

## 10. gyakorlat: Számpéldák a hibaterjedés témaköréből

### A gyakorlathoz szükséges felszerelés hallgatónként:

1 db tudományos zsebszámológép

### A gyakorlat tartalma:

A hibaterjedés általános képlete és alkalmazása egyszerűbb esetekre. Számpéldák az egyszerűbb esetekre és összetett geodéziai (geometriai) jellegű feladatokra.

### A gyakorlat előtt elolvasásra javasolt irodalom:

Krauter: Geodézia (15-35. oldal)

### A gyakorlathoz kapcsolódó számpéldák:

Az  $L_i$  mérési eredményekből levezethető  $G$  függvényérték középhibája a mérési eredményekhez tartozó  $m_i$  középhibák ismeretében a következőképpen számítható ki:

$$m_G = \sqrt{g_1^2 m_1^2 + g_2^2 m_2^2 + \dots + g_i^2 m_i^2 + \dots + g_n^2 m_n^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^n g_i^2 m_i^2}$$

ahol a  $g_i = \frac{\partial G}{\partial L_i}$ , a  $G$  függvény  $L_i$  változó szerinti parciális deriváltja ( $i = 1 \dots n$ )

Amennyiben a súly ismert, akkor a következőképpen végezhetjük el a számítást:

$$\frac{1}{p_G} = g_1^2 \frac{1}{p_1} + g_2^2 \frac{1}{p_2} + \dots + g_i^2 \frac{1}{p_i} + \dots + g_n^2 \frac{1}{p_n} = \sum_{i=1}^n g_i^2 \frac{1}{p_i}$$

### 1. példa

#### A mérési eredmény többszörösének a középhibája:

$$G = k \cdot L_1 \quad (k \text{ konstans})$$

$$g_1 = k$$

$$m_G^2 = \sqrt{k^2 \cdot m_1^2} = k \cdot m_1$$

Egy földrészlet területe  $T = 200 \text{ öl} \pm 0,5 \text{ öl}$ . Mekkora a földrészlet területe négyzetméterben és mennyi ennek a középhibája? ( $1 \text{ öl} = 3,596 \text{ 650 955 m}^2$ )

$$G = T \text{ [m}^2] = k \cdot T \text{ [öl]} = 3,596 \text{ 650 955} \cdot 200 = 719,330 \text{ m}^2 \approx 719 \text{ m}^2$$

$$g_T = k \cdot m_T = 3,596 \text{ 650 955} \cdot 0,5 = 1,8 \text{ m}^2$$

### 2. példa

#### Összeg vagy különbség középhibája:

$$G = L_1 + L_2 \text{ vagy } L_1 - L_2$$

$$g_1 = 1 \quad g_2 = 1 \text{ vagy } g_2 = -1$$

$$m_G = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}, \text{ ha } m_1 = m_2 = m, \text{ akkor } m_G = m \sqrt{2}$$

Egy távolságot két részletben tudtunk megmérni, az alábbi középhibákkal:  $t_{AB} = 111,23 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}$ ;  $t_{BC} = 222,32 \text{ m} \pm 0,05 \text{ m}$ . Mekkora a  $t_{AC}$  távolság és ennek középhibája?

$$t_{AC} = t_{AB} + t_{BC} = 111,23 + 222,32 = 333,55 \text{ m}$$

$$g_1 = 1 \quad g_2 = 1$$

$$m_{t_{AC}} = \sqrt{m_{t_{AB}}^2 + m_{t_{BC}}^2} = \sqrt{0,01^2 + 0,05^2} = \pm 0,051 \text{ m}$$

### 3. példa

**Számtani közép középhibája azonos súlyok esetén:**

$$G = L = \frac{L_1 + L_2 + \dots + L_i + \dots + L_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^n L_i}{n}$$

$$g_1 = g_2 = g_i = g_n = \frac{1}{n}$$

(Az azonos súlyok miatt:  $m_1 = m_2 = m_i = m_n = m$ )

$$m_G = m_L = \sqrt{\frac{1}{n^2} m^2 + \frac{1}{n^2} m^2 + \dots + \frac{1}{n^2} m^2} = \sqrt{n \left( \frac{1}{n^2} m^2 \right)} = \frac{m}{\sqrt{n}}$$

A számtani közép súlya:

(Azonos súlyok:  $p = p_1 = p_2 = \dots = p_i = \dots = p_n = 1$ )

$$\frac{1}{p_G} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} + \dots + \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1}{1} = \frac{1}{n} \quad (p_G = p_i = n)$$

Egy vízszintes szöget ötször mértünk meg, egy iránymérés középhibája  $m_l = \pm 3''$ . Mekkora lesz a számtani közép középhibája és súlya?

Egyetlen megmért vízszintes szög középhibája:

$$m_\alpha = \sqrt{2} m_l = \pm 4,2''$$

$$m_G = \frac{m_\alpha}{\sqrt{5}} = \pm 1,9''$$

$$p_G = n \cdot p = 5 \cdot 1 = 5 \text{ mp}^{-2}$$

### 4. példa

**Szorzat középhibája**

$$G = L_1 L_2$$

$$g_1 = L_2 \quad g_2 = L_1$$

$$m_G = \sqrt{L_2^2 m_1^2 + L_1^2 m_2^2}$$

Egy téglalap alakú földrészlet területét kell meghatároznunk. A két oldalát különböző középhibával tudjuk csak megmérni:

$$a = 165,30 \text{ m} \pm 0,10 \text{ m}; \quad b = 11,53 \text{ m} \pm 0,01 \text{ m}.$$

Mekkora a téglalap területe és annak középhibája?

$$T = a \cdot b = 165,30 \cdot 11,53 = 1905,9 \text{ m}^2 \approx 1906 \text{ m}^2$$

$$g_1 = b \quad g_2 = a$$

$$m_T = \sqrt{b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2} = \sqrt{11,53^2 \cdot 0,10^2 + 165,30^2 \cdot 0,01^2} = \pm 2,02 \text{ m}^2$$

Amennyiben az  $a$  oldalt mértük volna pontosabban:  $\pm 0,01$  m középhibával, a  $b$  oldalt pedig csak  $\pm 0,10$  m középhibával, hogyan alakulna a terület középhibája?

$$m_T = \sqrt{b^2 m_a^2 + a^2 m_b^2} = \sqrt{11,53^2 \cdot 0,10^2 + 165,30^2 \cdot 0,01^2} = \pm 16,57 \text{ m}^2$$

### 5. példa

**Egy háromszög területének, valamint a terület középhibájának kiszámítása:**

$$a = 46,253 \text{ m} \pm 5 \text{ mm}$$

$$b = 53,854 \text{ m} \pm 5 \text{ mm}$$

$$\gamma = 55-19-40 \pm 30''.$$

$$G = T = \frac{a \cdot b \cdot \sin \gamma}{2} = 1024,29 \text{ m}^2$$

$$g_a = \frac{b \cdot \sin \gamma}{2}$$

$$g_b = \frac{a \cdot \sin \gamma}{2}$$

$$g_\gamma = \frac{a \cdot b \cdot \cos \gamma}{2}$$

$$m_a = \sqrt{\left(\frac{b \cdot \sin \gamma}{2}\right)^2 \cdot m_a^2 + \left(\frac{a \cdot \sin \gamma}{2}\right)^2 \cdot m_b^2 + \left(\frac{a \cdot b \cdot \cos \gamma}{2}\right)^2 \cdot m_\gamma^2 =}$$

$$= \sqrt{490,11 \cdot 0,005^2 + 361,75 \cdot 0,005^2 + 501993,87 \cdot \left(\frac{30''}{2 \cdot 10^5}\right)^2} = \sqrt{0,0123 + 0,0090 + 0,0113} = \pm 0,18(\text{m}^2)$$

### Figyelem:

A  $m_\gamma$  értékét át kell számítani analitikus szögegységbe, vagyis

$$m_\gamma = \frac{m_\gamma''}{\rho''} = \frac{30''}{2 \cdot 10^5} = 1,5 \cdot 10^{-4} \quad (\text{mert } 1 \text{ radián} = \rho'' = 206\,264,8'' \approx 2 \cdot 10^5)$$

A  $m_a$  és  $m_b$  középhibákat ne felejtsük el méter egységbe átváltani!

$$m_a = m_b = 0,005 \text{ m}$$

**6. példa**

**Egy oszlop magasságának kiszámítása trigonometriai magasságméréssel, valamint magasság középhibájának meghatározása.**

$$t_v = 38,135 \text{ m} \pm 1 \text{ cm}$$

$$z = 54-13-45 \pm 20''$$

$$G = m = t_v \cdot \cot z = 38,135 \cdot \cot(54-13-45) = 27,474 \text{ m}$$

$$g_t = \cot z$$

$$g_z = -\frac{t}{\sin^2 z}$$

$$m_m = \sqrt{(\cot z)^2 \cdot m_t^2 + \left(-\frac{t}{\sin^2 z}\right)^2 \cdot m_z^2} = \sqrt{0,519 \cdot 0,01^2 + 3355,753 \cdot \left(\frac{20''}{2 \cdot 10^5}\right)^2} = \pm 0,009 \text{ (m)}$$

**Figyelem:**

A  $m_\gamma$  értékét át kell számítani analitikus szögegységbe, vagyis

$$m_\gamma = \frac{m_\gamma''}{\rho''} = \frac{20''}{2 \cdot 10^5} = 1 \cdot 10^{-4} \quad (\text{mert } 1 \text{ radián} = \rho'' = 206\,264,8'' \approx 2 \cdot 10^5)$$

A  $m_t$  középhibát ne felejtjük el méter egységbe átváltani!

$$m_t = 0,01 \text{ m}$$