5. előadás: Véletlen hibák. A középhiba és a súly. A középhiba terjedése

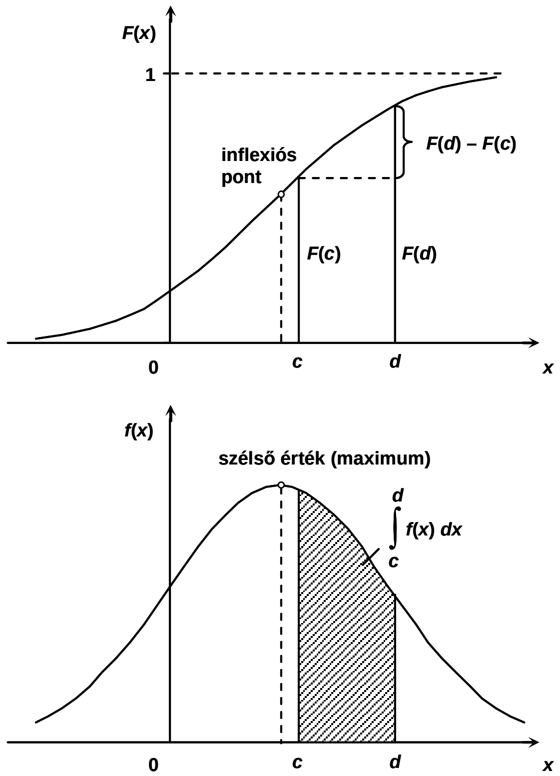
5.1. Véletlen hibák. A középhiba és a súly.

A méréseinket terhelő szabályos hibákkal a Geodézia I. tantárgy keretében már megismerkedtünk. A továbbiakban feltételezzük, hogy a szabályos hibák hatását a lehetőséghez mérten kiküszöböltük.

Valamely mennyiség Λ hibátlan értékének meghatározására méréseket végzünk. Ha a mérőeszköz mérőképességét teljesen kihasználjuk, akkor az eredményeket terhelő véletlen hibák miatt a megismételt mérés $L_1, L_2, \ldots, L_n$ eredményei kis mértékben eltérnek egymástól. (Hibának a hibátlan érték és a mérési eredmény különbségét tekintjük: $\varepsilon_i = \Lambda - L_i$.)

Az ε_i véletlen hibák előjele és nagysága a véletlen szeszélye szerint változik ugyan, de felírhatók olyan függvények, amelyek a véletlen hibák (a matematika nyelvén: a valószínűségi változók) eloszlását jellemzik. Ilyen függvények az eloszlásfüggvény és a sűrűségfüggvény, amely az eloszlásfüggvény derivált függvénye (1-1. ábra). Mindkét függvény valószínűséget fejez ki. Annak a valószínűsége, hogy a valószínűségi változó a c és d intervallumhatárok közé esik

- az eloszlásfüggvényből: $F(d) - F(c)$;
- a sűrűségfüggvényből: $\int_c^d f(x)dx$.



1-1. ábra. Valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye és $f(x)$ sűrűségfüggvénye

Az eloszlások közül a geodéziában a **normális** (*Gauss*-féle) **eloszlás** használatos a leggyakrabban. Eloszlásfüggvényének egyetlen inflexiós pontja van, és a görbe középpontosan szimmetrikus erre a pontra. Sűrűségfüggvényének, az ún. haranggörbének egyetlen maximuma van, és a görbe tengelyesen szimmetrikus a maximális ordinátára.

A véletlen hibák eloszlásának jellemzésére használatos mennyiségek:

- az a **várható érték** a sűrűségfüggvény görbe alatti területének x koordinátája; normális eloszlás esetében a maximális ordinátához tartozó abszcisszaérték;
- a σ^2 **szórásnégyzet** (variancia) a sűrűségfüggvény görbe alatti területének ún. másodrendű nyomatéka az $f(x)$ tengelyre. Pozitív négyzetgyökét, a σ szórást a geodéziában **középhibának** nevezik és m-mel jelölik.

A *Gausstól* származó összefüggés szerint az ε véletlen hibák végtelen sorozatából levezethető elméleti középhiba:

$$m = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}\ .$$

Normális eloszlás esetén a haranggörbe két inflexiós pontja a várható értékhez szimmetrikusan és attól éppen σ távolságra helyezkedik el. Annak a valószínűsége, hogy a véletlen hiba a várható érték körüli és a szórás egy-, két- vagy háromszorosának megfelelő szélességű szimmetrikus intervallumba esik, rendre 68,3%, 95,4% vagy 99,7%. Csaknem biztos tehát, hogy valamennyi véletlen hiba a várható érték körüli 3σ tartományba esik. Ezt az állítást úgy is megfogalmazhatjuk: csaknem biztos, hogy egyetlen mérési eredmény sem tér el a várható értéktől a középhiba háromszorosánál nagyobb mértékben. Ez a műszaki gyakorlatban használatos ún. „három szigma szabály”.

Mind a várható érték, mind a szórás (a középhiba) végtelen sok mérést feltételez. A gyakorlatban az említett mennyiségeket véges számú mérés eredményei alapján becsüljük.

A várható érték becslése a **mintaközép**, az „egyszerű” (nem súlyozott) számtani középérték:

$$\overline{L} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}L_i\ .$$

A szórás (a középhiba) becslése az ún. **tapasztalati szórás (középhiba)**:

$$\overline{n} = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2}\ .$$

Említettük már, hogy az ε_i mérési hibák a Λ hibátlan értéktől számított eltérések. A hibátlan értéket ritkán ismerjük (pl. egy síkháromszög belső szögösszege 180º), de esetenként helyettesíthetjük olyan mérés eredményével, amely az $L_1, L_2, \ldots, L_n$ eredményeket szolgáltató mérési eljárásnál legalább egy nagyságrenddel pontosabb. Ennek hiányában a középhiba képletében az ε_i hibákat a mintaközéptől való $\overline{L} - L_i$ eltérésekkel helyettesítjük:

$$\overline{m} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\overline{L} - L_i\right)^2}\ .$$

A kifejezés neve: korrigált tapasztalati szórás (középhiba), ahol a „korrigált” jelzőnek megfelelően az n mérésszám helyett az (n – 1) ún. fölös mérésszám áll a nevezőben.

Megjegyezzük még, hogy ha a mérésből nem tudtuk kiszűrni a szabályos hibákat, akkor az ε_i hibák egy átlagos szabályos hibával terheltek lesznek, a $v_i = \overline{L} - L_i$ eltérések (az ún. **mérési javítások**) azonban nem, emiatt a valódi hibákból számított középhiba, az ún. **közép-teljeshiba** nagyobb lesz a mérési javításokból számított ún. **közép-véletlenhibánál**. Az összefüggés:

$$(\text{közép-teljeshiba})^2 = (\text{átlagos szabályos hiba})^2 + (\text{közép-véletlenhiba})^2.$$

Az m_i középhiba a pontosság mérőszáma, de azzal „fordítottan arányos”: minél nagyobb a mérés pontossága, annál kisebb a mérés középhibája. Célszerű egy, a pontossággal „egyenesen arányos” mennyiséget bevezetni: ez a p_i **súly**. Definíció szerint:

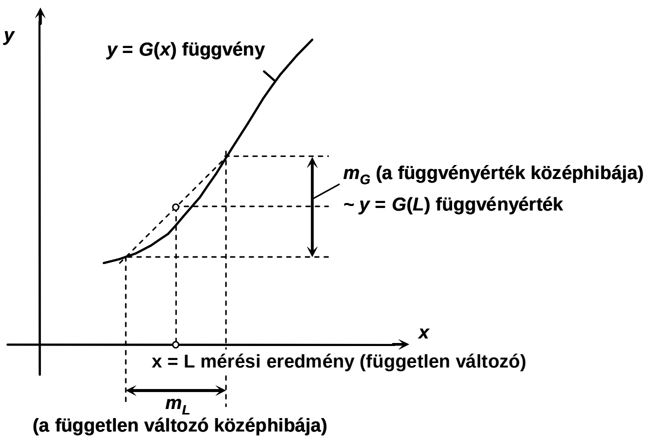
$$p_i = \frac{\mu^2}{m_i^2},$$

ahol tehát a súly lényegesen pozitív mennyiség, mértékegysége a középhiba mértékegysége négyzetének reciproka. A μ^2 pozitív és mértékegység nélküli mennyiség, neve: **a súlyegység középhibája**, mert ha $p_i = 1$, akkor μ és m számértéke azonos.

5.2. A középhiba terjedése

Vizsgáljuk meg, hogyan befolyásolja a független változó (a mérési eredmény) középhibája a mérési eredményből kiszámítható függvényérték középhibáját, vagyis hogyan „terjed át” a független változó középhibája a függvényértékre.

A legegyszerűbb esetben, egyetlen független változó, azaz kétváltozós függvény esetében a kapcsolatot az 1-2. ábra szemlélteti.



1-2. ábra. A független változó és a függvényérték középhibája

Az ábra alapján: $m_G = m_L \tan\alpha$, ahol tan α a szelő iránytangense. Határértékekre áttérve a szelő iránytangenséből az érintő iránytangense (általános értelemben tehát a G függvény g derivált függvénye) lesz, így: $m_G = g \cdot m_L$.

A $G = g(L_1, L_2, ..., L_n)$ többváltozós függvény esetében

- feltételezzük, hogy az egyes változók hatása független, ezért azokat elkülönítve vizsgálhatjuk. Az n darab hatás mindegyikében egy-egy független változó lesz, tehát a G függvényt egymás után n-szer kell deriválni úgy, hogy a független változó először L_1, majd L_2, végül L_n legyen. Az így előállított parciális deriváltakat jelöljük $g_1, g_2, \ldots, g_n$ módon;
- a hatások rendre $g_1 m_1, g_2 m_2, \ldots, g_n m_n$ értékűek, ezeket kell összegezni, de a középhibák jellegéből adódóan nem algebrailag, hanem vektorosan. A változók függetlenségét a vektorok merőlegessége jelenti.

A végeredmény:

$$m_G^2 = g_1^2 m_1^2 + g_2^2 m_2^2 + ... + g_n^2 m_n^2 = \sum_{i=1}^{n} g_i^2 m_i^2 .$$

Néhány egyszerű függvény középhibája:

- állandóval szorzott mérési eredmény: $G = cL$, középhibája $m_G = c \cdot m_L$;
- két mérési eredmény összege vagy különbsége: $G = L_1 + L_2$ vagy $G = L_1 - L_2$. Mindkét esetben $m_G = \sqrt{m_1^2 + m_2^2}$; ha $m_1 = m_2 = m$, akkor $m_G = m\sqrt{2}$;
- két mérési eredmény szorzata: $G = L_1 \cdot L_2$, középhibája $m_G = \sqrt{L_2^2 m_1^2 + L_1^2 m_2^2}$;
- mintaközép: $G = \overline{L} = \frac{1}{n}(L_1 + L_2 + ... + L_n)$, középhibája $m_1 = m_2 = ... = m_n = m$ feltétellel $m_G = m_{\overline{L}} = \frac{m}{\sqrt{n}}$.

Az előadás anyaga az ajánlott irodalomban:

Krauter: Geodézia; 1.1 – 1.6 alfejezetek