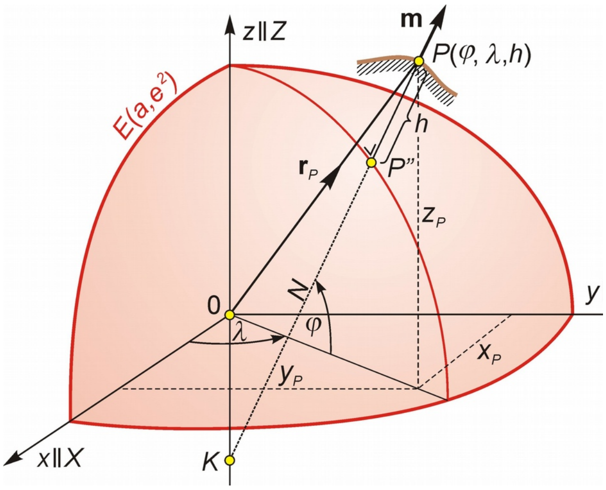
Ellipszoidi földrajzi koordináták számítása

Az ellipszoidi földrajzi koordináták és az ellipszoid feletti magasság adathármasa, az ellipszoid geometriai jellemzőivel együttesen, a helyvektorral egyenértékű teljes körű térbeli helymeghatározást ad tisztán *geometriai* rendszerben. Kapcsolatukat az *1. ábra* mutatja.



1. ábra.

A térbeli derékszögű és az ellipszoidi földrajzi koordináták kapcsolata.

Ha ellipszoidunkat a térbeli derékszögű koordináta-rendszer tengelyeire illesztettük (vagyis az ellipszoid geometriai középpontja egybeesik a térbeli derékszögű koordináta-rendszer kezdőpontjával), akkor valamely térbeli P pont $\mathbf{r}_\mathrm{P}$ helyvektora a pont P'' ellipszoidi megfelelőjének $\mathbf{r}_{P''}$ helyvektora és a pont h ellipszoidi magasságának megfelelő $h\,\mathbf{m}$ vektor $\mathbf{r}_\mathrm{P}=\mathbf{r}_{P''}+h\,\mathbf{m}$ összegeként állítható elő, ahol $\mathbf{m}$ a P pont ellipszoidi felületi normálisának egységvektora, és

$$r_{P''}=N\begin{bmatrix}\cos\varphi\cos\lambda\\ \cos\varphi\sin\lambda\\ \sin\varphi\end{bmatrix}, \qquad (1)$$

ahol

$$N=\frac{a}{\left(1-e^2\sin^2\varphi\right)^{1/2}} \qquad \text{és} \qquad e^2=\frac{a^2-b^2}{a^2} \qquad (2)$$

az a fél nagytengely- és b fél kistengely-hosszúságú ellipszoid harántgörbületi sugara ill. (első) numerikus excentricitásának négyzete.

Ezekkel a φ, λ, h ellipszoid felületi koordinátájú P pont helyvektora

$$\mathbf{r}_\mathrm{P}=\begin{bmatrix}(N+h)\;\cos\varphi\;\;\cos\lambda\\ (N+h)\;\cos\varphi\;\;\sin\lambda\\ \left[\left(1-e^2\right)\,N+h\right]\;\sin\varphi\end{bmatrix}. \qquad (3)$$

A pont ψ geocentrikus szélességét a $\psi=\operatorname{arctg} z_P/\sqrt{x_P^2+y_P^2}$ összefüggéssel, míg geocentrikus távolságát az $r_P=\sqrt{x_P^2+y_P^2+z_P^2}$ képlettel számíthatjuk ki.

A feladat visszafelé, többféle módszerrel oldható meg. A nehézséget a φ ellipszoidi földrajzi szélesség számítása okozza, ugyanis a φ -re az N számításához is szükség van. A megoldás zárt alakban, közelítés nélkül, negyedfokú algebrai egyenlet gyökeként is kifejezhető (*Paul* 1973), a gyakorlatban azonban általánosan *Bowring* (1976) közelítő eljárása terjedt el. Ennek első lépéseként kiszámítjuk a Θ segédszöget:

$$\operatorname{tg}\Theta=\frac{z\cdot a}{p\cdot b} \qquad (4)$$

ahol $p=\sqrt{x^2+y^2}$ a $P(x,y,z)$ pont z tengelytől mért távolsága és $b=a\sqrt{1-e^2}$ az ellipszoid fél kistengelyének hossza. A Θ ismeretében a φ ellipszoidi földrajzi szélesség a földfelszín közelében lévő P pontra igen jó közelítéssel a

$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{z + e'^2 b \sin^3 \Theta}{p - e^2 a \cos^3 \Theta} \tag{5}$$

összefüggéssel számítható ki, ahol $e'^2 = e^2/(1-e^2) = (a^2-b^2)/b^2$ a második numerikus excentricitás négyzete. Az ellipszoidi földrajzi szélesség ismeretében a másik két koordináta már nehézség nélkül kiszámítható:

$$\mathrm{tg}\,\lambda = \frac{y}{x} \tag{6}$$

$$h = \frac{p}{\cos\varphi} - N \tag{7}$$

Az ellipszoid *φ*, *λ*, *h* ellipszoid felületi koordinátájú *P* pontjában az *M* meridián irányú görbületi sugár számítási összefüggése:

$$M = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \sin^2 \varphi)^{3/2}} \tag{8}$$

A Gauss-féle *R* középgörbületi sugár a két főgörbületi sugár geometriai középértéke: $R = \sqrt{MN}$.