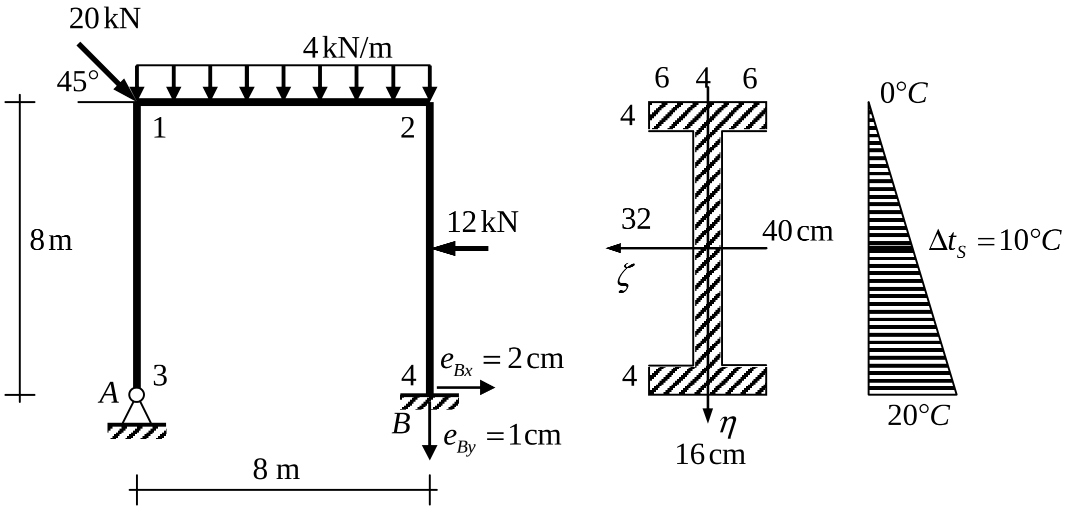
Tartók statikája: síkbeli keretek

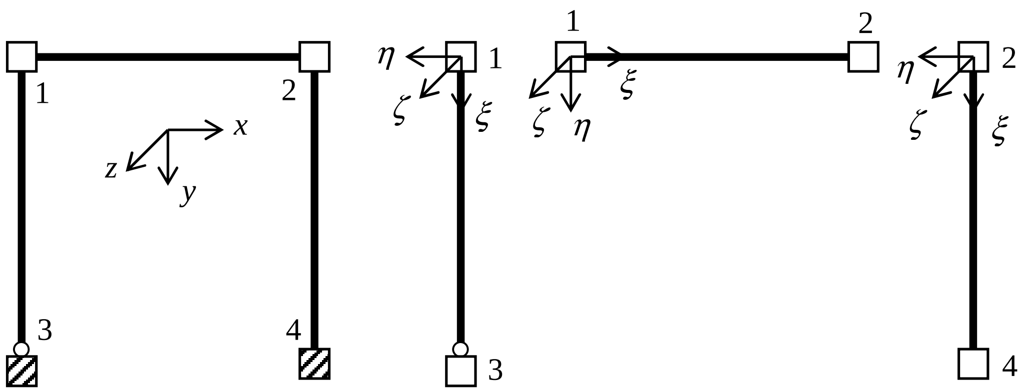
Határozzuk meg az alábbi keret **Kv = q** egyenletrendszerének vektorait és mátrixait! Teher: erő, támaszelmozdulás (*B*) és hőmérsékleti (1-2). $E = 200\,\text{GPa}$, $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\,/\,°C$



Törzstartó

2 belső csomópont ($c = 2$), 3 rúd ($r = 3$).
A lokális és globális koordináta-rendszerek:

tartó síkja: (x, y), rudak síkja a lokális rendszerekben: (ξ, η).



A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$A = 16 \cdot 40 - 12 \cdot 32 = 256\,\text{cm}^2$, $I_\zeta = \dfrac{1}{12}\left(16 \cdot 40^3 - 12 \cdot 32^3\right) = 52565\,\text{cm}^4$.

Húzómerevség: $EA = 5{,}12 \cdot 10^6\,\text{kN}$, hajlítómerevség: $EI_\zeta = 105130\,\text{kNm}^2$.

Koordináta-transzformáció

$$\mathbf{T}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{T}_{1,3} = \mathbf{T}_{2,4} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Állapotváltozók

Elmozdulások:

$$\underset{(c\times 3)}{\mathbf{v}} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} v_{1x} \\ v_{1y} \\ \varphi_{1z} \end{bmatrix},\ \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} v_{2x} \\ v_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{bmatrix}$$

Rúderők:

$$\underset{(r\times 3)}{\mathbf{s}} = \begin{bmatrix} \mathbf{s}_{12} \\ \mathbf{s}_{13} \\ \mathbf{s}_{24} \end{bmatrix},\ \mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} N_{2\xi} \\ T_{2\eta} \\ M_{2\zeta} \end{bmatrix},\ \mathbf{s}_{13} = \begin{bmatrix} N_{3\xi} \\ T_{3\eta} \\ M_{3\zeta} \end{bmatrix},\ \mathbf{s}_{24} = \begin{bmatrix} N_{4\xi} \\ T_{4\eta} \\ M_{4\zeta} \end{bmatrix}$$

Tehervektor:

$$\underset{(c\times 3)}{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ W_{1z} \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_2 = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ W_{2z} \end{bmatrix}$$

A tehervektor számítása

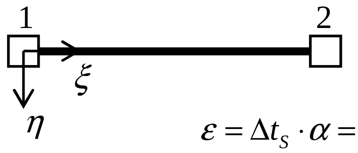
Terhek redukálása a csomópontokra. Index: alsó: csomópont, felső: teher helye.

Közvetlen csomóponti terhek:
Csak az 1. csomóponton működik erő, ezért:

$$\mathbf{q}_1^{csp} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ W_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14,14 \\ 14,14 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{q}_2^{csp} = \begin{bmatrix} F_{2x} \\ F_{2y} \\ W_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Rúdterhek:

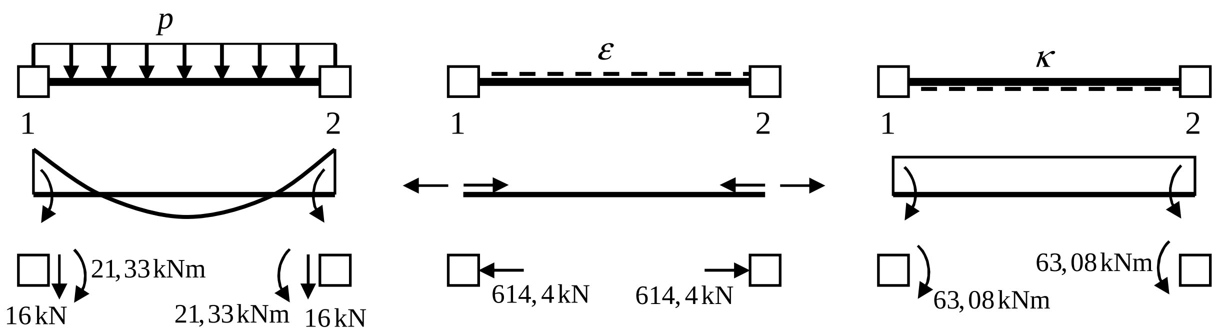
1-2 rúd: erőteher, egyenletes hőmérsékletváltozás és egyenlőtlen hőmérsékletváltozás.



$$F_1 = F_2 = \frac{1}{2} pl = 16\,\text{kN} \qquad M_1 = -M_2 = \frac{1}{12} pl^2 = 21,33\,\text{kNm}$$

$$\varepsilon = \Delta t_S \cdot \alpha = 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 1,2 \cdot 10^{-4} \qquad N = EA\varepsilon = 5,12 \cdot 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-4} = 614,4\,\text{kN}$$

$$\kappa = \frac{\Delta t}{h}\alpha = \frac{20}{0,4} \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} = 6 \cdot 10^{-4} \qquad M = EI\kappa = 105130 \cdot 0,0006 = 63,08\,\text{kNm}$$



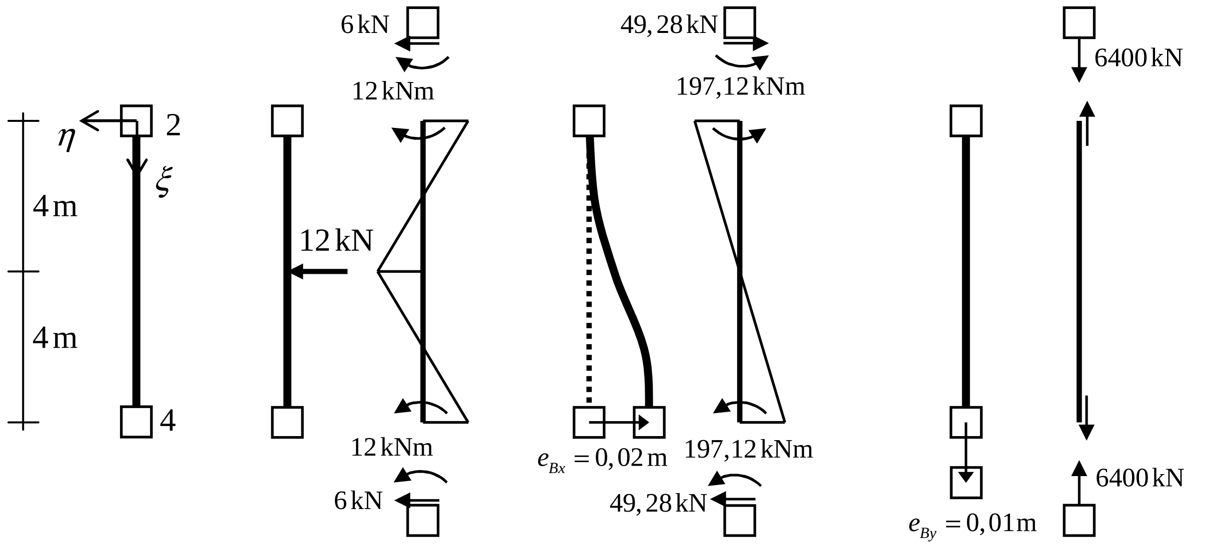
A lokális koordináta-rendszer azonos a globálissal.

$$\mathbf{q}_1^{1,2}=\begin{bmatrix}F_{1\xi}\\F_{1\eta}\\W_{1\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{1x}\\F_{1y}\\W_{1z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-614,40\\16,00\\21,33+63,08\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-614,40\\16,00\\84,41\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{q}_2^{1,2}=\begin{bmatrix}F_{2\xi}\\F_{2\eta}\\W_{2\zeta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\\W_{2z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}614,40\\16,00\\-21,33-63,08\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}614,40\\16,00\\-84,41\end{bmatrix},$$

1-3 rúd: terheletlen.

2-4 rúd: erőteher, kétirányú támaszelmozdulás.



$$F_2=F_4=\frac{F}{2}=6\,\mathrm{kN}\qquad -T_2=T_4=\frac{12EI}{l^3}e_{Bx}=49,28\,\mathrm{kN}\qquad N_2=-N_4=$$

$$M_2=-M_4=\frac{1}{8}Fl=12\,\mathrm{kNm}\qquad M_2=M_4=-\frac{6EI}{l^2}e_{Bx}=-197,12\,\mathrm{kNm}\qquad =\frac{EA}{l}e_{By}=6400\,\mathrm{kN}$$

Koordináta-transzformáció szükséges:

$$\mathbf{q}_2^{2,4}=\begin{bmatrix}F_{2x}\\F_{2y}\\W_{2z}\end{bmatrix}=\mathbf{T}_{2,4}\begin{bmatrix}F_{2\xi}\\F_{2\eta}\\W_{2\zeta}\end{bmatrix}=\mathbf{T}_{2,4}\begin{bmatrix}6400\\6-49,28\\12-197,12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6400,00\\-43,28\\-185,12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}43,28\\6400,00\\-185,12\end{bmatrix}$$

Az egyenletrendszerhez ugyan nem szükséges, de a igénybevételek későbbi számításához felhasználjuk a 4. csomópontra redukált terheket is:

$$\mathbf{q}_4^{2,4}=\mathbf{T}_{2,4}\begin{bmatrix}-6400\\6+49,28\\-12-197,12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-6400,00\\55,28\\-209,12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-55,28\\-6400,00\\-209,12\end{bmatrix}$$

A teljes tehervektor

$$\mathbf{q}_1=\begin{bmatrix}14,14\\14,14\\0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-614,40\\16,00\\84,41\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-600,26\\30,14\\84,41\end{bmatrix},\ \mathbf{q}_2=\begin{bmatrix}614,40\\16,00\\-84,41\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}43,28\\6400,00\\-185,12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}657,68\\6416,00\\-269,53\end{bmatrix},\ \mathbf{q}=\begin{bmatrix}-600,26\\30,14\\84,41\\657,68\\6416,00\\-269,53\end{bmatrix}$$

A rudak elemi merevségi mátrixai

1-2 és 2-4 rúd lokális mátrixai: (befogott-befogott)

$$\mathbf{k}_{12}^{\xi\eta\zeta}=\mathbf{k}_{24}^{\xi\eta\zeta}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}\frac{EA}{l}&0&0&-\frac{EA}{l}&0&0\\ &\frac{12EI_\zeta}{l^3}&\frac{6EI_\zeta}{l^2}&0&-\frac{12EI_\zeta}{l^3}&\frac{6EI_\zeta}{l^2}\\ & &\frac{4EI_\zeta}{l}&0&-\frac{6EI_\zeta}{l^2}&\frac{2EI_\zeta}{l}\\ \hdashline & & &\frac{EA}{l}&0&0\\ &\text{szimm.}& & &\frac{12EI_\zeta}{l^3}&-\frac{6EI_\zeta}{l^2}\\ & & & & &\frac{4EI_\zeta}{l}\end{array}\right]$$

$$\mathbf{k}_{12}^{\xi\eta\zeta}=\mathbf{k}_{24}^{\xi\eta\zeta}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}640000&0&0&-640000&0&0\\ &2464&9856&0&-2464&9856\\ & &52565&0&-9856&26283\\ \hdashline & & &640000&0&0\\ &\text{szimm.}& & &2464&-9856\\ & & & & &52565\end{array}\right]$$

Az 1-2 rudat nem kell transzformálni.

A 2-4 rúd forgatása a globális koordináta-rendszerbe:

$$\mathbf{k}_{24}^{xyz}=\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{24}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{T}_{24}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{k}_{24}^{\xi\eta\zeta}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{T}_{24}^{\mathrm{T}}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{T}_{24}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc:ccc}2464&0&-9856&-2464&0&-9856\\ &640000&0&0&-640000&0\\ & &52565&9856&0&26283\\ \hdashline & & &2464&0&-9856\\ &\text{szimm.}& & &640000&0\\ & & & & &52565\end{array}\right]$$

1-3 rúd lokális mátrixai: (befogott-csuklós)

$$\mathbf{k}_{13}^{\xi\eta\zeta} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \frac{3EI_\zeta}{l^3} & \frac{3EI_\zeta}{l^2} & 0 & -\frac{3EI_\zeta}{l^3} & 0 \\ & & \frac{3EI_\zeta}{l} & 0 & -\frac{3EI_\zeta}{l^2} & 0 \\ \hdashline & & & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ & \text{szimm.} & & & \frac{3EI_\zeta}{l^3} & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

$$\mathbf{k}_{13}^{\xi\eta\zeta} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 640000 & 0 & 0 & -640000 & 0 & 0 \\ & 616 & 4928 & 0 & -616 & 0 \\ & & 39424 & 0 & -4928 & 0 \\ \hdashline & & & 640000 & 0 & 0 \\ & \text{szimm.} & & & 616 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

Az 1-3 rúd forgatása a globális koordináta-rendszerbe:

$$\mathbf{k}_{13}^{xyz} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{13} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{13} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{k}_{13}^{\xi\eta\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{13}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_{13}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 616 & 0 & -4928 & -616 & 0 & 0 \\ & 640000 & 0 & 0 & -640000 & 0 \\ & & 39424 & 4928 & 0 & 0 \\ \hdashline & & & 616 & 0 & 0 \\ & \text{szimm.} & & & 640000 & 0 \\ & & & & & 0 \end{array}\right]$$

A teljes szerkezet merevségi mátrixa

Az elemi merevségi mátrixok blokkszerkezete:

$$\mathbf{k}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{11} & \mathbf{k}_{12}^{12} \\ \mathbf{k}_{12}^{21} & \mathbf{k}_{12}^{22} \end{bmatrix},\ \mathbf{k}_{13} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{13}^{11} & \mathbf{k}_{13}^{13} \\ \mathbf{k}_{13}^{31} & \mathbf{k}_{13}^{33} \end{bmatrix},\ \mathbf{k}_{24} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{24}^{22} & \mathbf{k}_{24}^{24} \\ \mathbf{k}_{24}^{42} & \mathbf{k}_{24}^{44} \end{bmatrix}$$

A teljes merevségi mátrix:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{11} + \mathbf{k}_{13}^{11} & \mathbf{k}_{12}^{12} \\ \mathbf{k}_{12}^{21} & \mathbf{k}_{12}^{22} + \mathbf{k}_{24}^{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:ccc} 640616 & 0 & -4928 & -640000 & 0 & 0 \\ & 642464 & 9856 & 0 & -2464 & 9856 \\ & & 91989 & 0 & -9856 & 26283 \\ \hdashline & & & 642464 & 0 & -9856 \\ & \text{szimm.} & & & 642464 & -9856 \\ & & & & & 105130 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszer

Az egyensúlyi egyenletrendszer alakja: **Kv = q**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 640616 & 0 & -4928 & -640000 & 0 & 0 \\ & 642464 & 9856 & 0 & -2464 & 9856 \\ & & 91989 & 0 & -9856 & 26283 \\ \hline & & & 642464 & 0 & -9856 \\ & \text{szimm.} & & & 642464 & -9856 \\ & & & & & 105130 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c} v_{1x} \\ v_{1y} \\ \varphi_{1z} \\ \hline v_{2x} \\ v_{2y} \\ \varphi_{2z} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r} -600,26 \\ 30,14 \\ 84,41 \\ \hline 657,68 \\ 6416,00 \\ -269,53 \end{array}\right]$$

Az egyenletrendszer megoldása:

$$\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} 0,022251 \\ 0,00003954 \\ 0,003257 \\ 0,023185 \\ 0,01003256 \\ -0,0002675 \end{bmatrix}$$

A rúdvégi igénybevételek számítása

$$\mathbf{s}_{12} = \begin{bmatrix} N_2 \\ T_2 \\ M_2 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}_2^{12} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{12}^{21,\xi} & \mathbf{k}_{12}^{22,\xi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} & \\ & \mathbf{T}_{12}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -614,4 \\ -16 \\ 84,41 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 597,915 \\ -4,839 \\ -26,957 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -16,485 \\ -20,839 \\ 57,454 \end{bmatrix}$$

Itt $\mathbf{T}_{12}$ egységmátrix!

A 1-3 rúd számításánál a 3. csp. elmozdulásait 0-nak kell tekinteni: $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{s}_{13} = \begin{bmatrix} N_3 \\ T_3 \\ M_3 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}_3^{13} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{13}^{31,\xi} & \mathbf{k}_{13}^{33,\xi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{13}^{\mathrm{T}} & \\ & \mathbf{T}_{13}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -25,303 \\ -2,343 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25,303 \\ -2,343 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A 2-4 rúd számításánál a 4. csp. elmozdulásait 0-nak kell tekinteni: $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$:

$$\mathbf{s}_{24} = \begin{bmatrix} N_4 \\ T_4 \\ M_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{q}_4^{24} + \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{24}^{42,\xi} & \mathbf{k}_{24}^{44,\xi} \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \mathbf{T}_{24}^{\mathrm{T}} & \\ & \mathbf{T}_{24}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_4 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 6400,00 \\ -55,28 \\ 209,12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6420,839 \\ 59,764 \\ -235,542 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20,839 \\ 4,484 \\ -26,422 \end{bmatrix}.$$

A normálerő két nagy szám kis különbségeként áll elő, ezért nagyon érzékeny az elmozdulások számítási pontosságára!

Ezek után megrajzolhatók az igénybevételi ábrák és statikai egyenletekkel lehet ellenőrizni a csomópontok és a rudak egyensúlyát.