

9. gyakorlat: Számpéldák az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése témaköréből

A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:

1 db tudományos zsebszámológép

A gyakorlat tartalma:

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése különböző, valamint egyenlő súlyú mérési eredmények esetén. A példák megoldása során lehetőleg használjuk a zsebszámológép statisztikai funkcióit.

A súly és a középhiba összefüggése:

$$p_1 : p_2 = \frac{1}{m_1^2} : \frac{1}{m_2^2} = m_2^2 : m_1^2 \quad m_1 : m_2 = \frac{1}{\sqrt{p_1}} : \frac{1}{\sqrt{p_2}} = \sqrt{p_2} : \sqrt{p_1}$$

$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2}$$

Az egyetlen mennyiségre végzett közvetlen mérések kiegyenlítése:

Sorszám	A számítás lépései és jelölésük	Különböző súlyok	Azonos (egységnyi) súlyok
1.	kiegyenlített érték $\hat{L}; \bar{L}$ (azonos súlyok)	$\hat{L} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i L_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$	$\bar{L} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n}$
2.	kiegyenlített érték súlya $p_L; p_L$ (azonos súlyok)	$p_L = \sum_{i=1}^n p_i$	$p_L = \sum_{i=1}^n p_i = n$
3.	javítások v_i ellenőrzés: a számítás élességén belül	$v_i = \hat{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^n p_i v_i = 0$	$v_i = \bar{L} - L_i$ $\sum_{i=1}^n v_i = 0$
4.	súlyegység középhibája $\bar{\mu}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i v_i^2}{n-1}}$	$\bar{\mu} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n v_i^2}{n-1}}$
5.	kiegyenlített érték középhibája $m_L; m_L$ (azonos súlyok)	$m_L = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_L}}$	$m_L = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_L}}$
6.	az egyes mérési eredmények középhibája m_i	$m_i = \frac{\bar{\mu}}{\sqrt{p_i}}$	$m_i = \bar{\mu}$

A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:

Krauter: Geodézia (15-35. oldal)

A gyakorlathoz kapcsolódó számpéldák:

1. példa

A súly és a középhiba összefüggése

$$m_1 = \pm 1,9 \text{ cm} \quad m_2 = \pm 3,3 \text{ cm}$$

$$p_1 = ? \quad p_2 = ?$$

Legyen: $p_2=1$, ugyanis $m_2 > m_1$, így p_1 egynél nagyobb szám lesz, egyszerűbb lesz a későbbi számolás.

$$p_1 : 1 = 3,3^2 : 1,9^2 = 3,02 \approx 3 \text{ cm}^{-2}, \text{ vagyis } p_1 = 3 \text{ cm}^{-2} \quad p_2 = 1 \text{ cm}^{-2}$$

2. példa

Két alappont távolságát két különböző távmérőműszerrel határoztuk meg. Az alábbi mérési eredmények, és a középhibák alapján számítsa ki a távolság legvalószínűbb értékét és annak középhibáját.

L_i [m]	m_i [mm]	\hat{L}_i [mm]	p_i [mm ⁻²]	$p_i L_i$ [mm ⁻¹]	v_i [mm]	$p_i \cdot v_i$ [mm ⁻¹]	$p_i \cdot v_i^2$ [-]
316,343	3	43	25	1075	-2,13	-53,25	113,42
316,339	3	39	25	975	+1,87	+46,75	87,42
316,345	5	45	9	405	-4,13	-37,17	153,51
316,336	5	36	9	324	+4,87	43,83	213,45
Σ			68	2779		0,16 \approx 0	567,80

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a centimétereket és a millimétereket – használjuk.

Az a priori súlyegység középhiba legyen $3 \times 5 = 15$, mert így a súlyok egész számok lesznek (a középhibák legkisebb közös többszöröse).

A számítás eredményei:

1. $\hat{L} = 316,300 + 0,04126 = 316,34087 \text{ m}$

2. $p_L = 68 \text{ mm}^{-2}$

3. v_i (a táblázatban), ellenőrzés: $\Sigma p_i v_i \approx 0 \text{ mm}^{-1}$

4. $\mu = \pm 13,75$

5. $m_L = \pm 1,67 \text{ mm}$

6. $m_1 = \pm 2,75 \text{ mm} \quad m_2 = \pm 2,75 \text{ mm} \quad m_3 = \pm 4,58 \text{ mm} \quad m_4 = \pm 4,58 \text{ mm}$

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

A helyes végeredmény tehát: **316,341 m \pm 1,7 mm.** Figyeljünk az eredmény élességére!

3. példa

A mérési eredmények azonos súlyúak

L_i [° ' '']	L'_i ["=mp]	v_i [mp ⁻¹]	v_i^2 [-]
25-44-15	15	-1,0	1,0
25-44-11	11	+3,0	9,0
25-44-20	20	-6,0	36,0
25-44-10	10	+4,0	16,0
Σ	56	0,0	62,0

Az egyszerűbb számítás érdekében a mérési eredményekből csak a megváltozó értékeket – esetünkben a másodperceket – használjuk.

Az számítás eredményei:

1. $\hat{L} = 25-44-00 + 14,0'' = 25-44-14$
2. $p_L = 4 \text{ mp}^{-2}$
3. v_i (a táblázatban), ellenőrzés: $\Sigma v_i = 0,0 \text{ mp}^{-1}$
4. $\mu = \pm 4,5$
5. $m_L = \pm 2,2''$
6. $m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = \mu = \pm 4,5''$

Láthatjuk, hogy a kiegyenlített érték középhibája kisebb lett, mint az egyes mérések középhibája.

4. példa

Hányszor kell a szöget megmérni, ha azt akarjuk, hogy a középérték középhibája kisebb legyen $\pm 2''$ -nél?

Egy mérés középhibája: $m_{van} = \pm 4,5''$

A középérték szükséges középhibája: $m_{kell} = \pm 2,0''$

$$m_{kell} = \frac{m_{van}}{\sqrt{n}}$$

$$n = \frac{m_{van}^2}{m_{kell}^2} = \frac{4,5^2}{2,0^2} = 5,06$$

Vagyis 6-szor kell a szöget megmérnünk.

Minden alkalommal felfelé kell kerekíteni, mert:

$$n = 5 \text{ esetén } \bar{m}_{kell} = \frac{\bar{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \frac{4,5}{\sqrt{5}} = 2,01 > 2,0$$

$$n = 6 \text{ esetén } \bar{m}_{kell} = \frac{\bar{m}_{van}}{\sqrt{n}} = \frac{4,5}{\sqrt{6}} = 1,84 < 2,0$$