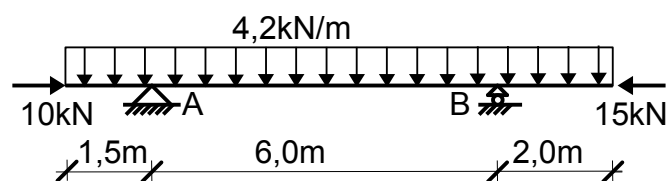
$$M_2 =$$

$$\text{parabola: } \frac{ql^2}{8} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

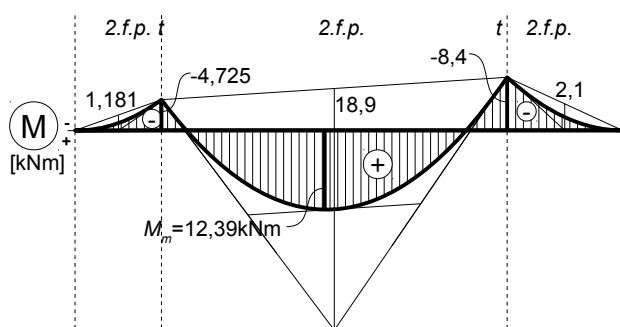
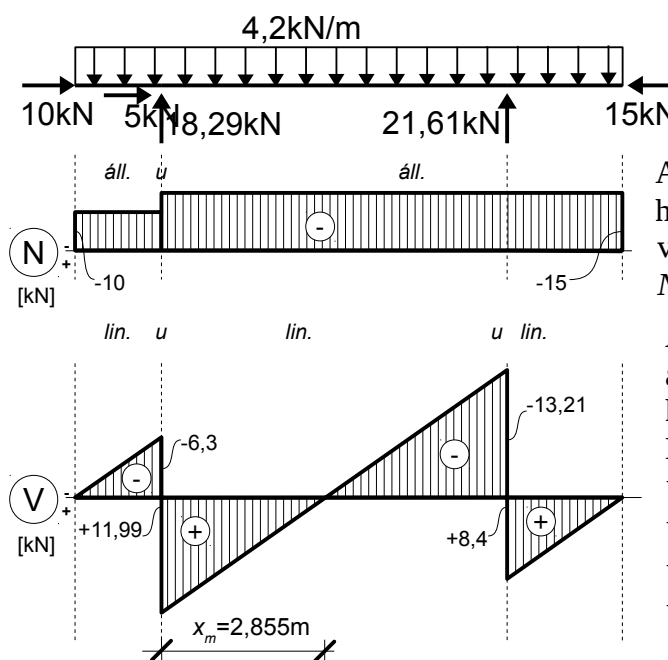
$$\text{szélsőérték: } M_{\underline{\hspace{1cm}}} =$$

Mintapélda – 4

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -(4,2 \cdot 9,5) \cdot 3,25 + B \cdot 6,0 = 0$$

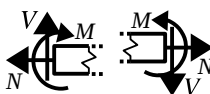
$$\rightarrow B = 21,61 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: (4,2 \cdot 9,5) \cdot 2,75 - A_z \cdot 6,0 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 18,29 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: 10 + A_x - 15 = 0 \rightarrow A_x = 5 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 4,2 \cdot 9,5 - 18,29 - 21,61 = 0$$



A normálerőre egy 1,5 és egy 8,0 méter hosszú konstans szakaszból áll, köztük ugrás van. Az értékek (konzolokon kívülről): $N_1 = -10 \text{ kN}$, $N_2 = -15 \text{ kN}$.

A nyíróerőre három lineáris szakaszból áll. A három szakasz egymással párhuzamos, köztük a reakcióknak megfelelő ugrás van. Értékek a szakaszhatárokon: $V_1 = 0 \text{ kN}$, $V_2 = -4,2 \cdot 1,5 = -6,3 \text{ kN}$, $V_6 = 0 \text{ kN}$, $V_5 = +4,2 \cdot 2,0 = +8,4 \text{ kN}$, $V_4 = +8,4 - 21,61 = -13,21 \text{ kN}$, $V_3 = -13,21 + 4,2 \cdot 6,0 = +11,99 \text{ kN}$.

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$$V_m = +11,99 - 4,2 \cdot x_m = 0$$

$$\rightarrow x_m = 2,855 \text{ m}$$

A nyomatéki ábra három parabolából áll, köztük egy-egy törés van. Értékek a szakaszhatárokon: $M_1 = 0 \text{ kNm}$, $M_4 = 0 \text{ kNm}$,

$$M_2 = -(4,2 \cdot 1,5) \cdot \frac{1,5}{2} = -4,725 \text{ kNm},$$

$$M_3 = -(4,2 \cdot 2,0) \cdot \frac{2,0}{2} = -8,4 \text{ kNm}.$$

$$\text{parabolák: } \frac{4,2 \cdot 1,5^2}{8} = 1,181 \text{ kNm},$$

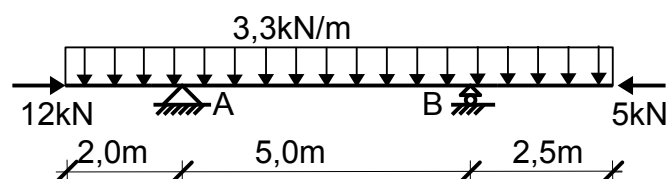
$$\frac{4,2 \cdot 2,0^2}{8} = 2,1 \text{ kNm}, \quad \frac{4,2 \cdot 6,0^2}{8} = 18,9 \text{ kNm}$$

A maximum értéke:

$$M_{\max} = +18,29 \cdot 2,855 - (4,2 \cdot 4,355) \frac{4,355}{2} = +12,39 \text{ kNm}$$

Gyakorló példa - 4

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

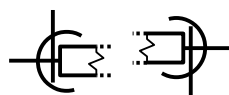
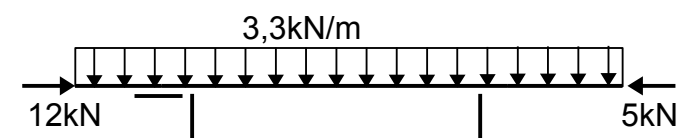


Megoldás

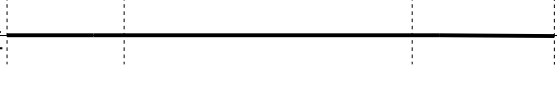
Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum &: \\ \sum &: \\ \sum &: \end{aligned}$$

Eredményvázlat:



N
[kN]



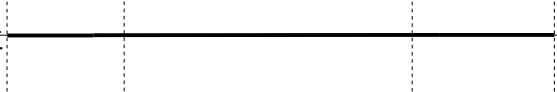
Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$

V
[kN]



Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_6 =$$

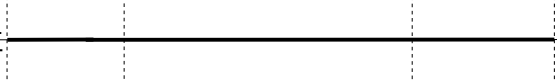
$$V_5 =$$

$$V_3 =$$

$$V_4 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$

M
[kNm]



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 = \quad M_4 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

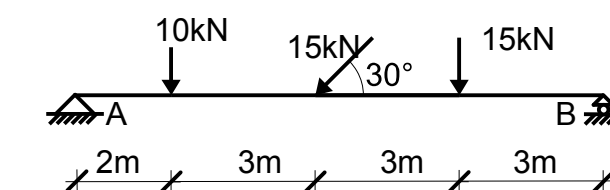
$$\text{parabolák: } \frac{ql^2}{8} = \quad =$$

$$\quad = \quad =$$

$$\text{maximum: } M_{max} =$$

Mintapéllda – 5

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -10 \cdot 2 - 15 \sin 30^\circ \cdot 5 - 15 \cdot 8 + B \cdot 11 = 0$$

$$\rightarrow B = 16,14 \text{ kN} (\uparrow)$$

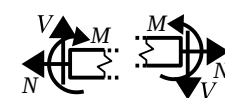
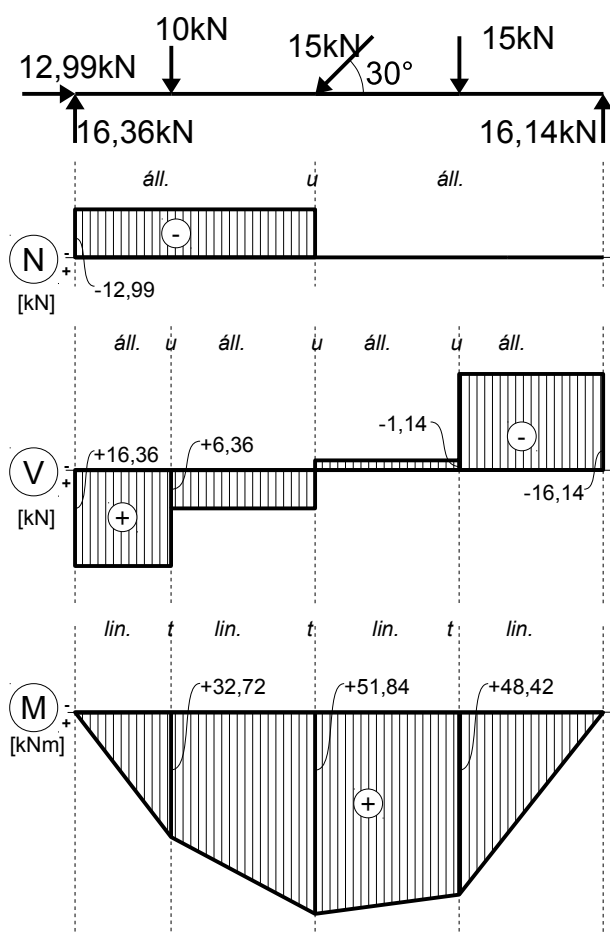
$$\sum M_i^{(B)}: 10 \cdot 9 + 15 \sin 30^\circ \cdot 6 + 15 \cdot 3 - A_z \cdot 11 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 16,36 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x - 15 \cos 30^\circ = 0 \rightarrow A_x = 12,99 \text{ kN} (\rightarrow)$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 10 + 15 \sin 30^\circ + 15 - 16,36 - 16,14 = 0$$

Eredményvázlat



A normálerőábra két konstans szakaszból áll, közöttük a ferde erő vízszintes vetületének megfelelő ugrás van. Az értékek:

$$N_1 = -12,99 \text{ kN}, N_2 = 0 \text{ kN}.$$

A nyíróerőábra négy konstans szakaszból áll, közöttük a függőleges erőkomponenseknek megfelelő ugrások vannak. Az értékek:

$$V_1 = +16,36 \text{ kN}, V_2 = +16,36 - 10 = +6,36 \text{ kN},$$

$$V_3 = +6,36 - 15 \sin 30^\circ = -1,14 \text{ kN},$$

$$V_4 = -16,14 \text{ kN}.$$

A nyomatéki ábra négy lineáris szakaszból áll, közöttük törés van. Értékek a szakaszhatárokon:

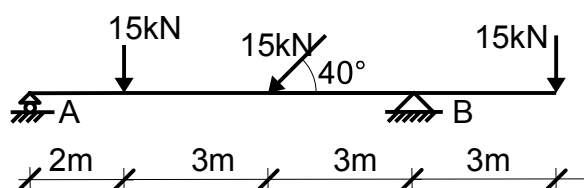
$$M_1 = 0 \text{ kNm}, M_2 = +16,36 \cdot 2 = +32,72 \text{ kNm},$$

$$M_3 = +16,36 \cdot 5 - 10 \cdot 3 = +51,84 \text{ kNm},$$

$$M_4 = +16,14 \cdot 3 = +48,42 \text{ kNm}, M_5 = 0 \text{ kNm}.$$

Gyakorló példa - 5

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

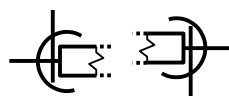
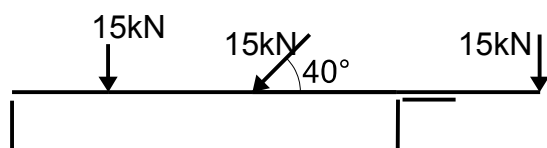


Megoldás

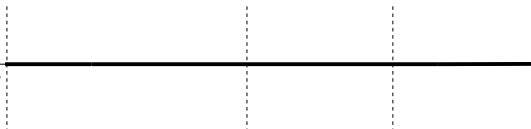
Reakciók:

$$\begin{array}{l} \sum \\ \sum \\ \sum \\ \sum \end{array} \quad \begin{array}{l} : \\ : \\ : \\ : \end{array}$$

Eredményvázlat:



N
[kN]



Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

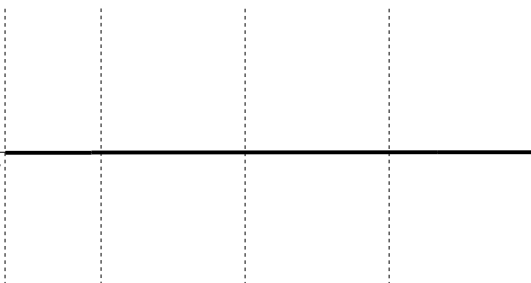
Mi történik a szakaszok között?

$$N_3 =$$

$$N_1 =$$

$$N_2 =$$

V
[kN]



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

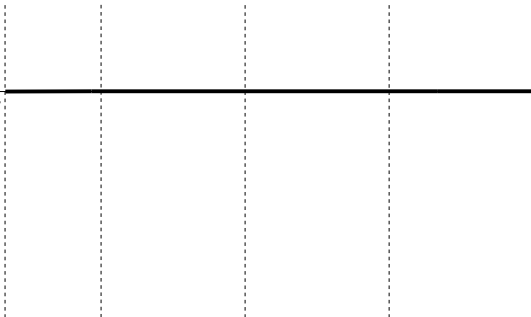
$$V_4 =$$

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

M
[kNm]



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra? Mi történik a szakaszok között?

$$M_5 =$$

$$M_4 =$$

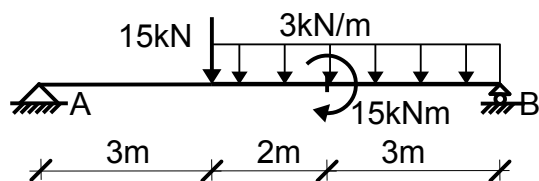
$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

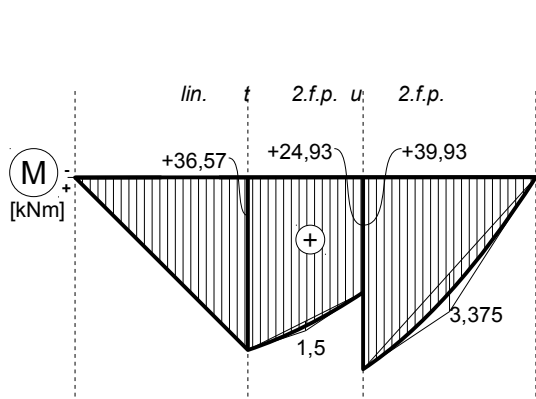
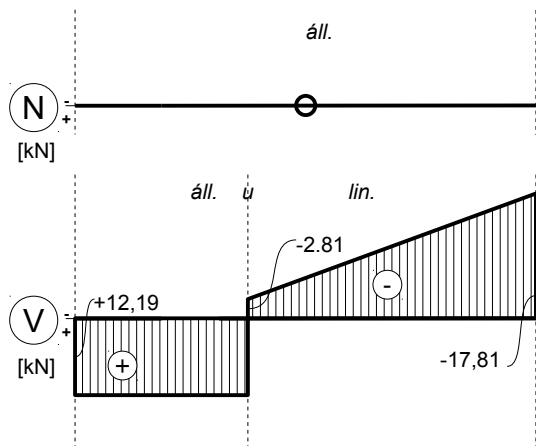
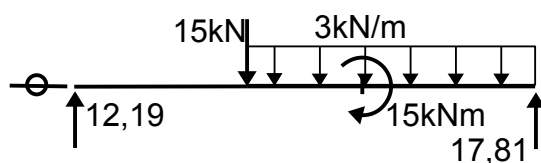
$$M_3 =$$

Mintapélda – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$$\sum M_i^{(A)}: -15 \cdot 2 - 3 \cdot 5 \cdot 5,5 - 15 + B \cdot 8 = 0$$

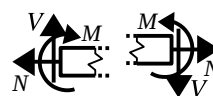
$$\rightarrow B = 17,81 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}: 15 \cdot 5 + 3 \cdot 5 \cdot 2,5 - 15 - A_z \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow A_z = 12,19 \text{ kN}(\uparrow)$$

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{Ell.: } \sum F_{iz}: 15 + 3 \cdot 5 - 12,19 - 17,81 = 0$$



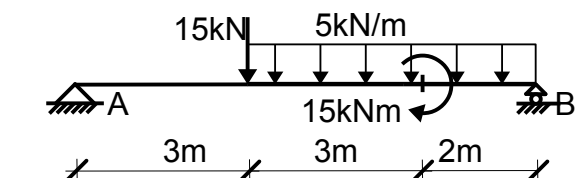
Normálerő csak vízszintes vetületű hatásból keletkezhetne. Nincs ilyen, így az ábra értéke mindenhol zérus.

A nyíróerőábra egy konstans és egy lineáris szakaszból áll, köztük az erőnek megfelelő ugrás van. Értékek: $V_1 = +12,19 \text{ kN}$, $V_2 = +12,19 - 15 = -2,81 \text{ kN}$, $V_3 = -17,81 \text{ kN}$.

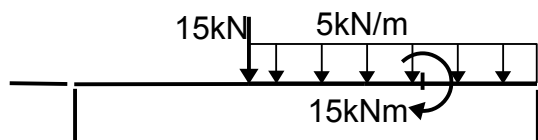
A nyomatéki ábra egy lineáris és két másodfokú szakaszból áll. A lineáris szakasz és a parabola között törés van, a két parabola között ugrás (de az érintők párhuzamosak). Értékek: $M_1 = 0 \text{ kNm}$, $M_2 = +12,19 \cdot 3 = +36,57 \text{ kNm}$, $M_5 = 0 \text{ kNm}$, $M_4 = 17,81 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 = +39,93 \text{ kNm}$, $M_3 = 17,81 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 1,5 - 15 = +24,93 \text{ kNm}$,
parabolák: $\frac{3 \cdot 2^2}{8} = 1,5 \text{ kNm}$, $\frac{3 \cdot 3^2}{8} = 3,375 \text{ kNm}$

Gyakorló példa – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



N
[kN]

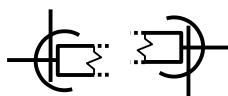
V
[kN]

M
[kNm]

Megoldás

Reakciók:

$$\begin{aligned} \sum &: \\ \sum &: \\ \sum &: \end{aligned}$$



Milyen szakaszokból áll a normálerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$N_1 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerő ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$\text{zérushely: } V_m = 0 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$

$$\text{parabolák: } \frac{ql^2}{8} = \underline{\hspace{2cm}} =$$

$$\underline{\hspace{2cm}} =$$

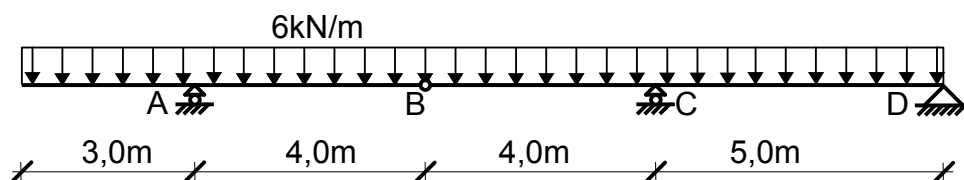
$$\text{maximum: } M_{max} =$$

Igénybevételi ábrák összetett tartón

Az igénybevételi ábrák esetén is megismételhetjük az egyes keresztmetszetek igénybevételeinek számításakor tett megállapításokat. Összetett szerkezet esetén az igénybevételek számításához még több lehetőségünk van, mint egyszerű tartók esetén volt. Ennek oka, hogy az egész szerkezet egyensúlya mellett annak bármely része is egyensúlyban kell, hogy legyen, ezért bármely a keresztmetszetet tartalmazó szerkezeti résszel is számolhatunk, ha a rá ható belső reakciókat is figyelembe vesszük. Ezen felül minden ilyen rész vagy egész esetén számolhatunk "jobbról" vagy "balról", azaz legalább négy módon tudjuk bármely keresztmetszet igénybevételeit számítani. A gyakorlatban viszont továbbra is igaz, hogy elég egyetlen módon számolni, ezért az első lépés később mindig az lesz, hogy erre a lehető legegyszerűbb módszert találjuk meg.

Mintapélda – 1

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók számítása: bef. $\sum F_{ix} : B_x = 0 \text{ kN}$, fix. $\sum F_{ix} : D_x = 0 \text{ kN}$

$$\text{bef. } \sum M_i^{(B)} : 6 \cdot 7,0 \cdot 3,5 - A \cdot 4,0 = 0 \rightarrow A = 36,75 \text{ kN} (\uparrow)$$

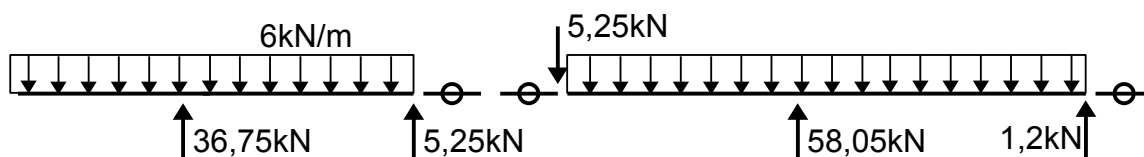
$$\text{bef. } \sum M_i^{(A)} : -6 \cdot 7,0 \cdot 0,5 + B_z \cdot 4,0 = 0 \rightarrow B_z = 5,25 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\text{fix. } \sum M_i^{(D)} : 5,25 \cdot 9,0 + 6 \cdot 9,0 \cdot 4,5 - C \cdot 5,0 = 0 \rightarrow C = 58,05 \text{ kN} (\uparrow)$$

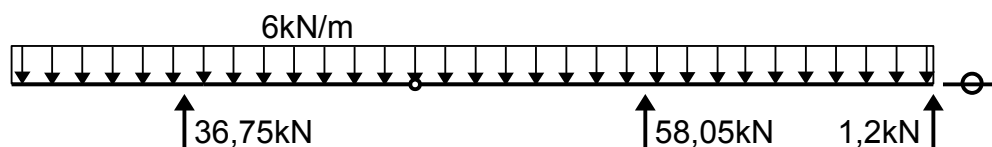
$$\text{fix. } \sum M_i^{(C)} : 5,25 \cdot 4,0 - 6 \cdot 9,0 \cdot 0,5 + D_z \cdot 5,0 = 0 \rightarrow D_z = 1,2 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\text{Ell.: szum } \sum F_{iz} : 6 \cdot 16 - 36,75 - 58,05 - 1,2 = 0$$

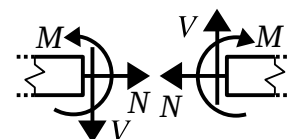
Eredményvázlat testenként:

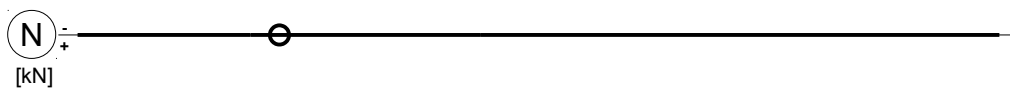


Ezen kívül felrajzoljuk a teljes szerkezetre ható összes külső erőt is:



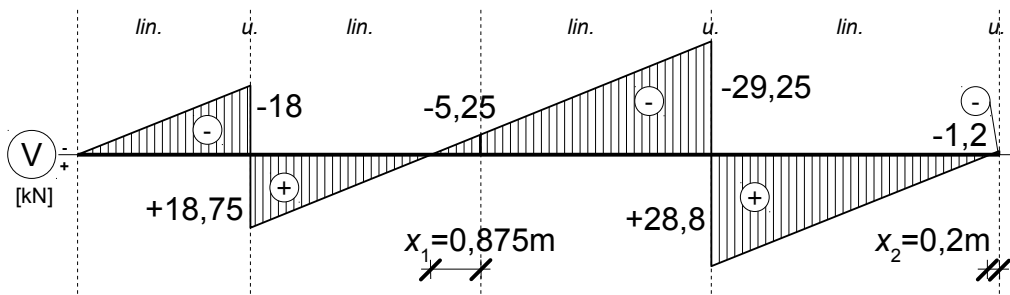
A számítás során mindkét irányból történik majd igénybevétel-számítás. Mivel csak függőleges erők működnek, ezért a vízszintes tengelyű tartó normálerőábrája végig zérus:





A nyíróerőábra az egész szerkezet eredményvázlata alapján három lineáris szakaszból áll, az A , C , D támaszok alatt ugrás van. Ezen kívül tájékoztatásképpen szokás még megadni a belső csuklónál fellépő nyíróerőt is, így hét értéket számítunk ki. Először a befüggesztett résszel, annak is a konzoljával dolgozunk: $V_1=0$ kN, $V_2=-6\cdot3,0=-18$ kN, $V_3=-6\cdot3,0+36,75=18,75$ kN, $V_4=-6\cdot7,0+36,75=-5,25$ kN. (Ezen utóbbi értéket a befüggesztett tartón jobbról számolva még könnyebben megkaphattuk volna.) A fix megtámasztású tartón a baloldali végen a már kiszámolt $V_4=-5,25$ kN a nyíróerő, ez legkönnyebben az egész szerkezet alapján látható be (hiszen ott nincs külső koncentrált erő). A három hátralevő értéket az elkülönített tartó alapján számolva: $V_5=-5,25-6\cdot4,0=-29,25$ kN, $V_6=-1,2+6\cdot5,0=+28,8$ kN, $V_7=-1,2$ kN (utóbbiak jobbról).

Az ábra két helyen vált előjelet, ezeknek a B és D ponttól balra mért távolságát keressük úgy, hogy e távolság függvényében felírjuk a nyíróerőt az elkülönített tartórészek alapján célszerűen jobbról: $V(x_1)=-5,25+6\cdot x_1=0 \rightarrow x_1=0,875$ m, $V(x_2)=-1,2+6\cdot x_2=0 \rightarrow x_2=0,2$ m.



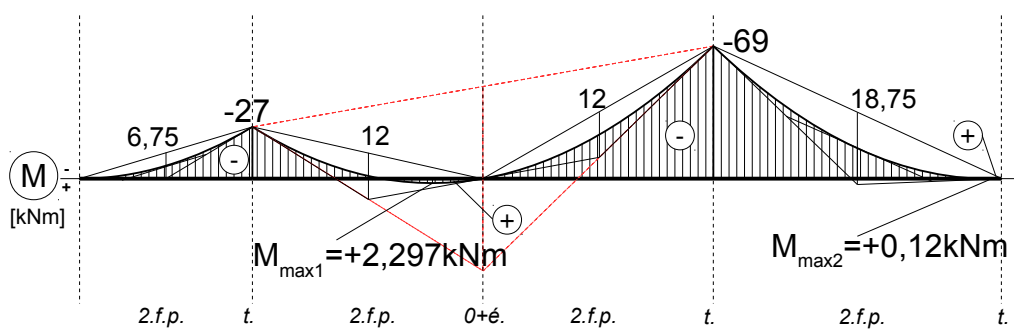
A hajlítónyomatéki ábra az egész szerkezet eredményvázlata alapján három másodfokú parabolából áll, az A , C , D támaszok alatt törés van. A B belső csuklónál az egész szerkezet alapján nem lehet az ábrában sem törés, sem ugrás, azaz érintőlegesen folytatódik az ábra, ráadásul az elkülönített tartórészek alapján a hajlítónyomaték nulla.

Ami biztos, hogy a számítást a befüggesztett rész konzoljával kezdjük: $M_1=0$ kNm, $M_2=-6\cdot3,0\cdot1,5=-27$ kNm, a parabola belógása: $\frac{6\cdot3,0^2}{8}=6,75$ kNm. A befüggesztett részre a parabola berajzolásához szükség van a B pontbeli hajlítónyomatékre, ami az elkülönített tartórészen jobbról $M_3=0$ kNm, míg a parabola belógása itt $\frac{6\cdot4,0^2}{8}=12$ kNm.

A fix megtámasztású rész konzoljával folytathatjuk. A B pontban kívülről itt is $M_3=0$ kNm adódik. A C támasz fölött az elkülönített rész alapján $M_4=-5,25\cdot4,0-6\cdot4,0\cdot2,0=-69$ kNm. A két pont között a parabola belógása $\frac{6\cdot4,0^2}{8}=12$ kNm. Végül a D fölött a tartó jobboldali végén a hajlítónyomaték jobbról $M_5=0$ kNm. A parabola belógása ezen a szakaszon $\frac{6\cdot5,0^2}{8}=18,75$ kNm.

A szélsőértékeket a nyíróerőábra zérushelyein számítjuk az elkülönített részek alapján jobbról:

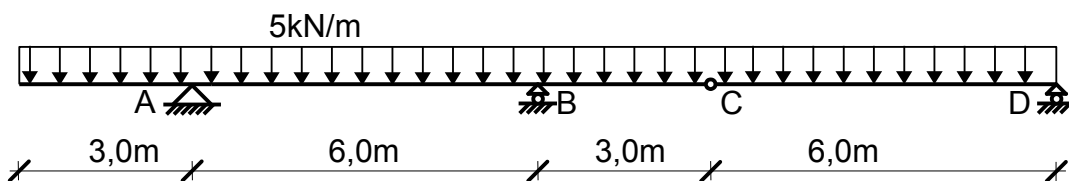
$$M_{1max}=+5,25\cdot0,875-6\cdot0,875\cdot\frac{0,875}{2}=+2,297$$
 kNm, $M_{2max}=+1,2\cdot0,2-6\cdot0,2\cdot\frac{0,2}{2}=+0,12$ kNm.



Megjegyzés: az egész tartóra ható külső erők alapján azt mondhatjuk, hogy az A és C támaszok között egyetlen megoszló erő működik, így ott a nyomatéki ábra egyetlen másodfokú parabola lesz. Ennek megrajzolásához a -27 és a -69 kNm-es értékek közé kell megrajzolni a parabolát. A belógás most $6 \cdot 8^2 / 8 = 48$ kNm, az ezzel a belógással kapott segédvonalakat piros szaggatott vonallal ábrázoltuk. Felhívjuk a figyelmet, hogy az így megrajzolt parabolának azonosnak kell lennie a két szakaszból megrajzolt ábrával, különösen igaz ez a belső csukló alatti hajlítónyomaték zérus értékére.

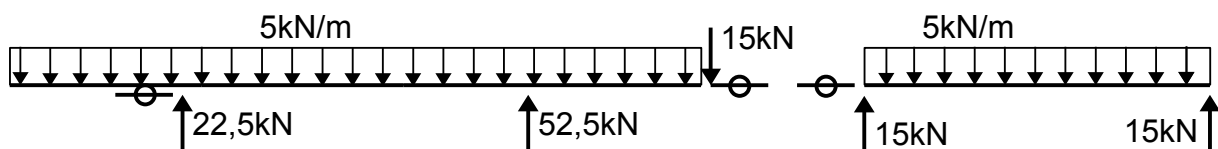
Gyakorló példa – 1

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

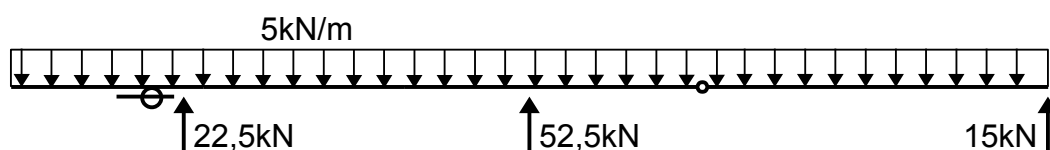


Megoldás

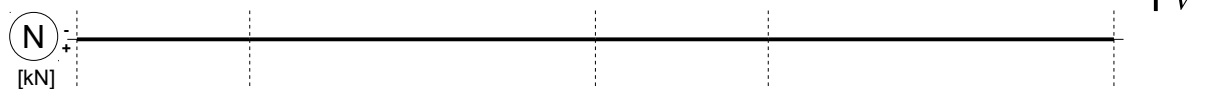
A külső és belső reakciók számításának eredménye testenként:



Az egész szerkezetre ható összes külső erő:



A vízszintes tengelyű tartón normálerő vízszintes erőkből származik, minden teher és minden reakció függőleges, így a normálerő ábra:



A nyíróerő ábra szakaszonként..... Az ábra megrajzolását a befüggesztett résszel kezdjük. Az elkülönítése alapján ez egy kéttámaszú tartó egyenletesen megoszló teherrel, az ábra megrajzolásához szükséges nyíróerők értékei:

$$V_6 =$$

$$V_7 =$$

A fix rész jobb oldali konzoljának külső végén a nyíróerő már ismert, a belső végén:

$$V_5 =$$

Az A és B támasz közötti szakasz végpontjaiban a nyíróerők:

$$V_4 =$$

$$V_3 =$$

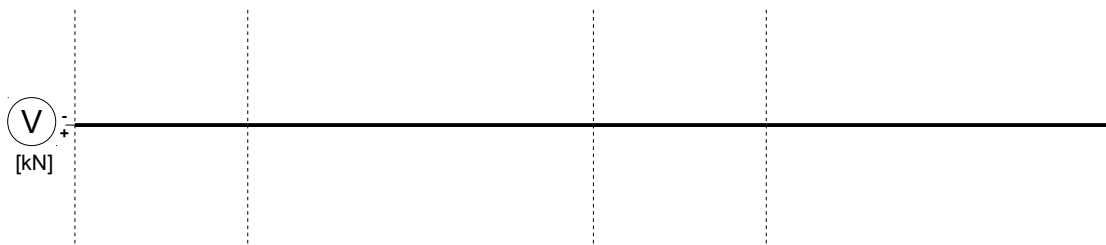
A bal oldali konzolt az eddigiektől függetlenül, balról számoljuk.

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

Ellenőrizzük, hogy az A támasz fölött az ugrás értéke a koncentrált erőnek megfelel-e?

Ellenőrizzük, hogy a nyíróerőábra meredeksége mindenhol azonos-e?



A zérushelyek a nyomatéki ábra lehetséges szélsőértékeinek helyei. Határozzuk meg ezeket:

$$V(x_1) =$$

$$\rightarrow x_1 =$$

$$V(x_2) =$$

$$\rightarrow x_2 =$$

A nyomatéki ábra szakaszonként..... Az ábra megrajzolását a befüggesztett tartórésszel kezdjük. Az elkülönítése alapján ez egy kéttámaszú tartó egyenletesen megoszló teherrel, az ábra megrajzolásához szükséges hajlítónyomatékok értékei:

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$

A két végpont közé kerülő parabola belógása: $\text{————} =$

A fix rész jobb oldali konzoljának külső végén a hajlítónyomaték már ismert, a belső végén:

$$M_3 =$$

A két végpont közé kerülő parabola belógása: $\text{————} =$

A bal oldali konzolt az eddigiektől függetlenül, balról számoljuk.

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

A két végpont közé kerülő parabola belógása: $\text{————} =$

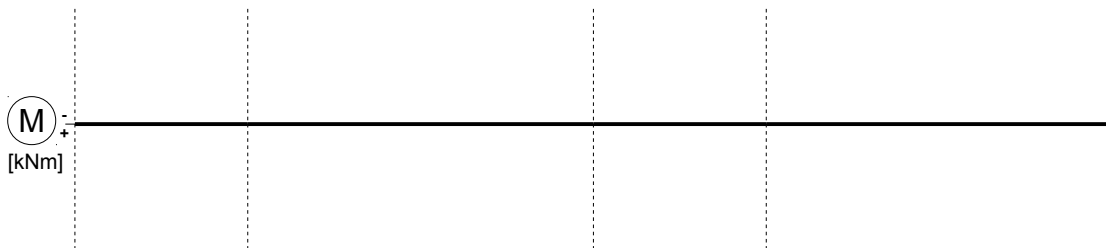
Az A és B támasz közötti szakasz végpontjaiban a nyomatékok már ismertek. A két végpont közé kerülő parabola belógása: $\text{---} =$

A két szélsőérték a kiszámított helyeken:

$$M_{1max} =$$

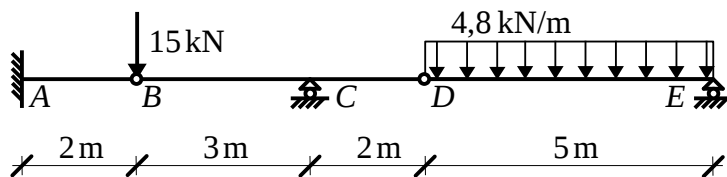
$$M_{2max} =$$

Ellenőrizzük, hogy a belső csuklónál a kapcsolódás érintőleges!



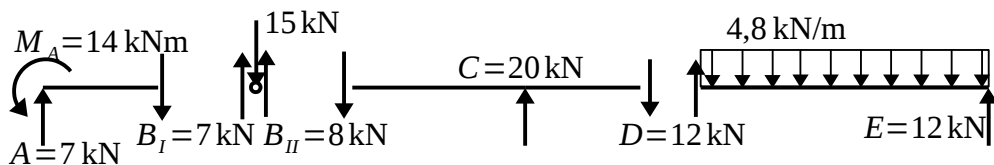
Mintapélda – 2

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

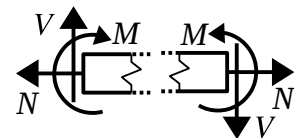
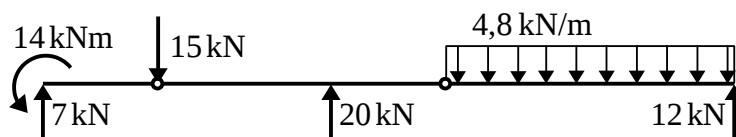


Megoldás

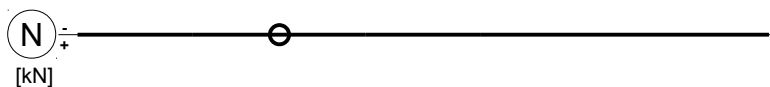
A reakciók számítása után az egyes elemekre ható külső és belső erők (a vízszintes reakciókomponensek most mindenhol nullák, ezért azokat nem rajzoltuk ki):



Az egész szerkezetre ható külső erők pedig:

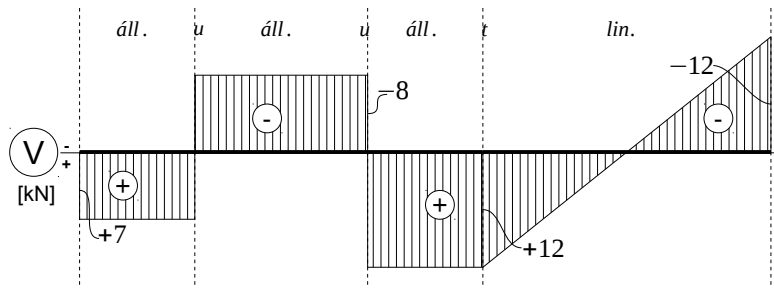


Normálerő csak vízszintes komponensű erőkől származhatna. Ilyen nincs, ezért:

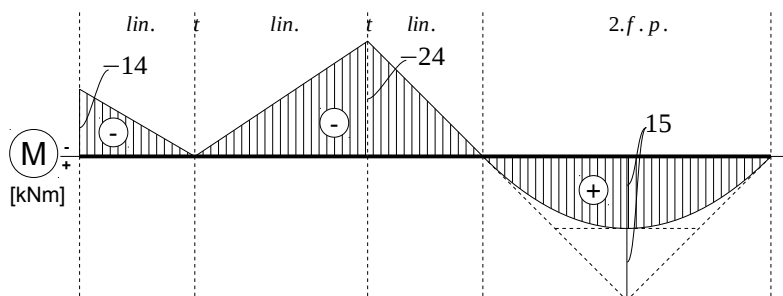


A nyíróerőábra három konstans és egy lineáris szakaszból áll. Az utolsóként befüggesztett

tartórészen a lineáris szakasz egy kéttámaszú tartónak megfelelő, a két végérték $V_4 = -12 \text{ kN}$ és $V_3 = +12 \text{ kN}$. A zérushely a befüggesztett tartórész közepén van. Az egész szerkezetre ható összes erő alapján V_3 egyben a C és D közötti konstans szakasz értéke is. A maradék két konstans szakaszon: $V_2 = 8 \text{ kN}$ és $V_1 = +7 \text{ kN}$.

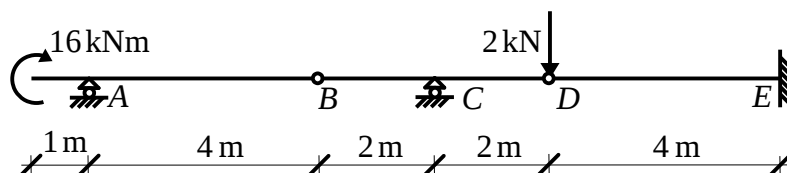


A nyomatéki ábra három lineáris szakaszból és egy másodfokú parabolából áll. A másodfokú parabola a befüggesztett részen a kéttámaszú tartónak felel meg, a végpontjaiban a nyomatékok $M_4 = M_5 = 0 \text{ kNm}$, a parabola belógása $4,8 \cdot 5^2 / 8 = 15 \text{ kNm}$, ez egyben a lokális szélsőérték is. A C és D közötti lineáris szakasz ugrás és törés nélkül (érintőlegesen) csatlakozik a parabolához, a támasz fölötti hajlítónyomaték $M_3 = -12 \cdot 2 = -24 \text{ kNm}$. A B és C közötti szakasz jobb oldali végén is ez a hajlítónyomaték, a B csuklónál pedig az elkülönített tartó alapján $M_2 = 0 \text{ kNm}$. A fixen megtámasztott tartórészen a B csuklónál az elkülönítés alapján ugyanez a nyomaték, a befogási keresztmetszeten pedig $M_1 = -7 \cdot 2 = -14 \text{ kNm}$.



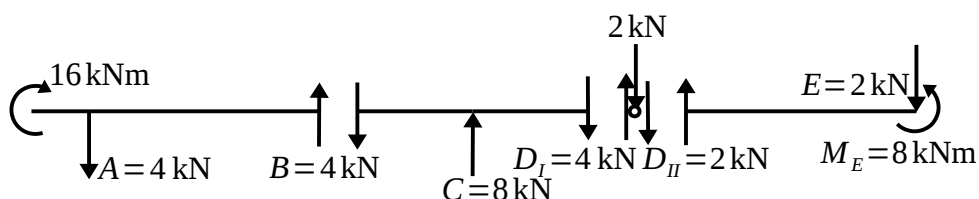
Gyakorló példa – 2

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

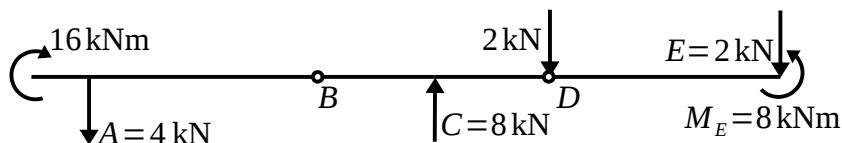


Megoldás

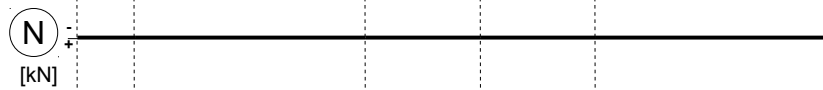
A reakciószámítás eredménye testenként:



A szerkezetre ható összes külső erő:



A normálerő szempontjából a tartó milyen szakaszokra bontandó?



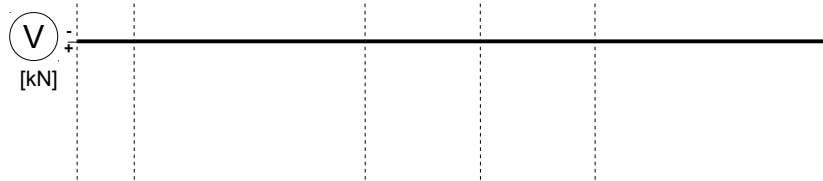
A nyíróerőábra szakaszainak és a szakaszok közötti változásoknak az eldöntése után a jellegzetes értékek:

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$V_4 =$$



A nyomatéki ábra szakaszainak és a szakaszok közötti változásoknak az eldöntése után a jellegzetes értékek:

$$M_1 =$$

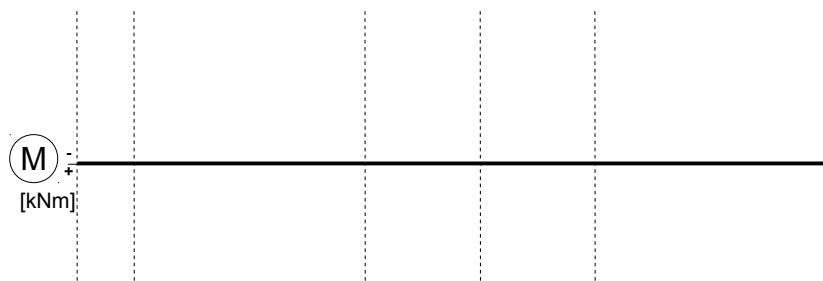
$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

$$M_4 =$$

$$M_5 =$$

Hogyan viszonyulnak egymáshoz a lineáris szakaszok meredekségei?

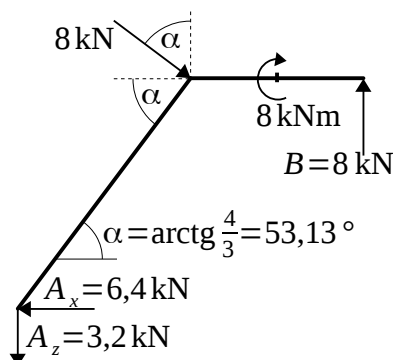
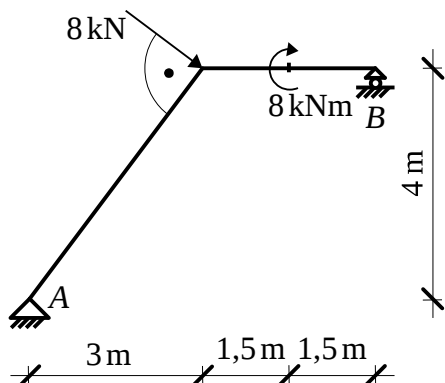


Tört tengelyű tartók

Tört tengelyű tartók tengelyének törésénél megváltozik a normálerő és a nyíróerő iránya, így a törés mindig szakaszhatár ezeken az ábrákon. A törésből két irányba kiinduló tartócsonkoknak egyensúlyban kell lenniük. Ebből az egyensúlyból a nyomatékok egyensúlyát az elkészült ábrából leolvasott értékekkel ellenőrizzük felhasználva azt, hogy az előjeldefinícióink miatt a nyomatéki ábra mindig a húzott oldalra kerül. A ferde szakaszokon a normálerőt és a nyíróerőt ferde vetületekből kell számolnunk, a hajlítónyomaték előjeléhez pedig a pozitív oldalt ki kell jelölnünk..

Mintapélda – 3

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit! (A reakciószámítás eredményét a jobb oldali ábrán megadtuk.)



Megoldás

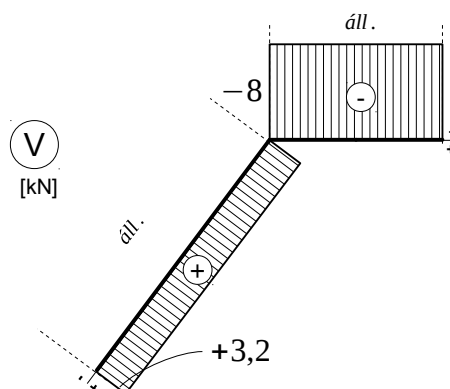
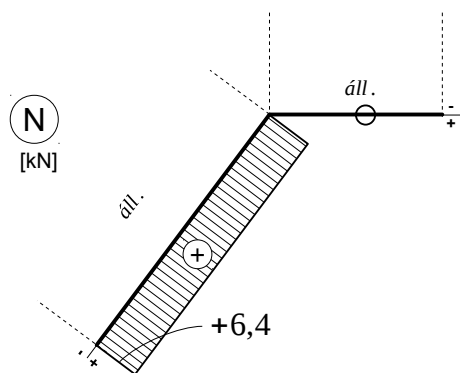
Az igénybevételek számítási irányát a következő szerint rögzítjük ebben a feladatban: a vízszintes szakaszon jobbról, a ferde szakaszon bal alulról számolunk, így a pozitív igénybevételek irányai az ábra szerinti lesznek. A ferde szakaszhoz feltüntetjük az A_x és A_z erőket is a normál- és nyíróerőirányú komponensek előjelének eldöntéséhez és a használandó szögfüggvények kiválasztásához.

A normálerőábra a ferde és a vízszintes szakaszon egyaránt egy-egy konstans szakaszból áll. Az egyes szakaszokon a normálerő:

$$N_1 = +A_x \cdot \cos \alpha + A_z \cdot \sin \alpha = 6,4 \cdot 0,6 + 3,2 \cdot 0,8 = +6,4 \text{ kN}, \quad N_2 = 0 \text{ kN}$$

A nyíróerőábra a ferde és a vízszintes szakaszon egyaránt egy-egy konstans szakaszból áll. Az egyes szakaszokon a nyíróerő:

$$V_1 = +A_x \cdot \sin \alpha - A_z \cdot \cos \alpha = 6,4 \cdot 0,8 - 3,2 \cdot 0,6 = +3,2 \text{ kN}, \quad V_2 = -8 \text{ kN}$$



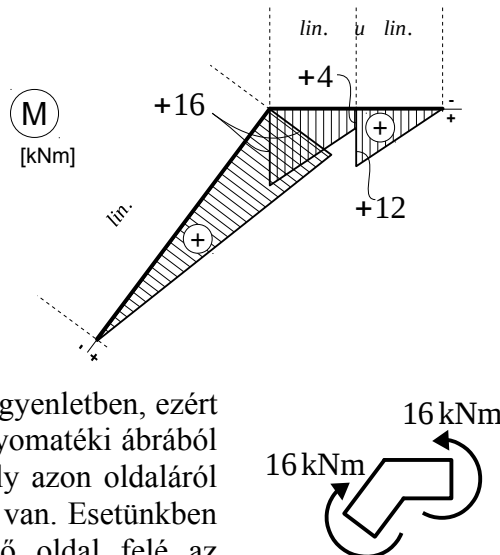
A nyomatéki ábra a ferde szakaszon egy lineáris szakaszból áll, a vízszintes szakaszon két, egymással párhuzamos lineáris szakaszból, amik között egy ugrás van. A tartótengely töréspontjában két szakasz csatlakozik. Ha a tartó ugyanazon oldaláról számítjuk a hajlítónyomatékokat a törés mindkét oldalán, akkor a pozitív hajlítónyomaték iránya ugyanaz lesz, geometriailag pedig ugyanarra a pontra írjuk fel ugyanazokból a hatásokból a nyomatéki egyenletet, ezért *a törés két oldalán a hajlítónyomaték azonos nagyságú lesz.*

Ezt is figyelembe véve a nyomatéki ábra jellegzetes

pontjaiban a hajlítónyomatékok: $M_1 = M_5 = 0 \text{ kNm}$,

$$M_2 = +6,4 \cdot 4 - 3,2 \cdot 3 = +16 \text{ kNm},$$

$$M_3 = +8 \cdot 1,5 - 8 = +4 \text{ kNm}, M_4 = +8 \cdot 1,5 = +12 \text{ kNm}.$$

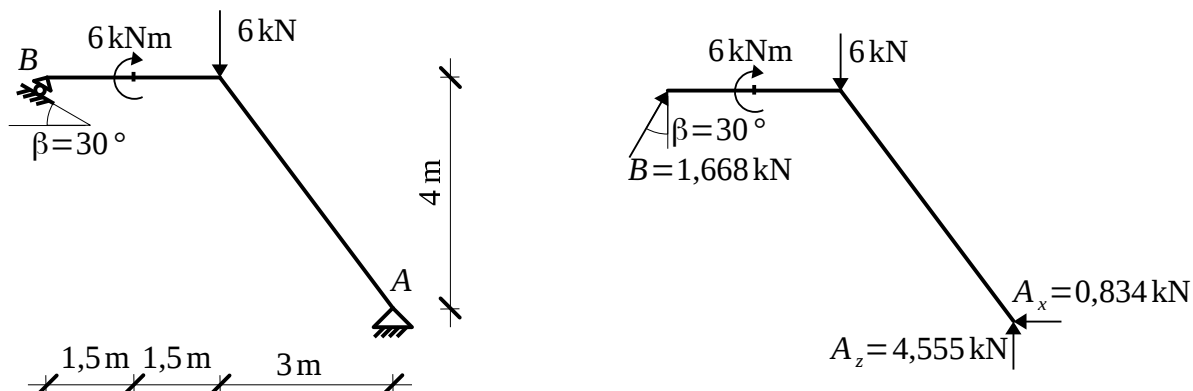


A törés környezetének nyomatékai

Ennek ellenőrzésére felrajzoltuk a törés két oldalán levő tartócsonkokat, és rárajzoltuk a hajlítónyomatéki igénybevételeket. (Az igénybevételi erőknek itt a nyomatéki egyensúly szempontjából nincs szerepe, hiszen a karja mindegyiknek zérus lenne a nyomatéki egyenletben, ezért nem rajzoljuk ki az erőket.) A hajlítónyomatékokat a nyomatéki ábrából olvassuk ki, a nyomaték félköríves nyílát a tartótengely azon oldaláról indítva rajzoljuk rá a csonkra, amelyik oldalon az ábra van. Esetünkben tehát a ferde szakaszon alulról indítjuk a bal felső oldal felé az óramutató járásával megegyező irányba forgató nyomatékokat, a vízszintes szakaszon pedig alulról indítjuk a felső oldal felé az óramutató járásával ellenkező irányba forgató nyomatékokat. A nagysága mindkét nyomatéknak 16 kNm , az ábrából kiolvasott értékeknek viszont már csak az abszolútértékére lesz szükségünk. A törés nyomatéki egyensúlya: $16 - 16 = 0$.

Gyakorló példa – 3

Erőtani számítás alapján, a reakciók ismeretében határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Előkészületként döntsük el, hogy az egyes szakaszokon melyik oldalról számítjuk az igénybevételeket, rajzoljuk fel az ennek megfelelő pozitív igénybevételek irányát. Számítsuk ki a ferde szakasz vízszintessel bezárt hajlásszögét és rajzoljuk be ezt is a normálerő és a nyíróerő,

valamint a vízszintes és függőleges erőkhöz képest.

$$\alpha =$$

Milyen szakaszokból áll a normálerőábra? Mik a jellegzetes értékei?

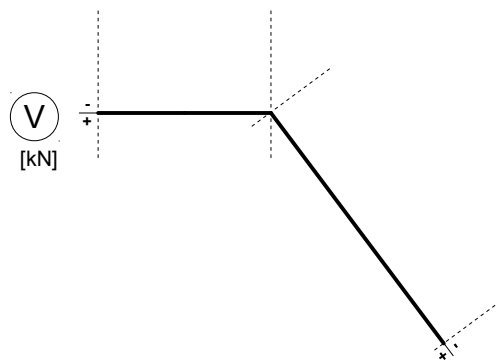
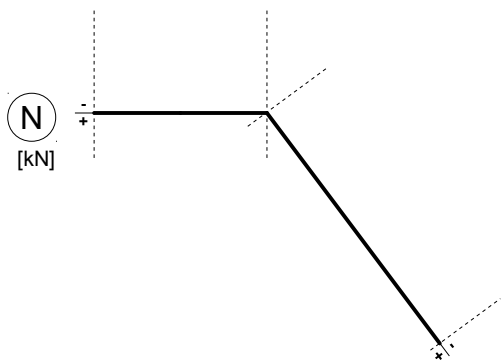
$$N_1 =$$

$$N_2 =$$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra? Mik a jellegzetes értékei?

$$V_1 =$$

$$V_2 =$$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra? Mik a jellegzetes értékei?

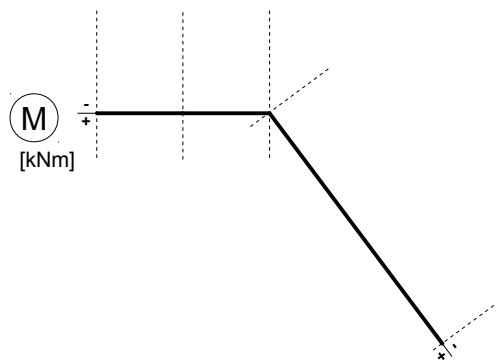
$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

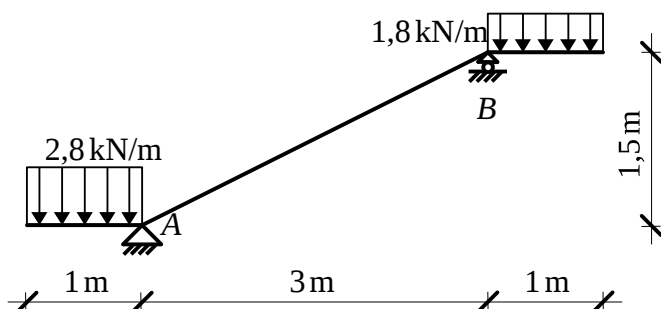
$$M_4 =$$

$$M_5 =$$



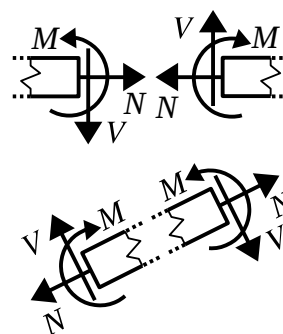
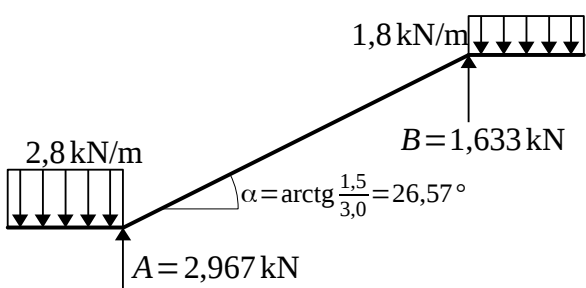
Mintapéllda – 4

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

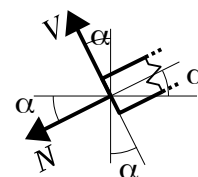
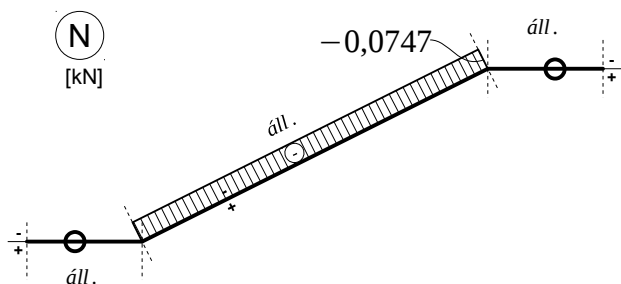


Megoldás

A reakciószámítás eredménye és a különböző irányokból történő igénybevétel-számítások esetén a pozitív igénybevételek iránya:

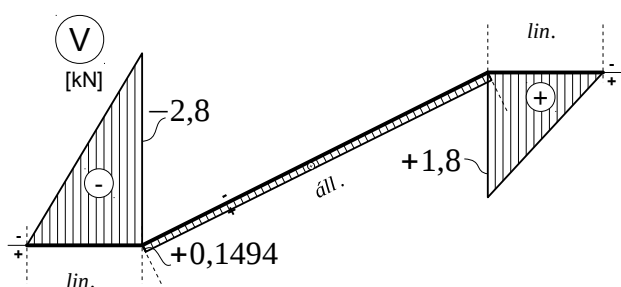


A normálerőábra három állandó szakaszból áll. (A két vízszintes és a ferde szakasz.) A vízszintes szakaszokon a normálerő vízszintes hatásokból származik. Mivel az összes külső erő függőleges, ezért ezek zérus értékűek: $N_1 = N_3 = 0$ kNm. A ferde szakaszon alulról számolva az A reakciónak és a 2,8 kN/m intenzitású megoszló erőnek a normálirányú vetületét kell figyelembe vennünk:

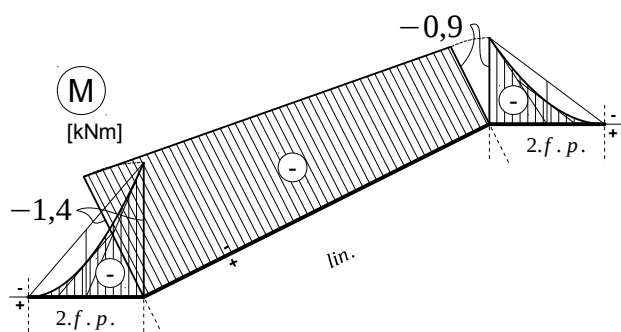
$$N_2 = -2,967 \cdot \sin 26,57^\circ + 2,8 \cdot 1,0 \cdot \sin 26,57^\circ = -0,07470 \text{ kN}$$


A nyíróerőábra a vízszintes szakaszokon lineáris, a ferde szakaszon állandó lesz. Az alsó vízszintes szakasz két végpontjában a nyíróerők $V_1 = 0$ és $V_2 = -2,8 \cdot 1 = -2,8$ kN. A felső vízszintes szakasz két végpontjában a nyíróerők $V_4 = +1,8 \cdot 1 = +1,8$ kN és $V_5 = 0$ kN. A ferde szakaszon alulról számolva az A reakciónak és a 2,8 kN/m intenzitású megoszló erőnek a nyíróerőirányú vetületét kell figyelembe vennünk:

$$V_3 = +2,967 \cdot \cos 26,57^\circ - 2,0 \cdot 1,0 \cdot \cos 26,57^\circ = +0,1494 \text{ kN}$$

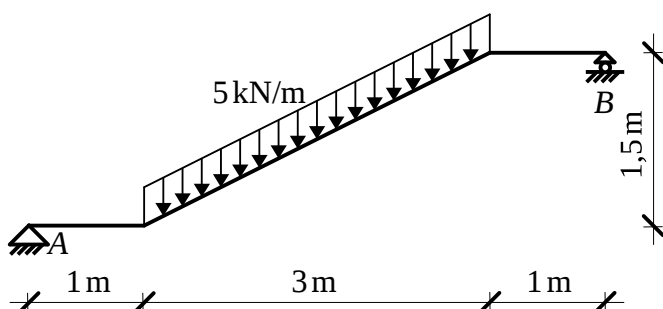


A nyomatéki ábra a vízszintes szakaszokon egy-egy másodfokú parabola lesz, a ferde szakaszon pedig lineáris. Az alsó vízszintes szakasz két végpontjában a hajlítónyomatékok $M_1=0$ és $M_2=-2,8 \cdot 1,0 \cdot 0,5 = -1,4 \text{ kNm}$. A parabola belógása $2,8 \cdot 1,0^2/8 = 0,7 \text{ kNm}$. A felső vízszintes szakasz két végpontjában a nyomatékok $M_5=-1,8 \cdot 1,0 \cdot 0,5 = -0,9 \text{ kNm}$ és $M_6=0 \text{ kNm}$. A parabola belógása ezen a szakaszon $1,8 \cdot 1,0^2/8 = 0,45 \text{ kNm}$. A ferde szakasz két végpontja a tartótengely két töréspontja. Ezekben a pontokban ugyanazokból az egyenletekből számíthatjuk a hajlítónyomatékokat, mint a törés másik oldalán már megtettük, így az értékek is azonosak lesznek: $M_3=-1,4 \text{ kNm}$ és $M_4=-0,9 \text{ kNm}$. A két végpontot egy egyenes szakasszal kötjük össze



Gyakorló példa – 4

Erőtani számítás alapján határozzuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

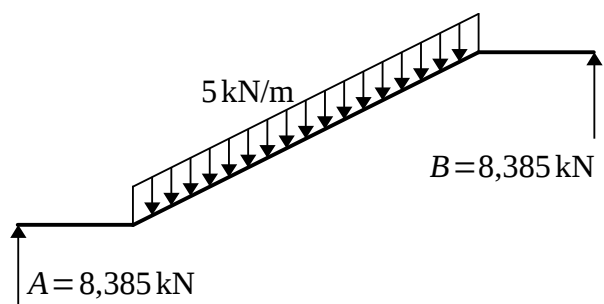
A ferde szakasz hossza:

$$l =$$

A ferde tengely vízszintessel bezárt hajlásszöge:

$$\alpha =$$

A reakciószámítás eredménye



Milyen irányúak lesznek a pozitív igénybevételek az egyes szakaszokon a különböző irányból történő számítások esetén?

Döntsük el, milyen szakaszokból áll a normálerőábra, és számítsuk ki a jellegzetes értékeit:

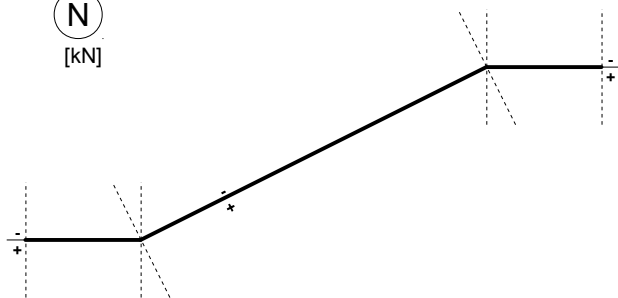
$$N_1 =$$

$$N_4 =$$

$$N_2 =$$

$$N_3 =$$

(N)
[kN]



Döntsük el, milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra, és számítsuk ki a jellegzetes értékeit:

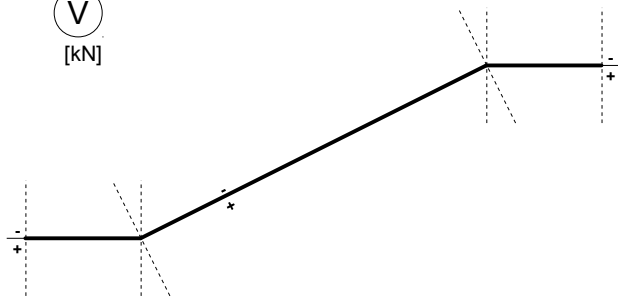
$$V_1 =$$

$$V_2 =$$

$$V_3 =$$

$$V_4 =$$

(V)
[kN]



Döntsük el, milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra, és számítsuk ki a jellegzetes értékeit:

$$M_1 =$$

$$M_2 =$$

$$M_3 =$$

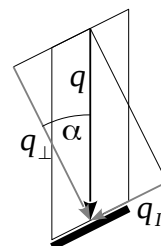
$$M_4 =$$

A parabola belógásának számításához szükségünk van a megoszló erő tartótengelyre merőleges komponensének intenzitására:

$$q_{\perp} =$$

Amiből a parabola belógása:

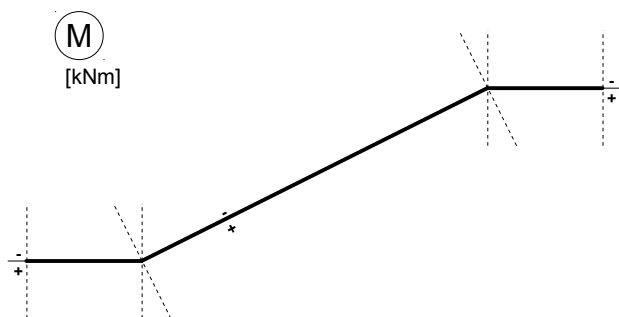
$$\frac{q_{\perp} \cdot l^2}{8} =$$



Hol van a maximális nyomaték helye a nyíróerőábra alapján?

Mekkora az értéke?

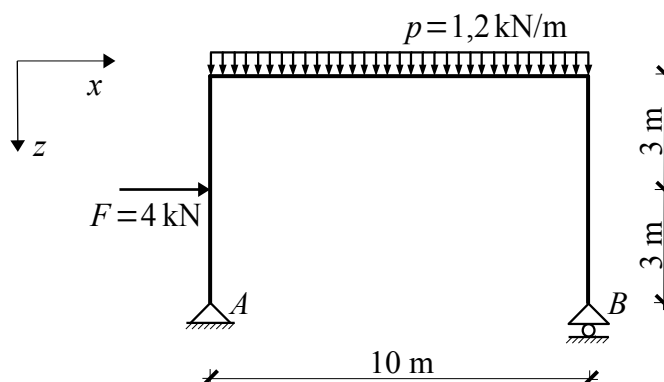
$$M_{max} =$$



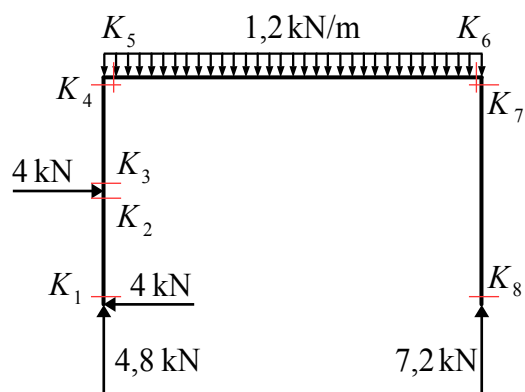
Ferde és törttengelyű tartók igénybevételi ábrái I.

Mintapélda - 1

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



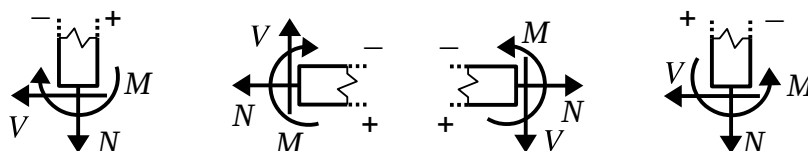
Megoldás



A számítást a reakciók meghatározásával kezdjük. A reakciókomponenseket a bal oldali ábrán felrajzoltuk (számításukkal a 11. óra 1. mintapéldájában foglalkoztunk).

Az ábrába berajzoltuk azokat a jellemző keresztmetszeteket, amelyekben mindenképpen ki kell számolni az igénybevételeket. A támaszoknál, a koncentrált erőknél és a tartótengely töréspontjaiban mindig meg kell adnunk az igénybevételeket. A jelölt keresztmetszeteket végtelen közel (0 m távolságra) vesszük fel az igénybevételek szempontjából fontos hatásokhoz, a reakciókhoz, a koncentrált terhekhez, illetve a tartótengely töréseihez. A tartó pozitív

oldalát a vízszintes részen alul vesszük fel, így a függőleges részen a tengely belső oldala a pozitív. A K_1 - K_5 keresztmetszetekben az A támasz felől, a K_6 - K_8 keresztmetszetekben a B támasz felől számolunk. A bal oldali függőleges részen alulról, a vízszintes részen balról és jobbról, illetve a jobb oldali függőleges részen alulról történő számítás során a pozitív igénybevételek irányai az alábbiak szerint értelmezhetők:



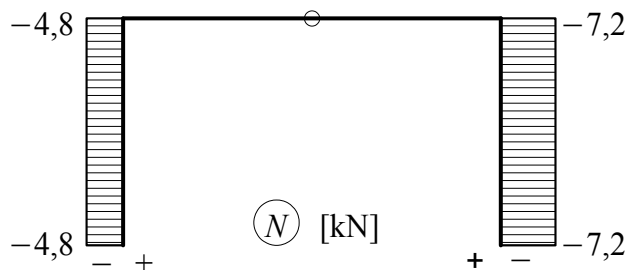
Az igénybevételek számítását kezdjük a normálerőkkel! A támaszoknál a tartó tengelye függőleges, ezért a függőleges és vízszintes reakciókomponensek rendre a normál és a nyíróerő irányába esnek. A bal oldali, függőleges tengelyű tartórészen alulról számolunk, az éppen vizsgált keresztmetszet alatti tartórészre ható erőrendszert redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába. A

normálerő állandó, hiszen az F erő merőleges a tartó tengelyére. A felfelé mutató A_z reakciókomponens nyomást okoz, tehát a normálerő negatív:

$$N_1 = N_2 = N_3 = N_4 = -4,8 \text{ kN}$$

A felső, vízszintes szakaszon a normálerő értéke konstans, hiszen a tartótengelyre merőleges megoszló teher nem okoz változást a normálerőben. A normálerő értéke a K_5 keresztmetszetben balról (A_x -ből és F -ből) számolva:

$$N_5 = 4 - 4 = 0 \text{ kN}$$



Ellenőrzésül a normálerő értéke a K_6 keresztmetszetben jobbról számolva $N_6 = 0 \text{ kN}$, hiszen a keresztmetszettől jobbra lévő tartórészre nem hat olyan erő, aminek lenne vízszintes komponense.

A jobb oldali függőleges tartórészen konstans a normálerő értéke, alulról számolva a felfelé mutató B reakció nyomást okoz:

$$N_7 = N_8 = -7,2 \text{ kN}$$

A nyíróerőábra a bal oldali függőleges tartórészen két konstans szakaszból áll és a koncentrált erő keresztmetszetében ugrás van. A koncentrált, aktív teher alatti szakaszon alulról számolva csak az A reakcióerő vízszintes komponense okoz nyíróerőt, ami az előjelszabály szerint pozitív:

$$V_1 = V_2 = 4 \text{ kN}$$

A koncentrált erő fölötti keresztmetszetekben a nyíróerő számítása során az A_x reakciókomponensen kívül a koncentrált erőt is figyelembe kell venni, így:

$$V_3 = V_4 = 4 - 4 = 0 \text{ kN}$$

A vízszintes szakaszon a konstans megoszló teher miatt lineáris a nyíróerőábra. A K_5 keresztmetszetben balról számolva a felfelé mutató A_z reakciókomponensből pozitív nyíróerőt kapunk:

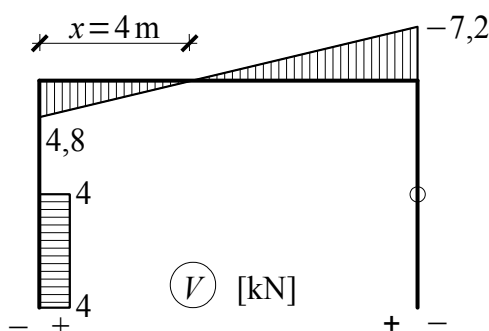
$$V_5 = 4,8 \text{ kN}$$

A K_6 keresztmetszetben jobbról számolva a felfelé mutató B reakcióból negatív nyíróerőt kapunk:

$$V_6 = -7,2 \text{ kN}$$

A K_5 és a K_6 közötti lineáris szakasz megrajzolása után meghatározzuk a függvény zérushelyét a két keresztmetszet között, itt lesz lokális szélsőértéke a hajlítónyomaték függvénynek. Balról számolva a nyíróerőt:

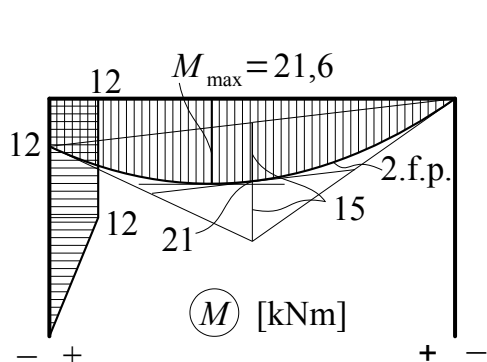
$$V(x) = 4,8 - 1,2 \cdot x = 0 \quad , \text{ amiből: } x = 4,8 / 1,2 = 4 \text{ m}$$



A tartó jobboldali, függőleges részén zérus a nyíróerő. Alulról számolva csak a B erőt kell figyelembe venni az igénybevételek számítása során, de mivel az párhuzamos a tartótengellyel:

$$V_6 = V_7 = 0 \text{ kN}$$

A nyomatéki ábra alakja a bal oldali függőleges részen két lineáris szakaszból áll. A nyomaték értéke a csuklós támasznál zérus:



$$M_1 = 0 \text{ kNm}$$

A koncentrált erővel terhelt keresztmetszetben törés van az ábrában. A koncentrált erővel szomszédos keresztmetszetekben alulról számolva a balra mutató A_x reakciókomponens a tartó jobb oldalán okoz húzást, a hajlítónyomaték tehát pozitív (a K_3 keresztmetszetben alulról számolva a nyomatékot, az F erő karja 0 m):

$$M_2 = M_3 = 4 \cdot 3 = 12 \text{ kNm}$$

A hajlítónyomaték értéke K_3 és a K_4 keresztmetszetek között nem változik:

$$M_4 = 12 \text{ kNm},$$

hiszen ezen a szakaszon a nyíróerő értéke és így a nyomatéki függvény meredeksége is zérus. A vízszintes szakaszon a nyomatéki függvény másodfokú.

A bal felső keretsarok egyensúlya miatt az M_4 és az M_5 nyomatékok nagysága meg kell, hogy egyezzen és ha M_4 az óramutató járásával megegyező irányban forgatja a tartó sarkát, akkor az M_5 azzal ellentétesen kell hogy forgasson, tehát alul, a pozitív oldalon okoz húzást.

A vízszintes szakasz jobb oldali végkeresztmetszetében a hajlítónyomaték zérus, hiszen jobbról számolva a B erő karja zérus.

A parabola belógása:
$$\frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{1,2 \cdot 10^2}{8} = 15 \text{ kNm}$$

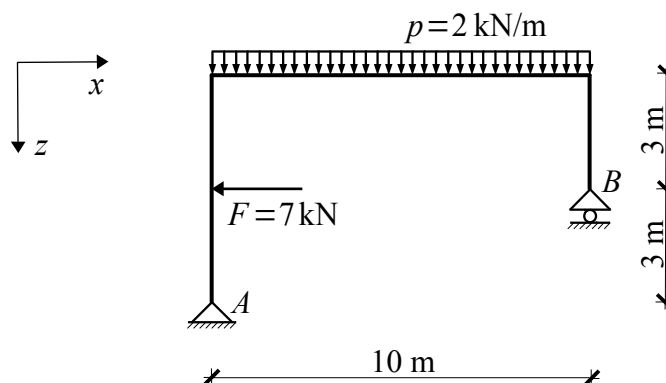
A jobb oldali, függőleges tengelyű tartórész összes keresztmetszetében a hajlítónyomaték zérus, $M_7 = M_8 = 0$, hiszen (alulról számolva) a B erő karja zérus.

A szakasz két végpontjában és a szakasz felezőpontjában a függvény érintői a szokott módon kaphatók. A függvény lokális maximuma a zérus nyíróerővel azonos keresztmetszetben jobbról számolva:

$$M_{\max} = 7,2 \cdot 6 - \frac{1,2 \cdot 6^2}{2} = 21,6 \text{ kNm}$$

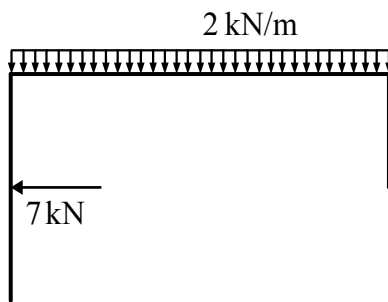
Gyakorló példa -1

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!

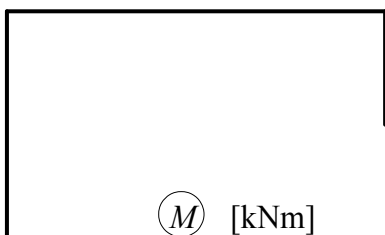
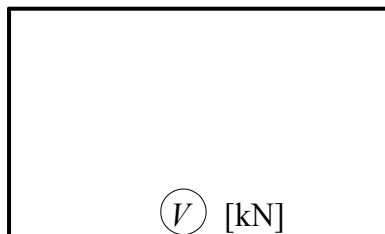
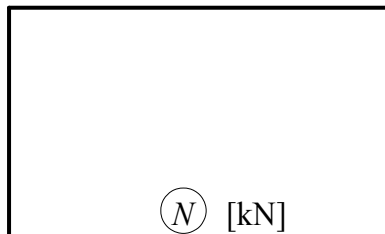


Megoldás

Reakciók:

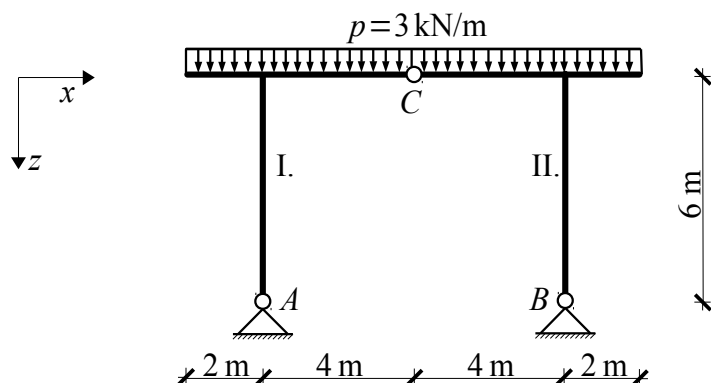


Igénybevételi ábrák



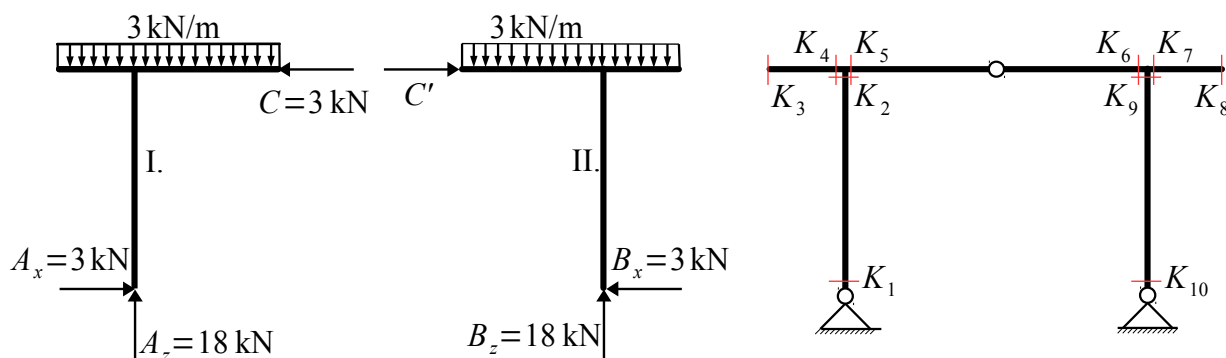
Mintapéllda - 2

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!

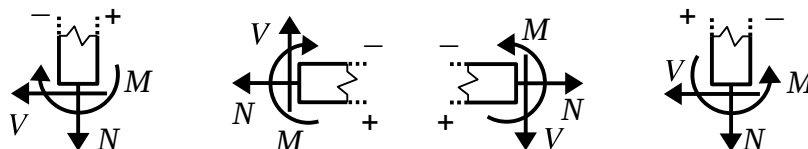


Megoldás

Az első lépés a reakciók meghatározása. A következő ábrán láthatók a külső és belső reakciók komponensei. (Az összetett tartóknál bemutattuk a háromcsuklós tartók reakcióinak számítását, ezért azzal most már nem foglalkozunk részletesen.) A jobb oldali ábrán berajzoltuk azokat a keresztmetszeteket, ahol mindenképpen meg kell adnunk az igénybevételeket.



A tartó pozitív oldalát a vízszintes részen alul, a függőleges részekben a belső oldalon vesszük fel. A bal oldali függőleges részen alulról, a vízszintes részen balról és jobbról, illetve a jobb oldali függőleges részen alulról történő számítás során a pozitív igénybevételek irányai az alábbiak szerint értelmezhetők:



Az igénybevételek számítását kezdjük a normálerőkkel! A támaszoknál a tartó tengelye függőleges, ezért a függőleges és vízszintes reakciókomponensek rendre a normál és a nyíróerő irányába esnek. A bal oldali, függőleges tengelyű tartórészen alulról számolunk, az éppen vizsgált keresztmetszet alatti tartórészre ható erőrendszert redukáljuk a keresztmetszet súlypontjába. A normálerő állandó, hiszen csak az A reakcióerő függőleges komponense párhuzamos a tartó

tengelyével, a felfelé mutató reakciókomponens nyomást okoz, tehát a normálerő negatív:

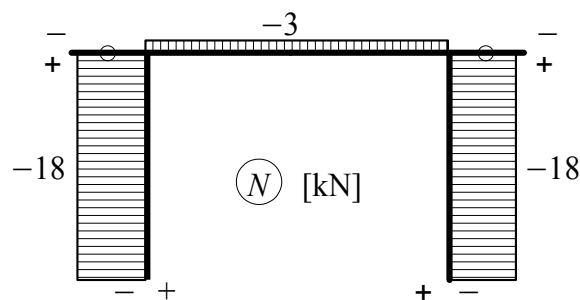
$$N_1 = N_2 = -18 \text{ kN}$$

A bal oldali konzolon balról számolva, illetve a jobb oldali konzolon jobbról számolva egyaránt zérus normálerőt kapunk, hiszen a tartó vízszintes tengelyére merőleges megoszló teher nem okoz normál igénybevételeket:

$$N_3 = N_4 = N_7 = N_8 = 0 \text{ kN}$$

A két felső keretsarok közötti, vízszintes szakaszon a normálerő értéke konstans, hiszen a tartótengelyre merőleges megoszló teher nem okoz változást a normálerőben. A normálerő értéke a K_5 keresztmetszetben balról, a nyomást okozó A_x -ből számolva:

$$N_5 = -3 \text{ kN}$$



Természetesen ugyanezt az értéket kapjuk jobbról, B_x -ből számolva is, például a K_6 keresztmetszetben:

$$N_6 = -3 \text{ kN}$$

A normálerő értéke a jobb oldali függőleges tartórészen konstans, a felfelé mutató, tehát nyomást okozó B_z reakciókomponensből:

$$N_9 = N_{10} = -18 \text{ kN}$$

A nyíróerő értéke a bal oldali függőleges tartórészen konstans. Alulról számolva csak az A reakcióerő vízszintes komponense okoz nyíróerőt, ami az előjelszabály szerint negatív:

$$V_1 = V_2 = -3 \text{ kN}$$

A bal oldali konzolon lineáris az ábra. A konzol szabad végén nincs koncentrált erő, így balról számolva:

$$V_3 = 0 \text{ kN}$$

A K_4 keresztmetszetben balról számolva a konzolon lévő, lefelé mutató, megoszló terhet kell figyelembe venni, amiből negatív nyíróerő származik:

$$V_4 = -3 \cdot 2 = -6 \text{ kN}$$

A középső vízszintes szakaszon a konstans megoszló teher miatt lineáris a nyíróerőábra. A K_5 keresztmetszetben balról számolva a felfelé mutató A_z reakciókomponensből pozitív, a bal oldali konzolon lévő megoszló teherből negatív nyíróerőt kapunk:

$$V_5 = 18 - 3 \cdot 2 = 12 \text{ kN}$$

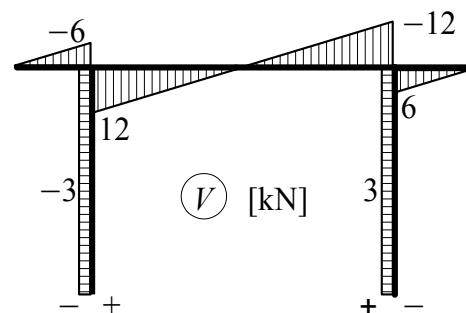
A K_6 keresztmetszetben jobbról számolva a felfelé mutató B reakcióból negatív, a jobb oldali

konzolon lévő megoszló teherből pozitív nyíróerőt kapunk:

$$V_6 = -18 + 3 \cdot 2 = -12 \text{ kN}$$

A szimmetriaviszonyok miatt a K_5 és a K_6 közötti lineáris szakasz zérushelye a belső csuklónál van.

A K_7 és a K_8 keresztmetszetek között lineáris a nyíróerőábra. A jobb oldali konzol végén jobbról számolva a nyíróerő zérus, mivel nincs koncentrált teher a konzol szabad végén. A K_7 keresztmetszetben jobbról számolva a konzolon lévő, lefelé mutató, megoszló teherből pozitív nyíróerőt kapunk:

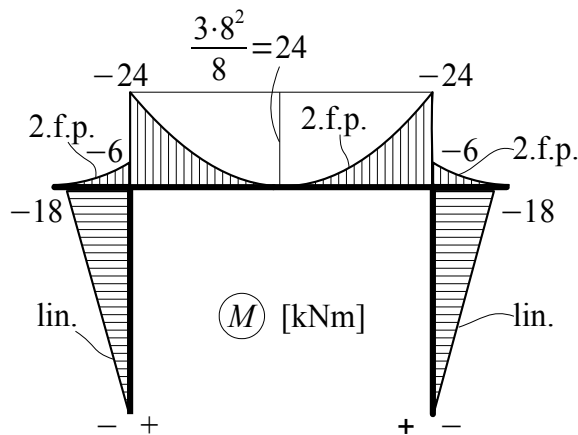


$$V_7 = 3 \cdot 2 = 6 \text{ kN}$$

A nyírőerőfüggvény vízszintes tartórészre eső három szakaszának meredeksége megegyezik, hiszen a megoszló teher intenzitása konstans.

A nyomatéki ábra alakja a tartó függőleges részein lineáris. A nyomaték értéke a csuklós támaszoknál zérus. A K_2 keresztmetszetben alulról számolva a jobbra mutató A_x reakciókomponens a tartó bal oldalán okoz húzást, a hajlítónyomaték tehát negatív:

$$M_2 = -3 \cdot 6 = -18 \text{ kNm}$$



A K_9 keresztmetszetben alulról számolva a balra mutató B_x reakciókomponens a tartó jobb oldalán okoz húzást, a hajlítónyomaték tehát negatív:

$$M_9 = -3 \cdot 6 = -18 \text{ kNm}$$

A tartó vízszintes részein másodfokú a nyomatéki ábra és mivel lefelé mutat a megoszló teher, ezért alulról domború a függvény. A konzolok szabad végein zérus a nyomaték.

A konzolok csomópontához csatlakozó végén kívülről, a konzolok szabad vége felől számolva a megoszló teher felül okoz húzást, így a nyomaték negatív:

$$M_4 = M_7 = -3 \cdot 2 \cdot 1 = -6 \text{ kNm}$$

A konzolok szabad végén zérus a nyírőerő, ezért a nyomatéki ábra érintője vízszintes. Egy konzol két végén számított érték és az egyik végén meghatározott érintő alapján a másodfokú nyomatéki ábra megrajzolható. (Ez egy egyszerű konzoltartóra is igaz.)

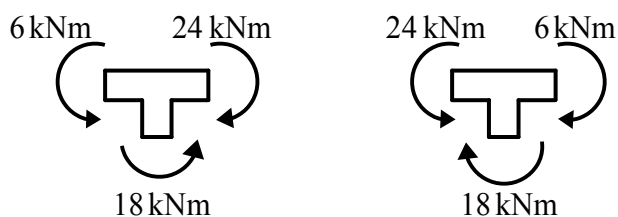
A K_5 keresztmetszetben jobbról, a bal oldali tartórész egyensúlya alapján számolva csak a K_5 keresztmetszet és a C csukló közötti részre ható megoszló teherből keletkezik hajlítónyomaték, hiszen a belső reakcióerő vízszintes, tehát a karja zérus. A K_6 keresztmetszetben balról, a jobb oldali tartórész egyensúlya alapján számolva ugyanakkora nyomatékot kapunk. Mindkét nyomaték negatív, hiszen a felső oldalon okoz húzást:

$$M_5 = M_6 = -3 \cdot 4 \cdot 2 = -24 \text{ kNm}$$

A két keresztmetszet közötti parabola belógása:

$$\frac{p \cdot l^2}{8} = \frac{3 \cdot 8^2}{8} = 24 \text{ kNm}$$

Ellenőrzésként a belső csuklónál zérus nyomatékot kell kapnunk (ez az elkülönítés alapján is belátható, hiszen a C és C' erők karja zérus a szomszédos keresztmetszetek súlypontjára). A csuklónál a zérus nyírőerő miatt a nyomatéki függvény érintője vízszintes.



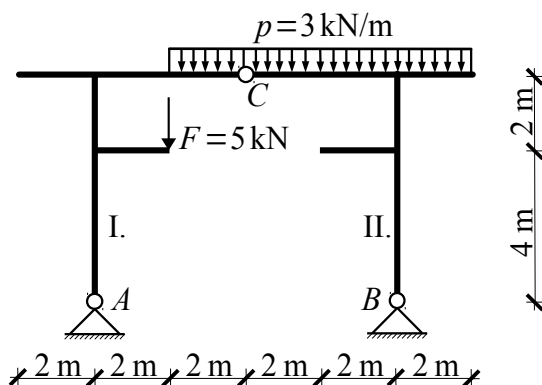
A tartótengely elágazásainál ellenőrizzük a csomópontok nyomatéki egyensúlyát! A húzott oldal figyelembevételével felrajzoljuk a csomópontokra ható nyomatékokat és ellenőrizzük a forgatónyomatékok egyensúlyát.

$$\text{bal } \sum M_i: 6 - 24 + 18 = 0$$

$$\text{jobb } \sum M_i: 24 - 6 - 18 = 0$$

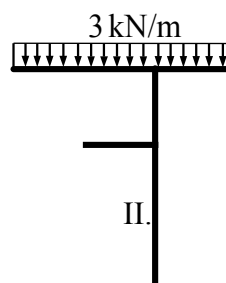
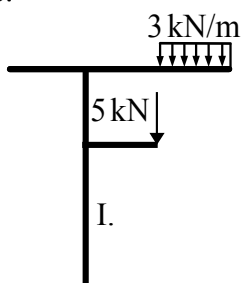
Gyakorló példa -2

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentések:

e.

i.

új i.

I.:

II.:

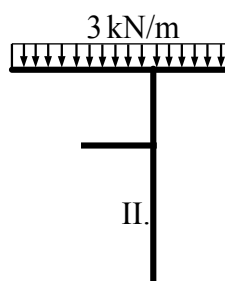
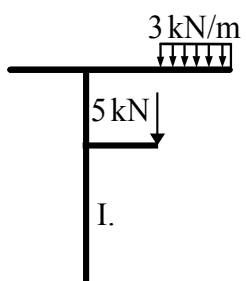
Sz.:

Megoldás számítással:

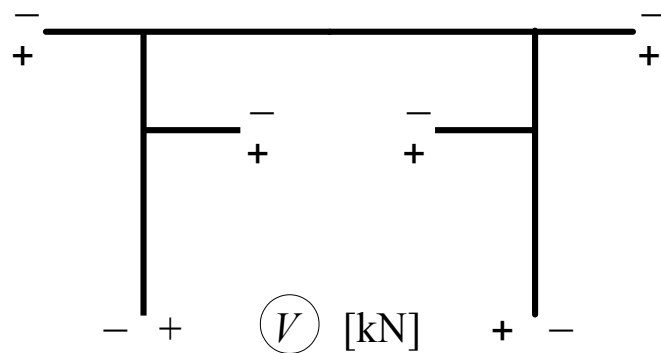
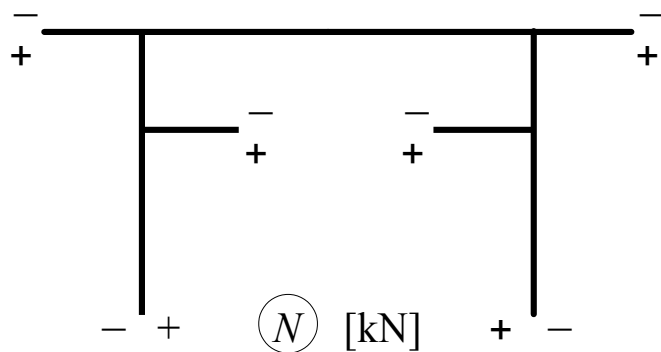
Σ
 Σ
 Σ
 Σ
 Σ

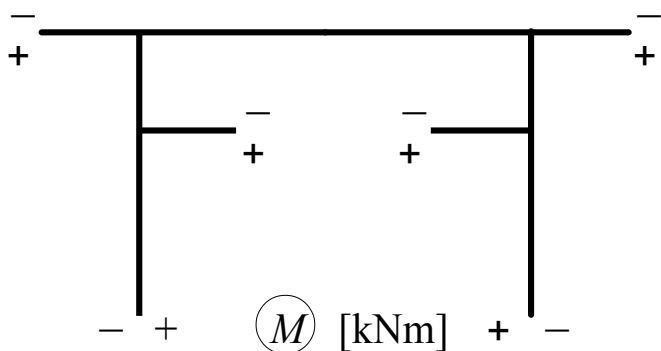
Σ

Eredményvázlat a reakciókkal:



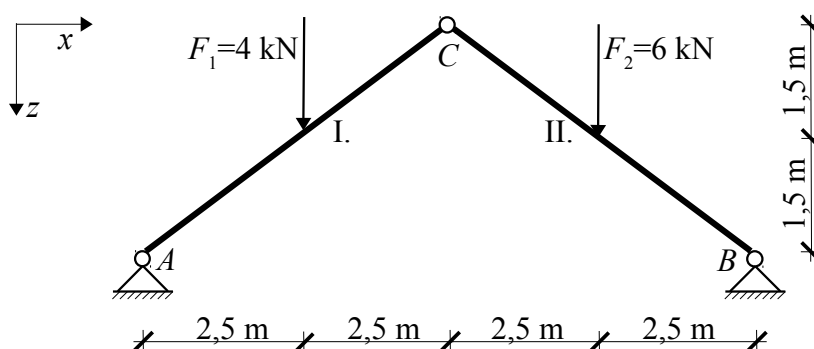
Igénybevételi ábrák:





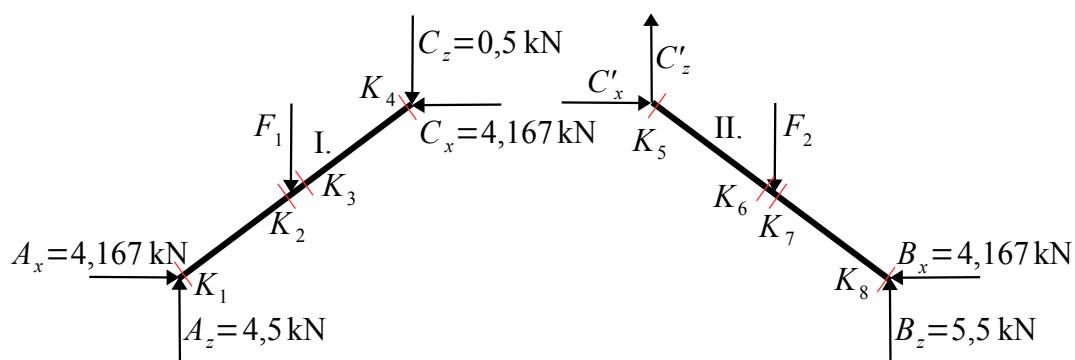
Mintapéllda - 3

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

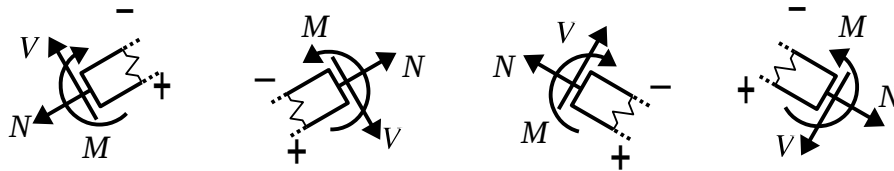
Az első lépés a reakciók meghatározása. (A tartó fenti terhekhez tartozó reakcióinak meghatározásával a 13. óra 2. mintapéldájában részletesen foglalkoztunk.) Az alábbi ábrába a reakciókomponenseken kívül berajzoltuk azokat a keresztmetszeteket is, ahol az igénybevételi ábrák megrajzolásához meg kell határoznunk az igénybevételek értékeit.



A tartó tengelyének vízszintessel bezárt szöge mindkét tartórészen:

$$\alpha = \arctg \frac{3}{5} = 30,96^\circ$$

A tartó pozitív oldalát alul vettük fel. A következő ábrán a pozitív igénybevételek irányait tüntettük fel rendre a bal oldali tartórészen balról és jobbról, illetve a jobb oldali tartórészen balról és jobbról történő számítás esetén.



Az igénybevételek számítását kezdjük a normálerőkkel! A normálerőábra mindkét tartórészen két konstans szakaszból áll, a koncentrált erők alatt ugrás van az ábrában. A K_1 és K_2 keresztmetszetek közötti részen balról számolva az A_z és az A_x reakciókomponensekből egyaránt negatív normálerő származik:

$$N_1 = N_2 = -4,5 \cdot \sin \alpha - 4,167 \cdot \cos \alpha = -5,888 \text{ kN}$$

A K_3 és K_4 keresztmetszetek közötti részen jobbról számolva a C_z és a C_x reakciókomponensekből egyaránt negatív normálerő származik:

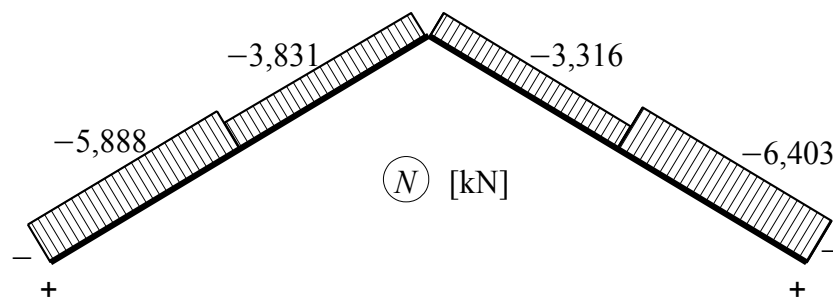
$$N_3 = N_4 = -0,5 \cdot \sin \alpha - 4,167 \cdot \cos \alpha = -3,831 \text{ kN}$$

A K_5 és K_6 keresztmetszetek közötti részen balról számolva a C'_z reakciókomponensből pozitív, a C'_x reakciókomponensből negatív normálerő származik:

$$N_5 = N_6 = 0,5 \cdot \sin \alpha - 4,167 \cdot \cos \alpha = -3,316 \text{ kN}$$

A K_7 és K_8 keresztmetszetek közötti részen jobbról számolva a B_z és a B_x reakciókomponensekből egyaránt negatív normálerő származik:

$$N_7 = N_8 = -5,5 \cdot \sin \alpha - 4,167 \cdot \cos \alpha = -6,403 \text{ kN}$$



A nyíróerőábra mindkét tartórészen két konstans szakaszból áll, a koncentrált erők alatt ugrás van az ábrában. A K_1 és K_2 keresztmetszetek közötti részen balról számolva az A_z reakciókomponensből pozitív, az A_x reakciókomponensből negatív nyíróerő származik:

$$V_1 = V_2 = 4,5 \cdot \cos \alpha - 4,167 \cdot \sin \alpha = 1,715 \text{ kN}$$

A K_3 és K_4 keresztmetszetek közötti részen jobbról számolva a C_z reakciókomponensből pozitív, a C_x reakciókomponensből negatív nyíróerő származik:

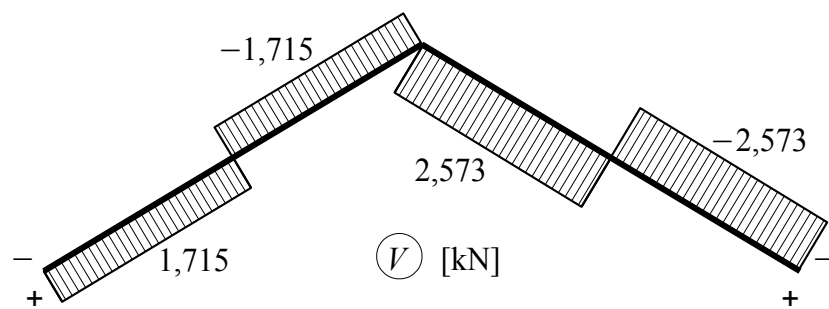
$$V_3 = V_4 = 0,5 \cdot \cos \alpha - 4,167 \cdot \sin \alpha = -1,715 \text{ kN}$$

A K_5 és K_6 keresztmetszetek közötti részen balról számolva a C'_z és a C'_x reakciókomponensekből egyaránt pozitív nyíróerő származik:

$$V_5 = V_6 = 0,5 \cdot \cos \alpha + 4,167 \cdot \sin \alpha = 2,573 \text{ kN}$$

A K_7 és K_8 keresztmetszetek közötti részen jobbról számolva a B_z reakciókomponensből negatív, a B_x reakciókomponensből pozitív nyíróerő származik:

$$V_7 = V_8 = -5,5 \cdot \cos \alpha + 4,167 \cdot \sin \alpha = -2,573 \text{ kN}$$

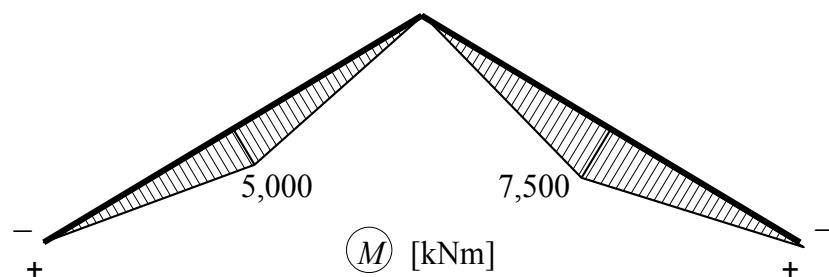


A nyomatéki ábra mindkét tartórészen két lineáris szakaszból áll, a koncentrált erők alatt törés van az ábrában. A csuklós támaszoknál és a belső csuklónál zérus a nyomaték. A K_2 és a K_3 keresztmetszetekben balról számolva az A_z reakciókomponensből pozitív, az A_x reakciókomponensből negatív hajlítónyomaték származik:

$$M_2 = M_3 = 4,5 \cdot 2,5 - 4,167 \cdot 1,5 = 5,000 \text{ kNm}$$

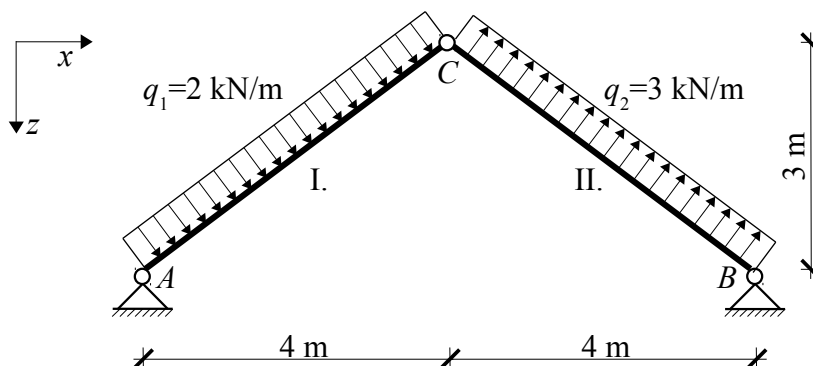
A K_6 és a K_7 keresztmetszetekben jobbról számolva a B_z reakciókomponensből pozitív, a B_x reakciókomponensből negatív hajlítónyomaték származik:

$$M_6 = M_7 = 5,5 \cdot 2,5 - 4,167 \cdot 1,5 = 7,500 \text{ kNm}$$



Gyakorló példa – 3

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentések:

e.

i.

új i.

I.:

II.:

Sz.:

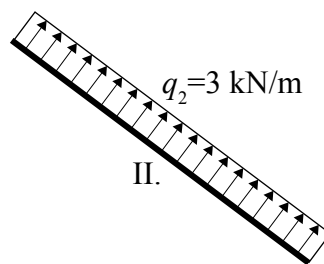
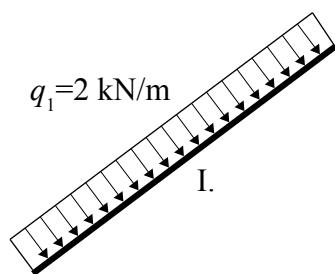
Megoldás számítással:

Σ

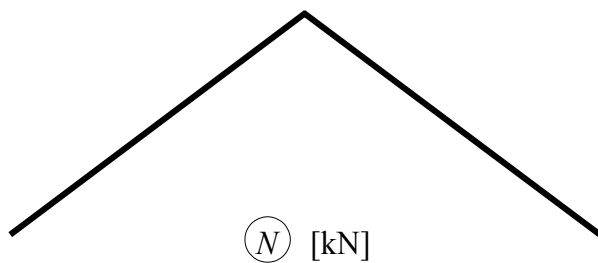
Σ

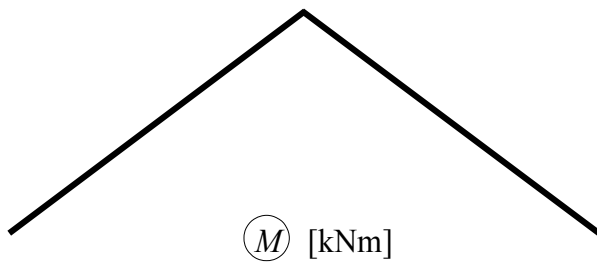
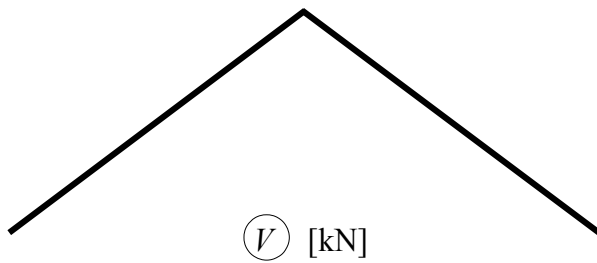
Σ Σ Σ Σ

Eredményvázlat a reakciókkal:



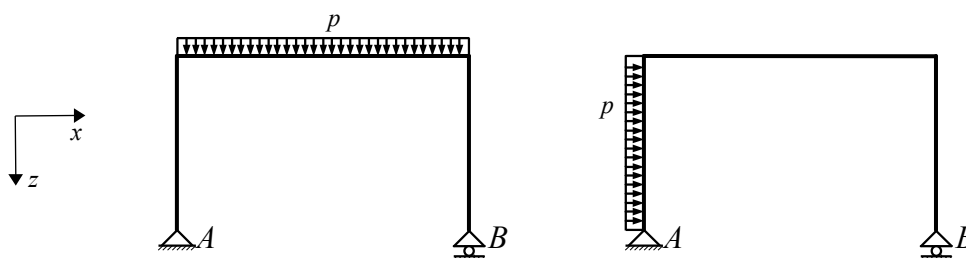
Igénybevételi ábrák:





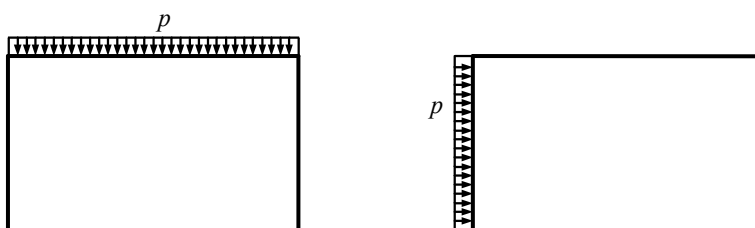
Gyakorló példa - Tartalék

Határozzuk meg az ábrán látható tartók alakhelyes igénybevételi ábráit!

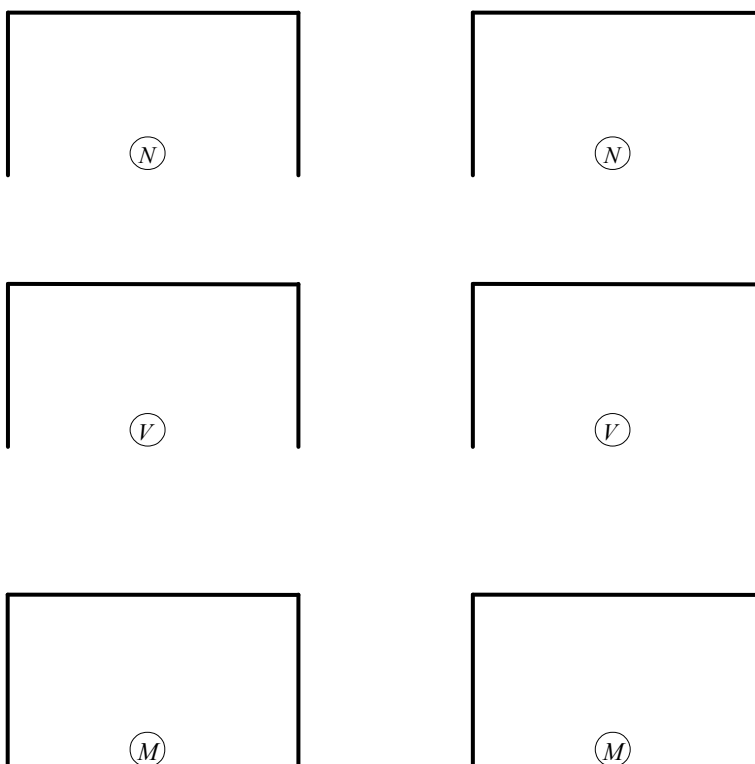


Megoldás

Rajzoljuk be a reakciók hatásvonalait és irányait!



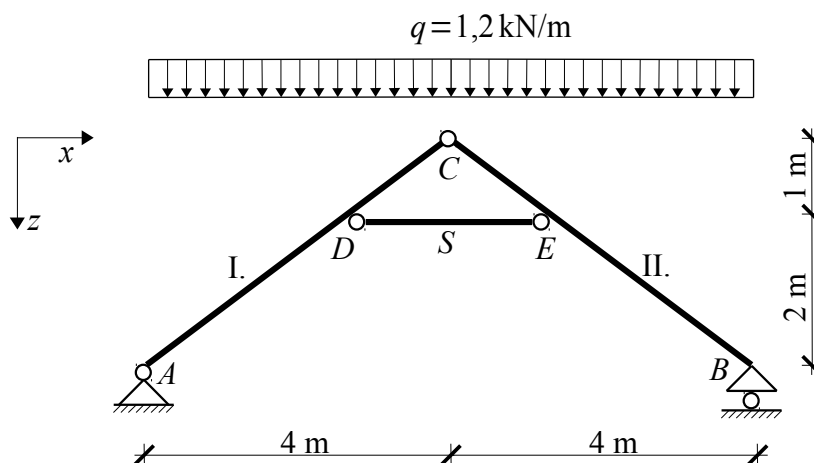
Igénybevételi ábrák:



Ferde és törttengelyű tartók igénybevételi ábrái II.

Mintapélda - 1

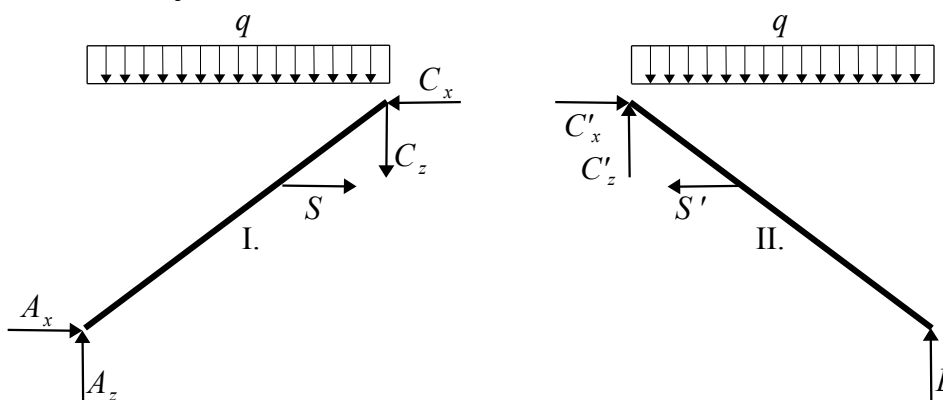
Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

A számítást a reakciók meghatározásával kezdjük.

Az elkülönített tartó ábrája:



Egyensúlyi kijelentések:

	e.	i.	új i.
I.: $((q_{bal}), A, S, C) \doteq 0$	3	5	5
II.: $((q_{jobb}), C', S', B) \doteq 0$	3	4	1
Sz.: $((q), A, B) \doteq 0$	(3)	3	

Reakciók számítása

$$\text{Sz. } \sum M_i^{(A)}: -1,2 \cdot 8 \cdot 4 + B \cdot 8 = 0 \rightarrow B = 4,8 \text{ kN } (\uparrow)$$

$$\text{Sz. } \sum M_i^{(B)}: 1,2 \cdot 8 \cdot 4 - A_z \cdot 8 = 0 \rightarrow A_z = 4,8 \text{ kN } (\uparrow)$$

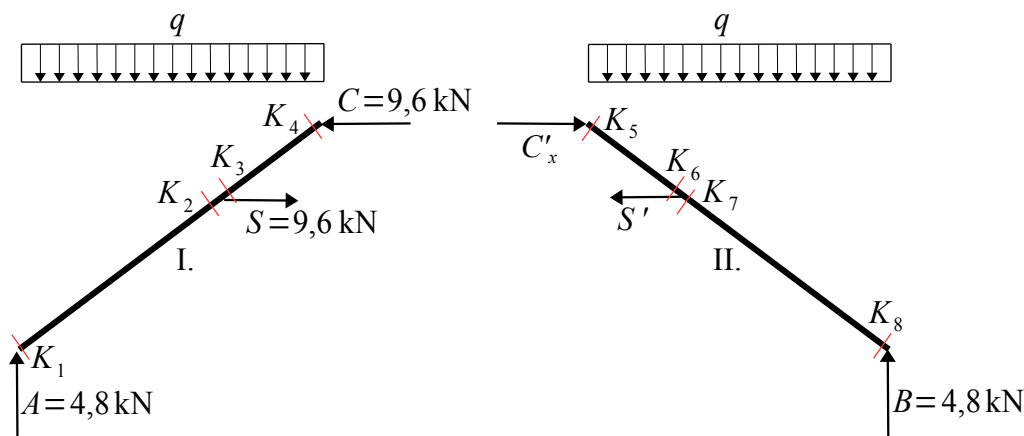
$$\text{Sz. } \sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$\text{II. } \sum M_i^{(C)}: -1,2 \cdot 4 \cdot 2 + 4,8 \cdot 4 - S' \cdot 1 = 0 \rightarrow S' = 9,6 \text{ kN}(h)$$

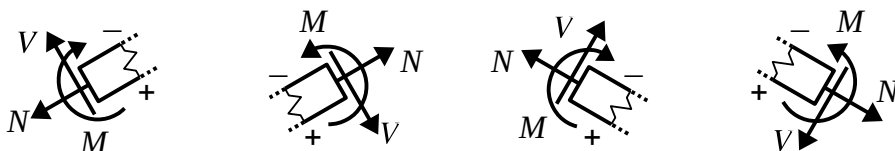
$$\text{II. } \sum F_{ix}: C'_x - 9,6 = 0 \rightarrow C'_x = 9,6 \text{ kN}(\rightarrow)$$

$$\text{II. } \sum F_{iz}: 1,2 \cdot 4 - C'_z - 4,8 = 0 \rightarrow C'_z = 0 \text{ kN}$$

A következő ábrán a reakciókon kívül feltüntettük azokat a jellemző keresztmetszeteket is, ahol ki kell számolnunk az igénybevételeket az igénybevételi ábrák megrajzolásához. A jelölt keresztmetszeteket végtelen közel (0 m távolságra) vesszük fel az igénybevételek szempontjából fontos hatásokhoz, a külső és belső reakciókhoz, illetve a tartótengely töréseihez.

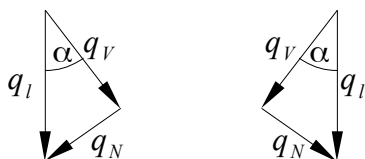


A tartó pozitív oldalát mindkét egyenes szakaszon alul vesszük fel. A bal oldali tartórészen balról és jobbról, illetve a jobb oldali tartórészen balról és jobbról történő számítás során a pozitív igénybevételek irányai az alábbiak szerint értelmezhetők:



Az egyszerűség kedvéért az igénybevételi ábrákra a csuklós-csuklós végű, a tartószerkezet használata során jellemzően csak rúdirányú terhet viselő elemeit nem rajzoljuk be. Ezekben a rúderővel megegyező előjelű és nagyságú normálerő ébred, a nyíróerő és a hajlítónyomaték zérus. Az igénybevételeket az adott keresztmetszetet tartalmazó (I. vagy II. jelű) tartórész egyensúlya alapján számoljuk. Az igénybevételek számítását kezdjük a normálerőkkel! A tartótengely vízszintessel bezárt α szöge helyett számoljuk ki $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ értékeit:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$



A *normálerőábra* mindkét tartórészen két lineáris szakaszból áll. Az ábra meredeksége arányos a megoszló teher tengelyirányú komponensének nagyságával. A megoszló teher tartótengellyel párhuzamos, a normálerőben változást okozó q_N komponensének és a tartótengelyre merőleges, a nyíróerőben változást okozó q_V komponensének értelmezése a két tartórészen a bal oldali ábrán

látható. A q_l teherintenzitás a ferde hossz mentén megoszló teherre vonatkozik. Mivel

$$q_l \cdot 5 = q \cdot 4$$

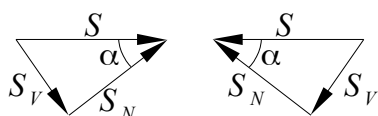
$$q_l = q \cdot \frac{4}{5} = 0,96 \text{ kN/m}$$

A két komponens nagysága trigonometriai összefüggések felhasználásával:

$$q_N = q_l \cdot \sin \alpha = 0,576 \text{ kN/m}$$

$$q_V = q_l \cdot \cos \alpha = 0,768 \text{ kN/m}$$

A rúderő miatt mindkét tartórészen ugrás van a normálerőábrában. Az ugrás nagysága megegyezik a rúderő tengelyirányú komponensének nagyságával:



$$S_N = S \cdot \cos \alpha = 9,6 \cdot 0,8 = 7,68 \text{ kN}$$

(A rúderő tengelyirányra merőleges komponense

$$S_V = S \cdot \sin \alpha = 9,6 \cdot 0,6 = 5,76 \text{ kN}$$

a nyíróerőben okoz változást.)

Mint azt látni fogjuk, a feladatban szereplő normálerőábra megrajzolható az ugrás nagyságának meghatározása nélkül is, de azt érdemes ellenőrizni az ábra elkészítése után.

A K_1 keresztmetszetben balról számolunk. A felfelé mutató A reakció tartótengely irányú komponense nyomást okoz, tehát a normálerő negatív:

$$N_1 = -4,8 \cdot \sin \alpha = -2,88 \text{ kN}$$

A K_2 keresztmetszetben balról számolunk. Hasonló háromszögek alapján a keresztmetszettől balra lévő tartórész vízszintes vetülete 2,667 m. A felfelé mutató A reakció nyomást, a lefelé mutató megoszló teher húzást okoz:

$$N_2 = (-4,8 + 1,2 \cdot 2,667) \cdot \sin \alpha = -0,9598 \text{ kN}$$

A K_3 keresztmetszetben jobbról számolunk. Hasonló háromszögek alapján a keresztmetszettől jobbra lévő tartórész vízszintes vetülete 1,333 m. A balra mutató C reakció és a keresztmetszettől jobbra lévő tartórészre ható megoszló teher egyaránt nyomást okoz:

$$N_3 = -9,6 \cdot \cos \alpha - 1,2 \cdot 1,333 \cdot \sin \alpha = -8,640 \text{ kN}$$

A K_4 keresztmetszetben jobbról számolunk. A balra mutató C reakció nyomást okoz:

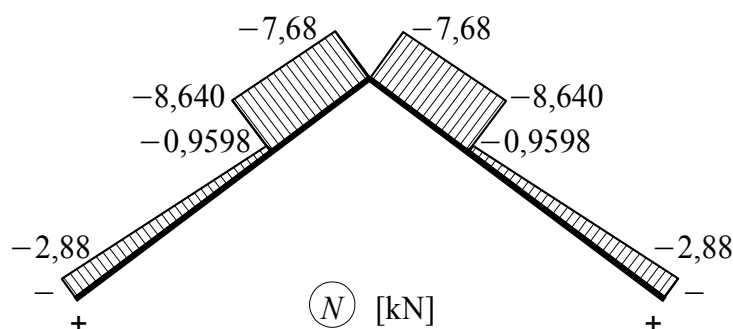
$$N_4 = -9,6 \cdot \cos \alpha = -7,68 \text{ kN}$$

A K_5 keresztmetszetben balról számolunk. A jobbra mutató C reakció nyomást okoz:

$$N_5 = -9,6 \cdot \cos \alpha = -7,68 \text{ kN}$$

A K_6 keresztmetszetben balról számolunk. A jobbra mutató C reakció és a keresztmetszettől balra lévő tartórészre ható megoszló teher egyaránt nyomást okoz:

$$N_6 = -9,6 \cdot \cos \alpha - 1,2 \cdot 1,333 \cdot \sin \alpha = -8,640 \text{ kN}$$



A K_7 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató B reakció nyomást, a lefelé mutató megoszló teher húzást okoz:

$$N_7 = (-4,8 + 1,2 \cdot 2,667) \cdot \sin \alpha = -0,9598 \text{ kN}$$

A K_8 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató B reakció nyomást okoz, tehát a normálerő negatív:

$$N_8 = -4,8 \cdot \sin \alpha = -2,88 \text{ kN}$$

A lineáris szakaszok közötti ugrás nagysága meg kell, hogy egyezzen a rúderő tartótengellyel párhuzamos komponensével, ez egy ellenőrzési lehetőség a normálerőábra megrajzolása után:

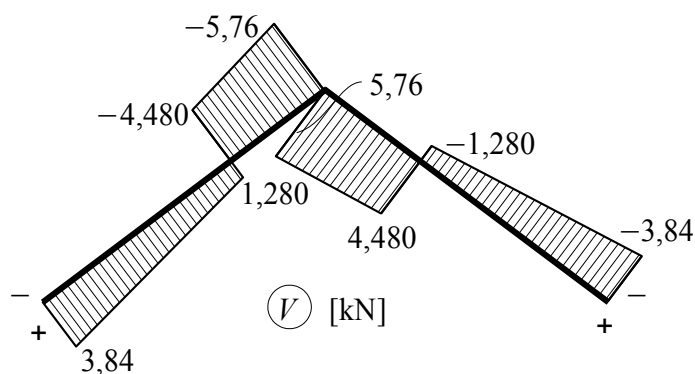
$$-0,9598 - (-8,640) = 7,680 \text{ kN} = S_N$$

A *nyíróerőábra* mindkét tartórészen két lineáris szakaszból áll. Az ábra meredeksége arányos a megoszló teher tartótengelyre merőleges q_v komponensének nagyságával. A rúderő miatt mindkét tartórészen ugrás van a nyíróerőábrában. Az ugrás nagysága megegyezik a rúderő tartótengelyre merőleges komponensének nagyságával. A K_1 keresztmetszetben balról számolunk. A felfelé mutató A reakció tartótengelyre merőleges komponense az előjelszabálynak megfelelően pozitív nyíróerőt okoz:

$$V_1 = 4,8 \cdot \cos \alpha = 3,84 \text{ kN}$$

A K_2 keresztmetszetben balról számolunk. A felfelé mutató A reakció pozitív, a lefelé mutató megoszló teher negatív nyíróerőt okoz:

$$V_2 = (4,8 - 1,2 \cdot 2,667) \cdot \cos \alpha = 1,280 \text{ kN}$$



A K_3 keresztmetszetben jobbról számolunk. A balra mutató C reakció negatív, a keresztmetszettől jobbra lévő tartórészre ható megoszló teher pozitív nyíróerőt okoz:

$$V_3 = -9,6 \cdot \sin \alpha + 1,2 \cdot 1,333 \cdot \cos \alpha = -4,480 \text{ kN}$$

A K_4 keresztmetszetben jobbról számolunk. A balra mutató C reakció negatív nyíróerőt okoz:

$$V_4 = -9,6 \cdot \sin \alpha = -5,76 \text{ kN}$$

A K_5 keresztmetszetben balról számolunk. A jobbra mutató C reakció pozitív nyíróerőt okoz:

$$V_5 = 9,6 \cdot \sin \alpha = 5,76 \text{ kN}$$

A K_6 keresztmetszetben balról számolunk. A jobbra mutató C reakció pozitív, a keresztmetszettől balra lévő tartórészre ható megoszló teher negatív nyíróerőt okoz:

$$V_6 = 9,6 \cdot \sin \alpha - 1,2 \cdot 1,333 \cdot \cos \alpha = 4,480 \text{ kN}$$

A K_7 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató B reakció negatív, a lefelé mutató megoszló teher pozitív nyíróerőt okoz:

$$V_7 = (-4,8 + 1,2 \cdot 2,667) \cdot \cos \alpha = -1,280 \text{ kN}$$

A K_8 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató B reakció negatív nyíróerőt okoz:

$$V_8 = -4,8 \cdot \cos \alpha = -3,84 \text{ kN}$$

A lineáris szakaszok közötti ugrás nagysága meg kell, hogy egyezzen a rúderő tartótengelyre merőleges komponensével, ez egy ellenőrzési lehetőség a nyíróerőábra megrajzolása után:

$$1,280 - (-4,480) = 5,76 \text{ kN} = S_V$$

A *nyomatéki ábra* mindkét tartórészen két másodfokú szakaszból áll. A rúderő törést okoz az ábrában. A nyomaték értéke a csuklós támaszoknál és a belső csuklónál zérus:

$$M_1 = M_4 = M_5 = M_8 = 0 \text{ kNm}$$

A rúderő támadáspontjával szomszédos K_2 és K_3 keresztmetszetekben balról számolva az A reakcióból származó hajlítónyomaték a tartó pozitív oldalán, a megoszló teherből származó hajlítónyomaték a tartó negatív oldalán okoz húzást (a K_3 keresztmetszetben alulról számolva a nyomatékot, az S erő karja 0 m):

$$M_2 = M_3 = 4,8 \cdot 2,667 - \frac{1,2 \cdot 2,667^2}{2} = 8,534 \text{ kNm}$$

Hasonlóan a K_6 és K_7 keresztmetszetekben jobbról számolva a B reakcióból származó hajlítónyomaték a tartó pozitív oldalán, a megoszló teherből származó hajlítónyomaték a tartó negatív oldalán okoz húzást:

$$M_6 = M_7 = 4,8 \cdot 2,667 - \frac{1,2 \cdot 2,667^2}{2} = 8,534 \text{ kNm}$$

A másodfokú szakaszok belógásának számításához szükség van a ferde tengelyszakaszok hosszára. A rúd alatti és feletti tartórészek tengelyhossza:

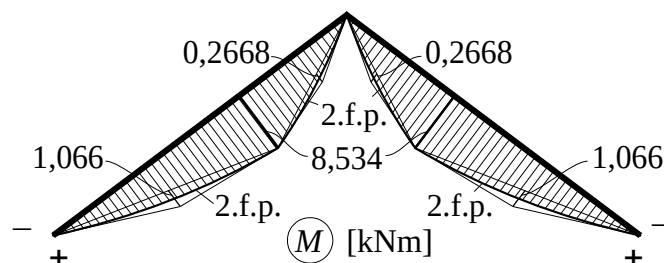
$$l_{12} = l_{78} = \frac{2}{3} \cdot 5 = 3,333 \text{ m} \quad l_{34} = l_{56} = \frac{1}{3} \cdot 5 = 1,667 \text{ m}$$

A belógás számításánál a megoszló erő tartótengelyre merőleges komponensét kell figyelembe venni. Belógás a rúd alatti szakaszokon:

$$\frac{q_V \cdot l_{12}^2}{8} = \frac{0,768 \cdot 3,333^2}{8} = 1,066 \text{ kNm}$$

Belógás a rúd feletti szakaszokon:

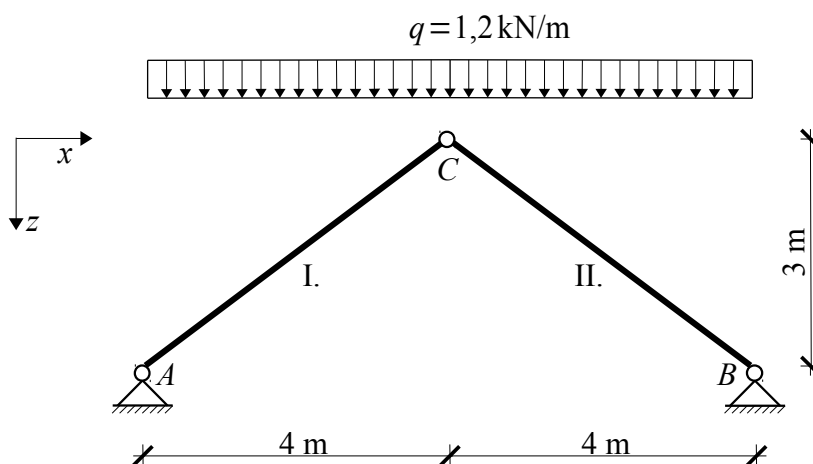
$$\frac{q_V \cdot l_{34}^2}{8} = \frac{0,768 \cdot 1,667^2}{8} = 0,2668 \text{ kNm}$$



Megjegyezzük, hogy szimmetrikus tengelyű tartókra ható szimmetrikus erőrendszerek (az aktív terheket és a reakciókat is beleértve) szimmetrikus normálerőábrát és hajlítónyomatéki ábrát, illetve antiszimmetrikus nyíróerőábrát eredményeznek. Utóbbi azt jelenti, hogy a szimmetria szerint egymásnak megfelelő keresztmetszetekben a nyíróerő abszolútértéke megegyezik, előjele viszont ellentétes.

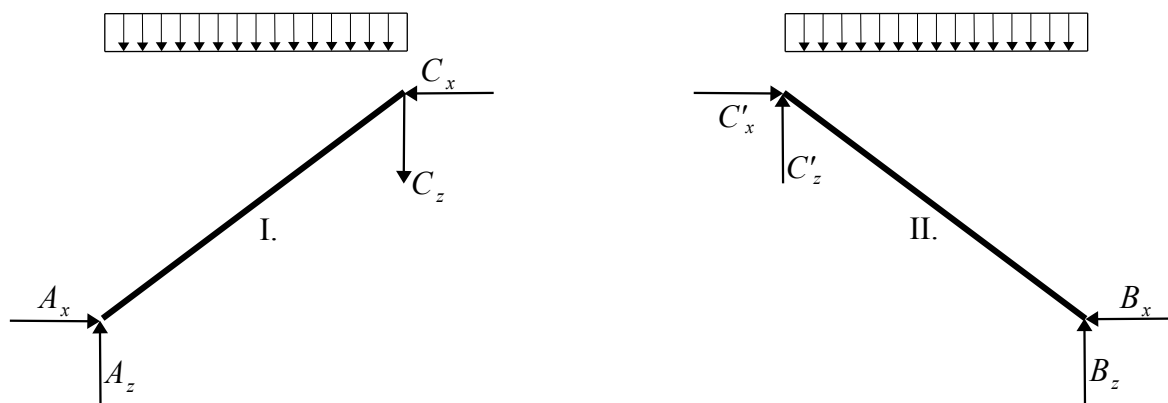
Gyakorló példa -1

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentések:

I.: e. i. új i.
 II.:
 Sz.:

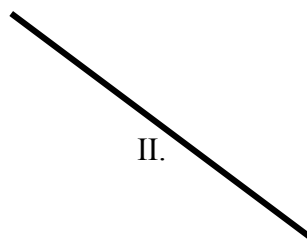
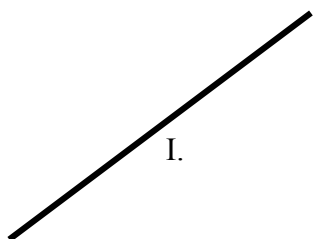
Megoldás számítással:

$$\sum$$

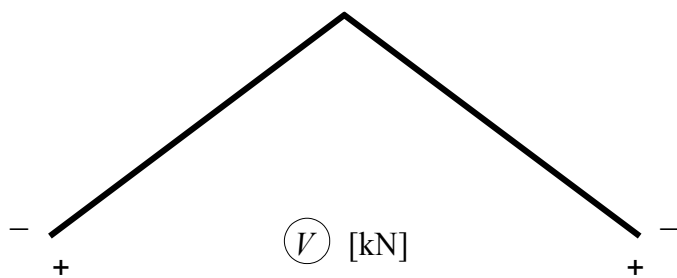
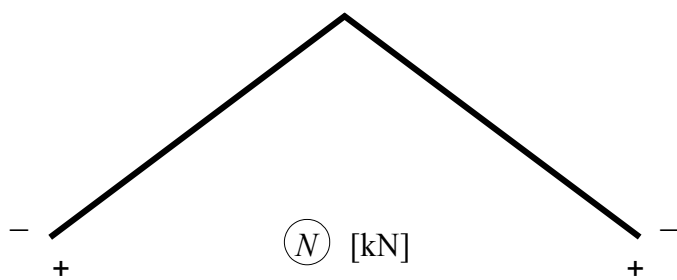
$$\sum$$

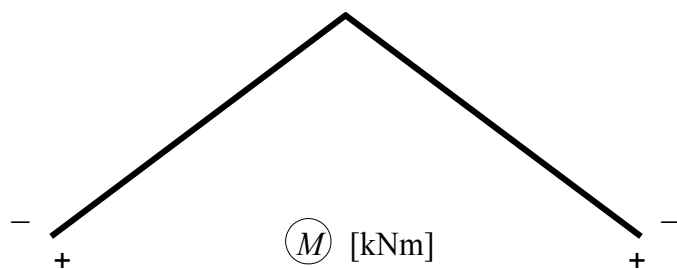
Σ
 Σ
 Σ
 Σ

Eredményvázlat a reakciókkal:



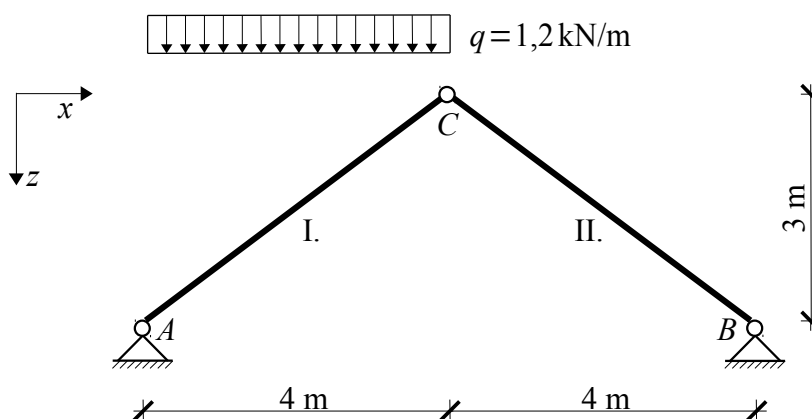
Igénybevételi ábrák





Mintapélda - 2

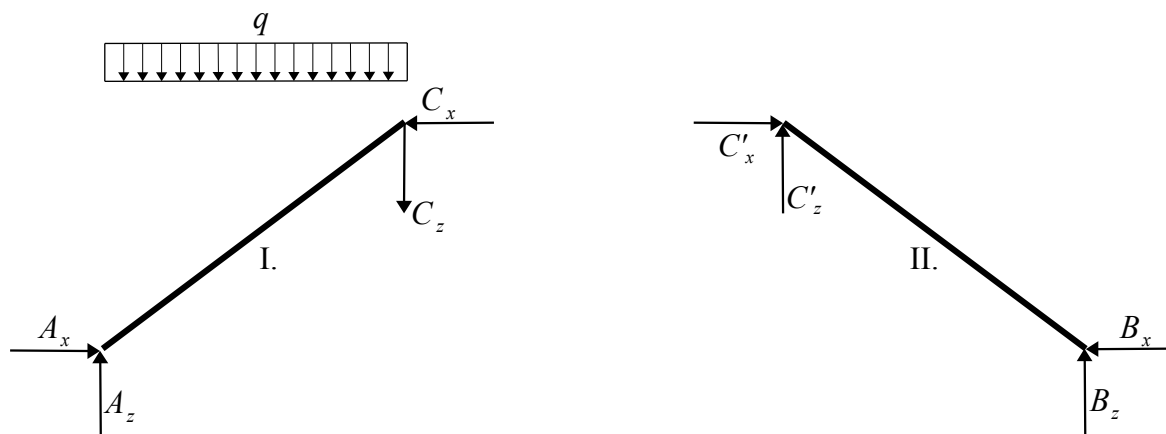
Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Az első lépés a reakciók meghatározása. Az elkülönítés során a jobb oldali tartórészt annak ellenére elkülönítjük, hogy csak két erő hat rá. Ennek oka, hogy a vizsgált statikai modell egy tetőszerkezet statikai vázának felel meg és a két tartórész jellemző terhe (hó vagy szélteher) hajlítást okoz mindkét tartórészen (például az 1. gyakorló példában vagy a 25. munkafüzet 3. gyakorló példájában). A feladatban szereplő terhelés a szabványokban is megjelenő féloldalas hótehernek felel meg. A megoldás természetesen akkor is jó eredményt szolgáltatna, ha a terheletlen jobb oldali tartórészt nem különítenénk el és rúdként kezelnénk.

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentések:

	e.	i.	új i.
I.: $((q), A, C) \doteq 0$	3	4	4
II.: $(C', B) \doteq 0$	3	4	2
Sz.: $((q), A, B) \doteq 0$	(3)	3	

Reakciók számítása

$$\text{Sz. } \sum M_i^{(A)}: -1,2 \cdot 4 \cdot 2 + B_z \cdot 8 = 0 \rightarrow B_z = 1,2 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\text{Sz. } \sum M_i^{(B)}: 1,2 \cdot 4 \cdot 6 - A_z \cdot 8 = 0 \rightarrow A_z = 3,6 \text{ kN} (\uparrow)$$

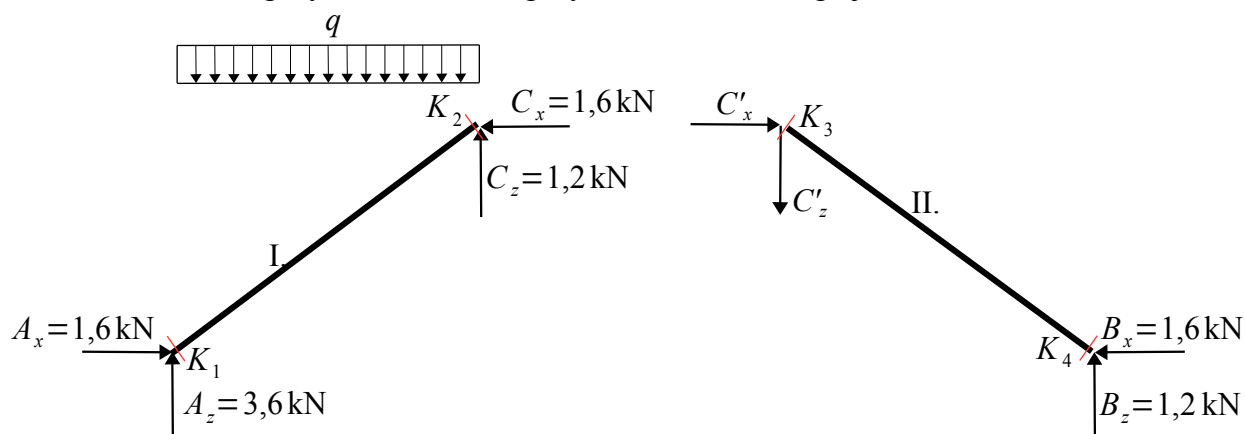
$$\text{II. } \sum M_i^{(C)}: 1,2 \cdot 4 - B_x \cdot 3 = 0 \rightarrow B_x = 1,6 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\text{Sz. } \sum F_{ix}: A_x - 1,6 = 0 \rightarrow A_x = 1,6 \text{ kN} (\rightarrow)$$

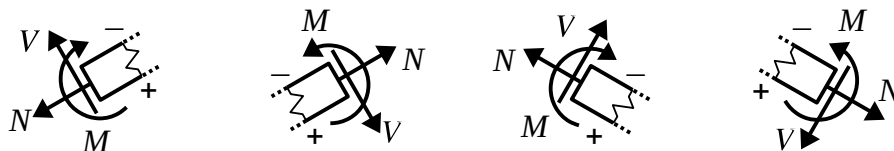
$$\text{II. } \sum F_{ix}: C'_x - 1,6 = 0 \rightarrow C'_x = 1,6 \text{ kN} (\rightarrow) \quad C_x = 1,6 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\text{II. } \sum F_{iz}: -C'_z - 1,2 = 0 \rightarrow C'_z = -1,2 \text{ kN} (\downarrow) \quad C_z = -1,2 \text{ kN} (\uparrow)$$

A következő ábrán a reakciókon kívül feltüntettük azokat a jellemző keresztmetszeteket is, ahol ki kell számolnunk az igénybevételeket az igénybevételi ábrák megrajzolásához.

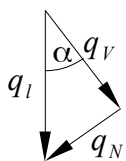


A tartó pozitív oldalát alul vesszük fel. A bal oldali tartórészen balról és jobbról, illetve a jobb oldali tartórészen balról és jobbról történő számítás során a pozitív igénybevételek irányai az alábbiak szerint értelmezhetők:



Az igénybevételeket az adott keresztmetszetet tartalmazó (I. vagy II. jelű) tartórész egyensúlya alapján számoljuk. Az igénybevételek számítását kezdjük a normálerővel! A tartótengely vízszintessel bezárt α szöge helyett számoljuk ki $\cos \alpha$ és $\sin \alpha$ értékeit:

$$\cos \alpha = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \sin \alpha = \frac{3}{5} = 0,6$$



A normálerőábra a bal oldali tartórészen egy lineáris, a jobb oldali tartórészen egy konstans szakaszból áll. A bal oldalon az ábra meredeksége arányos a megoszló teher tengelyirányú komponensének nagyságával. A megoszló teher tartótengellyel párhuzamos, a normálerőben változást okozó q_N komponensének és a tartótengelyre merőleges, a nyírőerőben változást okozó q_V komponensének értelmezése a bal oldali ábrán látható, számításukat az 1. mintapéldában részletesen bemutattuk.

A K_1 keresztmetszetben balról számolunk. A felfelé mutató A_z reakciókomponens és a jobbra mutató A_x reakciókomponens egyaránt nyomást okoz, tehát a normálerő

negatív:

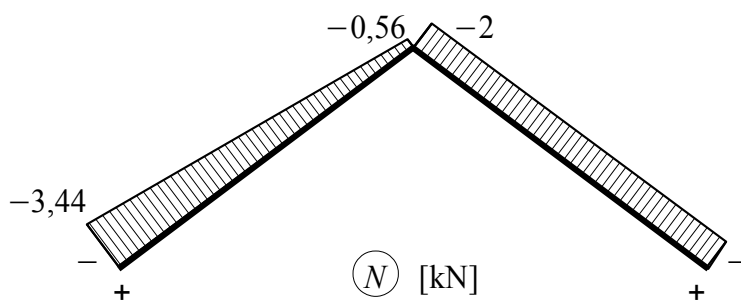
$$N_1 = -3,6 \cdot \sin \alpha - 1,6 \cdot \cos \alpha = -3,44 \text{ kN}$$

A K_2 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató C_z reakciókomponens húzást, a balra mutató C_x reakciókomponens nyomást okoz:

$$N_2 = 1,2 \cdot \sin \alpha - 1,6 \cdot \cos \alpha = -0,56 \text{ kN}$$

A K_3 és K_4 keresztmetszetekben balról számolunk. A lefelé mutató C'_z reakciókomponens és a jobbra mutató C'_x reakciókomponens egyaránt nyomást okoz:

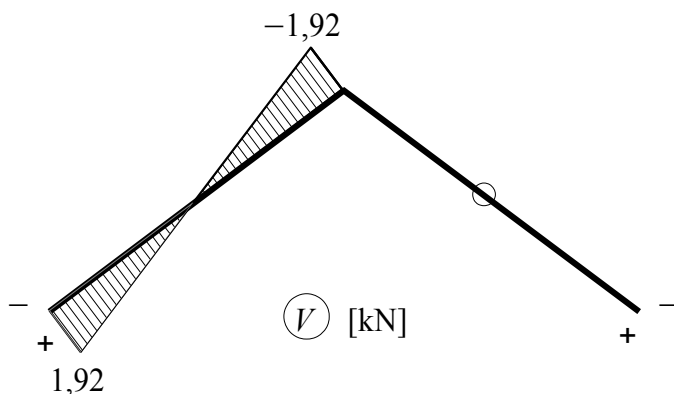
$$N_3 = N_4 = -1,2 \cdot \sin \alpha - 1,6 \cdot \cos \alpha = -2 \text{ kN}$$



A nyírőerőábra a bal oldali tartórészen lineáris, a jobb oldali tartórészen konstans.

A K_1 keresztmetszetben balról számolunk. A felfelé mutató A_z reakciókomponens pozitív, a jobbra mutató A_x reakciókomponens negatív nyírőerőt okoz:

$$V_1 = 3,6 \cdot \cos \alpha - 1,6 \cdot \sin \alpha = 1,92 \text{ kN}$$



A K_2 keresztmetszetben jobbról számolunk. A felfelé mutató C_z reakciókomponens és a balra mutató C_x reakciókomponens egyaránt negatív nyírőerőt okoz:

$$V_2 = -1,2 \cdot \cos \alpha - 1,6 \cdot \sin \alpha = -1,92 \text{ kN}$$

A K_3 és K_4 keresztmetszetekben balról számolunk. A lefelé mutató C'_z reakciókomponens negatív, a jobbra mutató C'_x reakciókomponens pozitív nyíróerőt okoz:

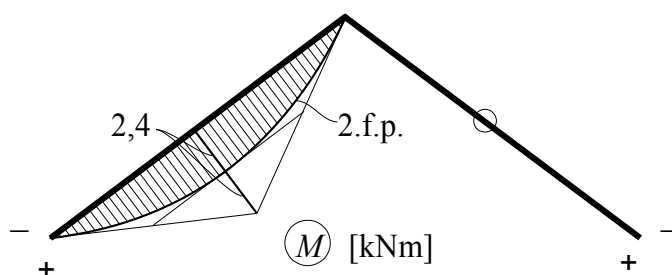
$$V_3 = V_4 = -1,2 \cdot \cos \alpha + 1,6 \cdot \sin \alpha = 0 \text{ kN}$$

A hajlítónyomatéki ábra a bal oldali tartórészen másodfokú, a jobb oldali tartórészen lineáris. A tartó végpontjaiban és a belső csuklónál a nyomaték értéke zérus.

A bal oldali részen a parabola belógását a megoszló teher tartótengelyre merőleges komponenséből számoljuk:

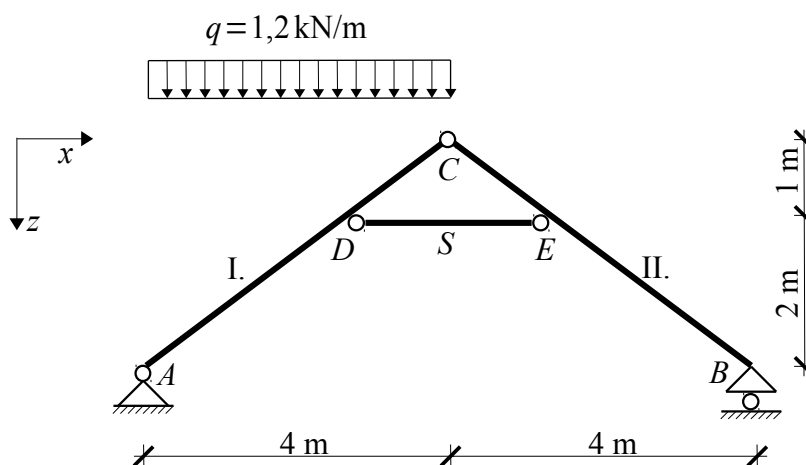
$$\frac{q_V \cdot l_{12}^2}{8} = \frac{0,768 \cdot 5^2}{8} = 2,4 \text{ kNm}$$

A jobb oldali tartórészen a nyíróerő értéke és így a nyomatéki ábra meredeksége is zérus, tehát a hajlítónyomaték értéke a két végén lévő csuklónál érvényes zérus nyomatékok között végig zérus.



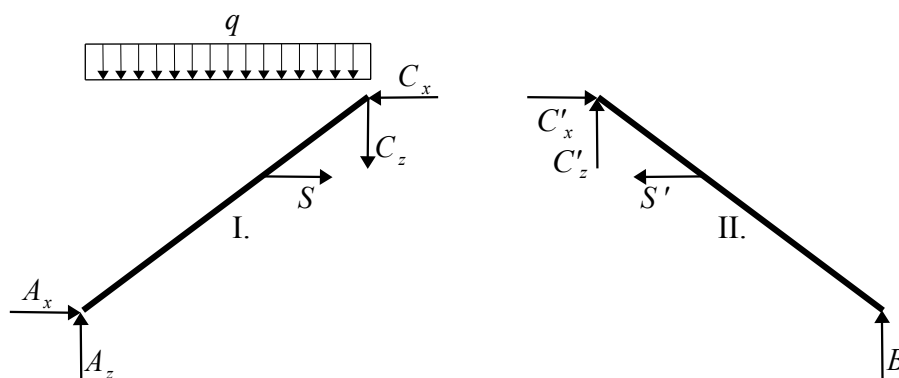
Gyakorló példa -2

Határozzuk meg az ábrán látható tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Elkülönítés:



Egyensúlyi kijelentések:

e.

i.

új i.

I.:

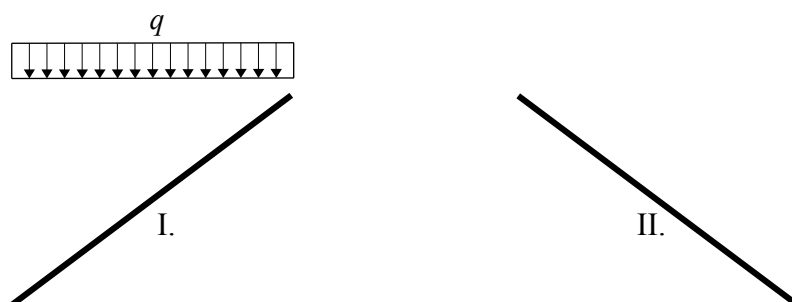
II.:

Sz.:

Megoldás számítással:

$$\begin{array}{c} \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \\ \Sigma \end{array}$$

Eredményvázlat a reakciókkal:



Igénybevételi ábrák:

