8. előadás: A szintezés *a priori* középhibája. Magassági vonal és csomópont számítása

A szintezés mérési része lécleolvasásokból áll, ezért a középhiba terjedése alapján egyetlen lécleolvasás m_ℓ középhibájából kiszámítható az egyetlen Δm magasságkülönbség $m_{\Delta m}$ középhibája és az n műszerállásból álló vonal végpontjai közötti m magasságkülönbség m_m középhibája.

Egyetlen magasságkülönbség középhibája: legyen a lécleolvasás középhibája mind „hátra”, mind „előre” irányban egyforma m_ℓ. Minthogy az egyetlen műszerállásban mért magasságkülönbség $\Delta m = \ell_{\text{hátra}} - \ell_{\text{előre}}$, a középhiba terjedési törvénye alapján $m_{\Delta m} = m_\ell \sqrt{2}$.

A végpontok közötti magasságkülönbség középhibája: feltételezzük, hogy a szintezési vonalon n műszerállással haladunk végig, a műszer-léc távolság végig egyforma, és valamennyi műszerállásban egyformán gondosan mérünk. Ekkor $m_{\Delta m_1} = m_{\Delta m_2} = ... = m_{\Delta m_n} = m_{\Delta m}$. A végpontok magasságkülönbsége $m = \Delta m_1 + \Delta m_2 + ... + \Delta m_n$, a magasságkülönbség középhibája pedig a hibaterjedés értelmében $m_m = \sqrt{m^2_{\Delta m_1} + m^2_{\Delta m_2} + ... + m^2_{\Delta m_n}} = \sqrt{n \cdot m^2_{\Delta m}} = m_{\Delta m}\sqrt{n}$. A lécleolvasás középhibájára visszavezetve: $m_m = m_\ell \sqrt{2n}$.

A végpontok magasságkülönbségének középhibáját a műszerállások száma helyett célszerűbb a vonal hosszából levezetni. A feltételezésekből következik, hogy valamennyi műszerállásban a lécek távolsága az egységes d műszer-léc távolság kétszerese, tehát a vonal hossza $L = n \cdot 2d$; n értékét az utolsó képletbe helyettesítve $m_m = m_\ell \sqrt{2 \cdot \frac{L}{2d}} = m_\ell \sqrt{\frac{L}{d}}$.

A levezetett képleteket azonban módosítanunk kell amiatt, hogy a tapasztalat szerint a leolvasás középhibája egyenesen arányos a műszer-léc távolsággal: $m_\ell = \alpha \cdot d$. Az $\alpha = \frac{m_\ell}{d}$ arányossági tényező egyrészt középhiba-jellegű, másrészt (ha a lécleolvasás m_ℓ középhibáját a leolvasás helye ingadozásának tekintjük) az irányvonal ingadozását tükrözi, ezért α neve: **az irányvonal középingadozása**. Jól jellemzi a szintezés mérőfelszerelését, elsősorban a szintezőműszert. Értékét a vizsgált szintezésre jellemző d műszer-léc távolság megválasztása után a következőképpen határozzuk meg:

- ha a lécleolvasást becsléssel végezzük (a műszernek nincs optikai mikrométere), akkor α értékét egyetlen magasságkülönbség n-szeres (öt- tízszeres) megmérésével határozhatjuk meg, miközben egy-egy újabb meghatározás előtt a műszerhorizont magasságát kis mértékben megváltoztatjuk. Az eredmények: $\Delta m_1, \Delta m_2, ..., \Delta m_n$. A számítás: $\overline{\Delta m} = \frac{1}{n}\sum \Delta m_i$; $v_i = \overline{\Delta m} - \Delta m_i$; $m_{\Delta m} = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$; $m_\ell = \frac{m_{\Delta m}}{\sqrt{2}}$; $\alpha = \frac{m_\ell}{d}$.

- ha a lécleolvasást optikai mikrométerrel „mérjük”, akkor α értékét ismételt lécleolvasásokból határozhatjuk meg. Az eredmények: $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$. A számítás: $\bar{\ell} = \frac{1}{n}\sum \ell_i$; $v_i = \bar{\ell} - \ell_i$; $m_\ell = \sqrt{\frac{\sum v_i^2}{n-1}}$; $\alpha = \frac{m_\ell}{d}$.

A végpontok magasságkülönbségének középhibájára vonatkozó $m_m = m_\ell \sqrt{\frac{L}{d}}$ képletbe $m_\ell = \alpha \cdot d$ értékét behelyettesítve: $m_m = \alpha \sqrt{L \cdot d}$.

Vegyük észre, hogy m_m értékének meghatározásához nem kell méréseket végezni (leszámítva az irányvonal középingadozásának meghatározására vonatkozó méréseket), a képlet tehát a benne szereplő mennyiségek változtatásával mérések tervezésére alkalmas. Az m_m középhibák azonban csak akkor hasonlíthatók össze, ha azok egyenlő hosszúságú szintezési vonalakra vonatkoznak. Az L = 1 km vonalhosszra kiszámítható értéket **az egyirányú szintezés** *a priori* **kilométeres középhibájának** nevezzük:

$$m_{\mathrm{km}} = \alpha \sqrt{1000 \cdot d} \ .$$

A hibaterjedés törvénye szerint az **oda-vissza szintezés** *a priori* **kilométeres középhibája**:

$$m_{(\mathrm{km})} = \frac{m_{\mathrm{km}}}{\sqrt{2}} = \alpha \sqrt{500 \cdot d} \ .$$

Az utóbbi két képletbe d értékét méterben kell behelyettesíteni, és a középhiba értéke is méterben (!) adódik. Az irányvonal α középingadozása radiánban értendő, helyette érdemes $\frac{\alpha''}{\rho''}$ értékét használni ($\rho'' \approx 2 \cdot 10^5{}''$).

A képletekből megállapítható, hogy a d műszer-léc távolság csökkentésével a kilométeres középhiba is csökken. Nem szabad azonban megfeledkeznünk arról, hogy d csökkentésével növekszik a műszerállások száma, emiatt tovább tart a szintezés, és így erősebben érvényesülhetnek a szabályos hibahatások.

8.1. Magassági vonal és számítása

Az ismert magasságú pontok és a közöttük elhelyezkedő meghatározandó magasságú pontok **magassági vonalakat** alkotnak. A vonalakat a meghatározandó pontok **szakaszokra** osztják. A szakaszvégpontok magassága általában oda-vissza mérésekkel meghatározott: **szintezéssel** (rendszerint több műszerállással) vagy **trigonometriai magasságméréssel** (egyetlen műszerállással).

A számítás menete:

1. Megállapítjuk (általában önkényesen) a számítás irányát.
2. Kiszámítjuk a szakaszvégpontok (előzetes) magasságkülönbségét:
    - **szintezés** esetén: (Δm) = $\sum$(hátra – előre) = $\sum$hátra – $\sum$előre;
    - **trigonometriai magasságmérés** esetén: $(\Delta m) = h - \ell + d \cot z + \frac{d^2}{2R}(1-k)$.

3. Az „oda” magasságkülönbséget a számítás irányában, a „vissza” magasságkülönbséget ellentétes irányban értve, az „oda” magasságkülönbség előjelét változatlanul hagyva, a „vissza” magasságkülönbség előjelét pedig megváltoztatva számtani középértékként valamennyi szakaszra kiszámítjuk a „közép” magasságkülönbség értékét.
4. A vonal mentén összegezzük a „közép” magasságkülönbségeket. A mérési hibák és a hálózati kerethiba miatt az összeg eltér a végpontok magasságkülönbségétől; az eltérés a magassági vonal záróhibája:

$$\Delta = (M_V - M_K) - \sum(\Delta m_i).$$

5. A „nagy súly – kis javítás” elve szerint elosztjuk a záróhibát. A javítás tehát fordítottan arányos a súllyal, a súly viszont fordítottan arányos a középhiba négyzetével, ezért a javítás egyenesen arányos a középhiba négyzetével:
   - **szintezés** esetén a középhiba a szakaszhossz négyzetgyökével, a javítás tehát a szakaszhosszal arányos:

     $$\delta_i = \frac{\Delta}{\sum t} \cdot t_i ,$$

     ahol t_i a szintezési szakasz, $\sum t$ a szintezési vonal hossza;
   - **trigonometriai magasságmérés** esetén a középhiba a szakaszhosszal, a javítás tehát a szakaszhossz négyzetével arányos:

     $$\delta_i = \frac{\Delta}{\sum t^2} \cdot t_i^2 .$$

6. Kiszámítjuk a szakaszvégpontok $\Delta m_i = (\Delta m_i) + \delta_i$ javított magasságkülönbségét és a szakaszvégpontok végleges magasságát:

   $$M_i = M_{i-1} + \Delta m_i .$$

8.2. Magassági csomópont és számítása

1. A csomóponti rendszert a csomópontba futó magassági vonalakra bontjuk.
2. A kezdőpontokból kiindulva a magasságkülönbségek előjeles összegzésével kiszámítjuk a csomópont előzetes magasságát, amelyre annyi értéket kapunk, ahány magassági vonal találkozik a csomópontban.
3. A csomópont végleges magassága az előzetes magasságok súlyozott számtani középértéke lesz. A vonalanként kiszámított súly fordítva arányos
   - **szintezés** esetén a szakaszhosszak összegével (a vonal hosszával);
   - **trigonometriai magasságmérés** esetén a szakaszhosszak (az oldalak) négyzetének összegével.
4. Az egyes vonalakban lévő pontok magasságát a magassági vonal számítása szerint határozzuk meg.

Az előadás anyaga az ajánlott irodalomban:

Krauter: Geodézia; 6.1.3 és 9.2.2 fejezetrészek