

Mérnöki létesítmények geodéziája

**Regresszió számítás alkalmazása
mérnöki létesítmények minőség-
ellenőrzésében, regressziós egyenes,
sík, kör**

Siki Zoltán

siki.zoltan@emk.bme.hu

Regresszió számítás

Mérnöki létesítmények ellenőrzése, terveknek megfelelése

Deformációvizsgálat

Geodéziai mérések – pontok helyzete, pontszerű információ

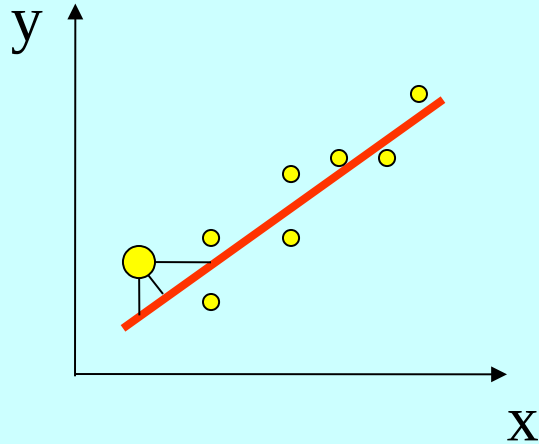
Lineáris regresszió

Regressziós sík

Regressziós görbe, kör

Legkisebb négyzetek módszere (Lagrange multiplikátor)

Lineáris regresszió I.



$$y = m \cdot x + b \quad m = ? \quad b = ?$$

Korrelációs együttható x és y közötti kapcsolat szorossága

$$r_{x,y} = \frac{c_{x,y}}{\sigma_x \cdot \sigma_y}; c_{x,y} = \frac{\sum (x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})}{n-1}$$

1. Csak az y értékek terheltek hibával

$$y_i + v_i = m \cdot x_i + b; \sum v_i^2 = v^* \cdot v = \min! \Rightarrow d(vv) = 2 v^* dv = 0$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 1 \\ x_2 & 1 \\ \dots & \dots \\ x_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \quad v = A \cdot x - l \Rightarrow dv = A \cdot dx$$

Lineáris regresszió I. folyt.

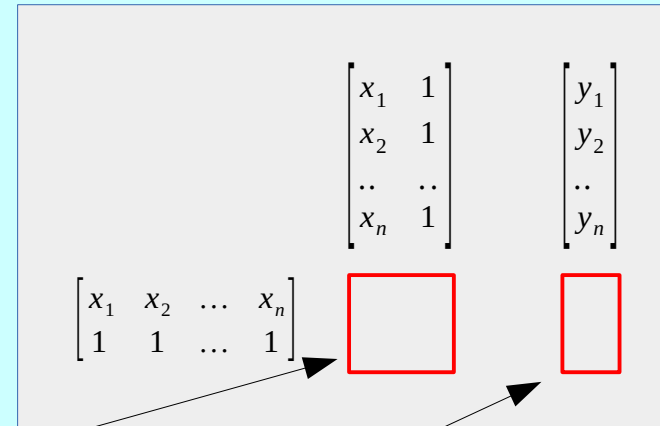
$$2v \cdot dv = 2v \cdot A \cdot dx = 0$$

$$v \cdot A = 0 \text{ transzponálás után } A' \cdot v = 0$$

$$\text{mivel } v = A \cdot x - l$$

$$A \cdot v = A' \cdot (A \cdot x - l) = A' \cdot A \cdot x - A' \cdot l = 0$$

$$x = (A' \cdot A)^{-1} \cdot (A' \cdot l)$$

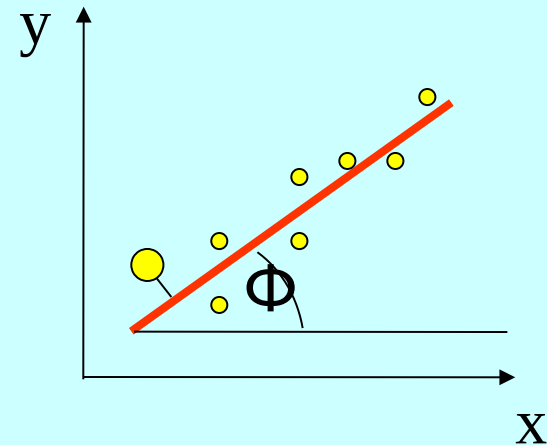


$$A' \cdot A = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i & n \end{bmatrix} \quad A' \cdot l = \begin{bmatrix} \sum x_i y_i \\ \sum y_i \end{bmatrix} \quad \text{súlyponti kr. } \begin{cases} \sum x s_i = 0 \\ \sum y s_i = 0 \end{cases}$$

$$b s = 0 \quad m s = \frac{\sum x s_i \cdot y s_i}{\sum x s_i^2} \Rightarrow m = m s \quad b = y s - m \cdot x s$$

$$m = r_{x,y} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \quad \text{korrelációs együtthatóból} \quad \sigma_y = \sqrt{\frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n-1}}$$

Lineáris regresszió II.



v_i – távolság az egyenestől

$$v_{xi} = -v_i \cdot \sin(\phi) \quad v_{yi} = v_i \cdot \cos(\phi)$$

$$y_i + v_{yi} = m \cdot (x_i + v_{xi}) + b \quad m = \tan \phi$$

$$y_i + v_i \cdot \cos \phi = \tan \phi \cdot (x_i - v_i \cdot \sin \phi) + b$$

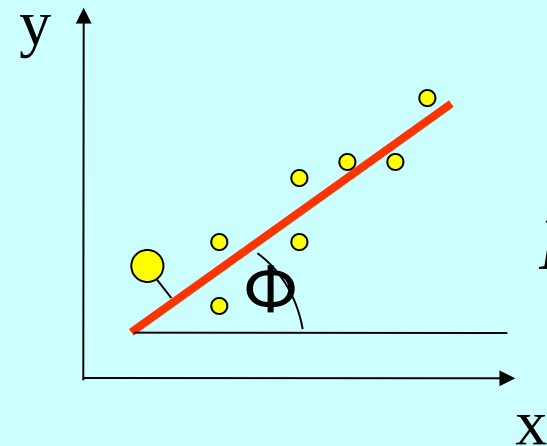
$$v_i \cdot \cos \phi + v_i \cdot \sin \phi \cdot \tan \phi = b + x_i \cdot \tan \phi - y_i \quad v_i \text{ kiemelése}$$

$$v_i \cdot \left(\cos \phi + \sin \phi \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right) = b + x_i \cdot \tan \phi - y_i \quad \tan \Phi = \sin \Phi / \cos \Phi$$

$$v_i \cdot \frac{\cos \phi}{\cos \phi} \cdot \left(\cos \phi + \sin \phi \cdot \frac{\sin \phi}{\cos \phi} \right) = b + x_i \cdot \tan \phi - y_i \quad * \cos \Phi / \cos \Phi$$

$$\frac{v_i}{\cos \phi} = b + x_i \cdot \tan \phi - y_i \Rightarrow v_i = b \cdot \cos \phi + x_i \cdot \sin \phi - y_i \cdot \cos \phi \quad * \cos \Phi$$

Lineáris regresszió III.



$$v_i = b \cdot \cos \phi + x_i \cdot \sin \phi - y_i \cdot \cos \phi$$

$$F = \sum v_i^2 = \sum (b \cdot \cos \phi + x_i \cdot \sin \phi - y_i \cdot \cos \phi)^2 = \min!$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \cdot \sum (b \cdot \cos \phi + x_i \cdot \sin \phi - y_i \cdot \cos \phi) \cdot \cos \phi = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = 2 \cdot \sum (b \cdot \cos \phi + x_i \cdot \sin \phi - y_i \cdot \cos \phi) \cdot (-b \cdot \sin \phi + x_i \cdot \cos \phi + y_i \cdot \sin \phi) = 0$$

$$n \cdot b \cdot \cos \phi + \sum x_i \cdot \sin \phi - \sum y_i \cdot \cos \phi = 0$$

$$\sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2 \right) + \sum x_i \cdot y_i \cdot \sin^2 \phi - \cos^2 \phi \sum x_i \cdot y_i = 0$$

Lineáris regresszió IV. folyt.

$$n \cdot b \cdot \cos \phi + \sum x_i \cdot \sin \phi - \sum y_i \cdot \cos \phi = 0$$

$$\sin \phi \cdot \cos \phi \cdot \left(\sum x_i^2 - \sum y_i^2 \right) + \sum x_i \cdot y_i \cdot \sin^2 \phi - \cos^2 \phi \sum x_i \cdot y_i = 0$$

Súlyponti koordinátákra áttérve:

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha \quad \text{és} \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

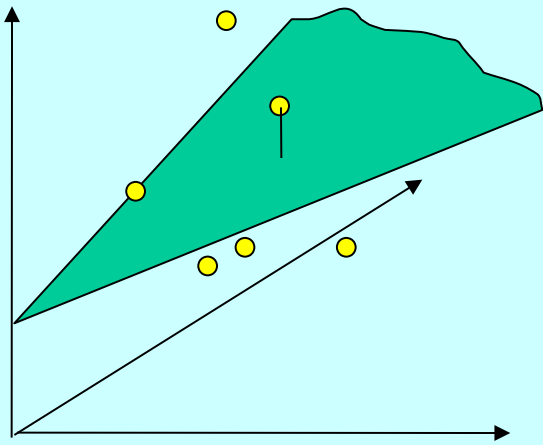
$n \cdot b \cdot \cos \phi = 0 \Rightarrow b = 0$ a súlyponton átmegy

$$\frac{1}{2} \sin 2\phi \cdot \left(\sum xs_i^2 - \sum ys_i^2 \right) - \cos 2\phi \sum xs_i \cdot ys_i = 0$$

$$\phi = \frac{1}{2} \arctan \frac{2 \sum xs_i \cdot ys_i}{\sum xs_i^2 - \sum ys_i^2} \Rightarrow m = \tan \phi$$

$$b = ys - m \cdot xs$$

Regressziós sík



$$z = a \cdot x + b \cdot y + c$$

$$z_i + v_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i + c$$

$$v_i = a \cdot x_i + b \cdot y_i + c - z_i$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ x_n & y_n & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \dots \\ z_n \end{bmatrix}$$

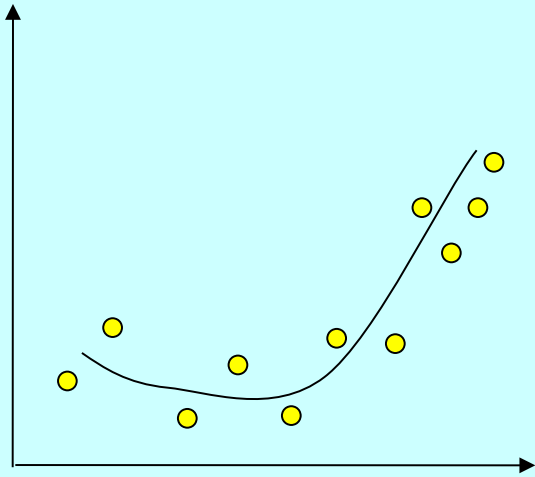
$$\sum v_i^2 = \min!$$

$$A'A = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 & \sum x_i y_i & \sum x_i \\ \sum x_i y_i & \sum y_i^2 & \sum y_i \\ \sum x_i & \sum y_i & n \end{bmatrix} \quad A'l = \begin{bmatrix} \sum x_i z_i \\ \sum y_i z_i \\ \sum z_i \end{bmatrix}$$

súlyponti koordinátákra $c=0$

$$\begin{bmatrix} \sum x s_i^2 & \sum x s_i y s_i \\ \sum x s_i y s_i & \sum y s_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sum x s_i z s_i \\ \sum y s_i z s_i \end{bmatrix} = 0$$

Regressziós polinom

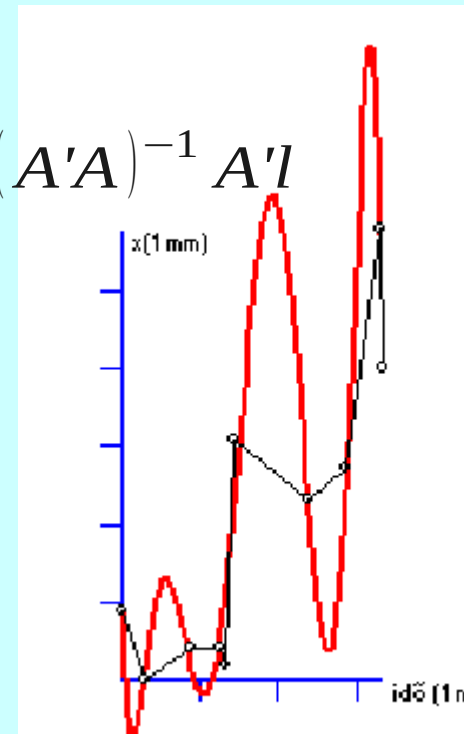


$$y = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \dots + a_n \cdot x^n = \sum a_i x^i$$

$$y_i + v_i = a_0 + a_1 \cdot x_i + a_2 \cdot x_i^2 + \dots + a_n \cdot x_i^n$$

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_m & \dots & x_m^n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_m \end{bmatrix} \quad v = Ax - l \quad x = (A'A)^{-1} A'l$$

Rosszul kondicionált egyenletrendszer



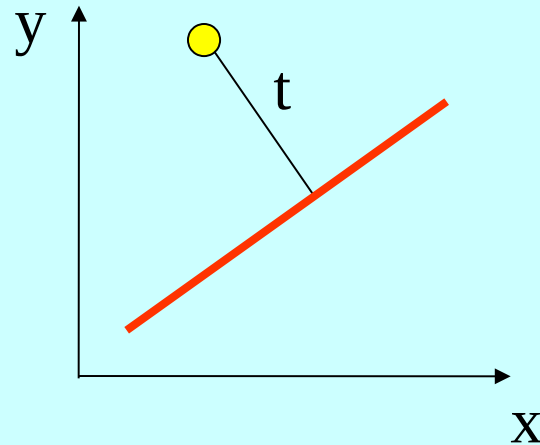
Távolság számítás

Pont-egyenes távolság

$$t_i = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

egyenes egyenlet

$$a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

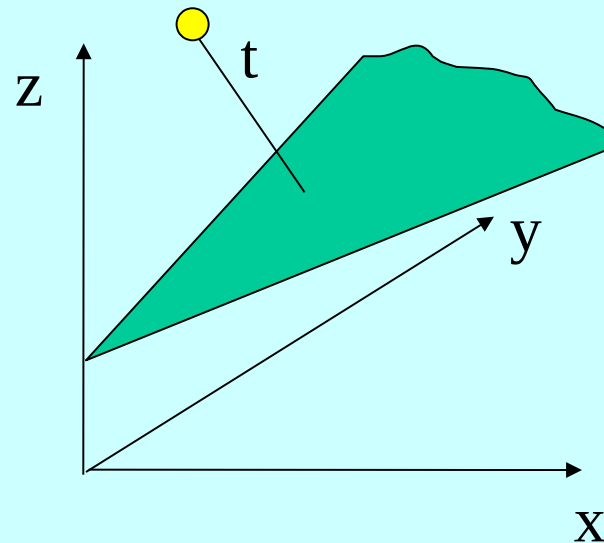


Pont-sík távolság

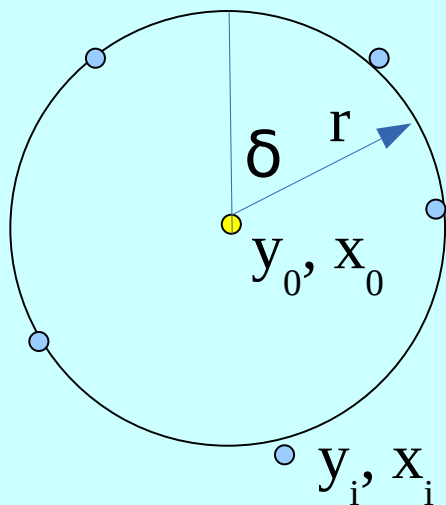
$$t_i = \frac{a \cdot x_i + b \cdot y_i + c \cdot z_i + d}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

sík egyenlet

$$a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$$



Kiegyenlítő kör I.



$$(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = r^2$$

Nem lineáris összefüggések

Ismeretlenek y_0 , x_0 , r

Megoldás iterációval

Iterációs megoldás a kör paraméteres egyenlete alapján

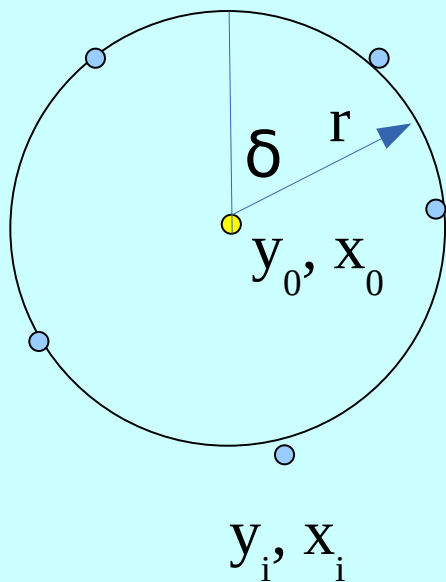
$$y = y_0 + r * \sin(\delta)$$

$$x = x_0 + r * \cos(\delta)$$

→ Előzetes középpont, sugár és középponti szögek (δ) számítása

→ Kiegyenlítés y_0 , x_0 , r értékekre (lineáris feladat)

Kiegyenlítő kör II.



$$(y-y_0)^2 + (x-x_0)^2 = r^2$$

$$x^2 - 2x x_0 + x_0^2 + y^2 - 2y y_0 + y_0^2 = r^2$$

$$y^2 + x^2 - 2x_0 x - 2y_0 y + x_0^2 + y_0^2 - r^2 = 0$$

$$a_1 = -2x_0$$

$$a_2 = -2y_0$$

$$a_3 = x_0^2 + y_0^2 - r^2$$

$$y^2 + x^2 + a_1 x + a_2 y + a_3 = 0$$

Pontonként egy egyenlet $y_i^2 + x_i^2 + a_1 x_i + a_2 y_i + a_3 = 0$

a_1, a_2, a_3 ismeretlenek meghatározása legkisebb négyzetek módszerével

$$x_0 = -0.5 a_1, \quad y_0 = -0.5 a_2, \quad r = ((a_1^2 + a_2^2) / 4 - a_3)^{1/2}$$

Periodikus függvények

Például idősorok elemzése, éves/évszakos/napos periódusok

Pl. a mérés időpontja és a pont magassága közötti periódusosság

Fourier sor

$$s(x) = \frac{a_0}{2} + \sum a_i \cdot \cos n x - \sum b_i \cdot \sin n x$$

Feltételezzük, hogy évesnél hosszabb periódus nincsen

$$x = (t - t_0) \cdot \frac{2\pi}{365}$$

t a mérés időpontja nap egységben
 t_0 az első mérés időpontja napokban

Ismeretlenek az a_i , b_i együtthatók (lineáris egyenletrendszer)

Gyors Fourier transzformáció