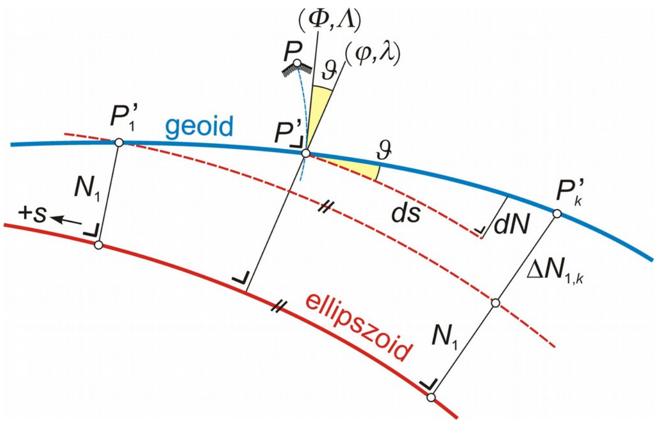
Geoidmeghatározás

Csillagászati szintezés

A geoid és az ellipszoid egymáshoz viszonyított helyzetét a felületi normálisok által bezárt szög, a geoidi *függővonal-elhajlás* jellemzi. Tetszőleges α azimutban $\vartheta = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha$ függővonal-elhajlás esetén az *1. ábrán* látható módon elemi *ds* távolsággal elmozdulva, a geoid-ellipszoid távolság *dN* megváltozása:

$$dN = -\vartheta \; ds \; . \qquad (1)$$



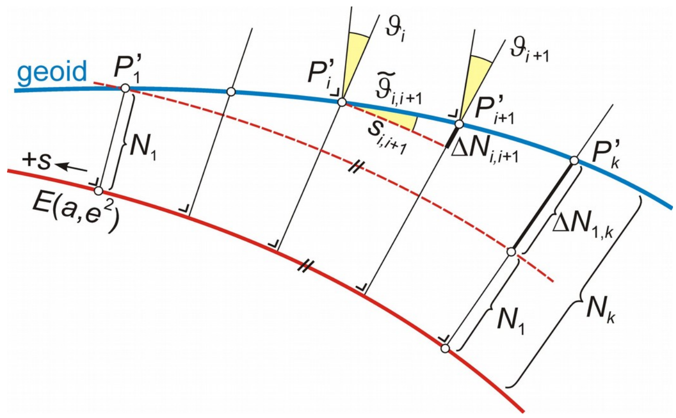
1. ábra.

A csillagászati szintezés alapelve.

A geoid-ellipszoid távolság $\Delta N_{1,k} = N_k - N_1$ megváltozását véges távolságokra, pl. a $P_1 P_k$ szakaszon az α azimutú metszet irányába eső függővonal-elhajlás vetületeknek a

$$\Delta N_{1,k} = N_k - N_1 = -\int_1^k \vartheta \; ds \approx \sum_{i=1}^{k} \tilde{\vartheta}_{i,i+1} \, s_{i,i+1} \qquad (2)$$

vonalintegrálja adja meg (*1. ábra*). Ebből látható, hogy ezzel a módszerrel a geoid-ellipszoid távolságoknak csak a különbsége (vagy megváltozása) számítható ki, hasonlóan a szintezéshez, amely magasságkülönbségeket eredményez. (Innen van az eljárás elnevezése.)



2. ábra.

A csillagászati szintezés számítása.

A (2)-ben szereplő vonalintegrál analitikus kiszámításához ismerni kellene a függővonal-elhajlás ívhossz szerinti eloszlásának $\vartheta = \vartheta(s)$ függvényét. Ennek hiányban a metszetet a P_i ismert pontokkal $s_{i,i+1}$ véges hosszúságú szakaszokra osztva (*2. ábra*) *numerikus integrálást* végzünk, ahol a szakaszok átlagos $\tilde{\vartheta}_{i,i+1}$ függővonal-elhajlás értékét az ismert értékek alapján valamilyen predikciós eljárással, számszerű vagy rajzi úton határozzuk meg.

A feladatban a geoid-ellipszoid távolságokat É-D-i (azaz meridián) irányú metszetben számítjuk ki. Ekkor a függővonal-elhajlás megfelelő vetületét a ξ meridián irányú összetevő adja. A számítás kiinduló pontja, ahol ismert a geoid-ellipszoid távolság, az $x = 0$ koordinátájú pont, itt van megadva az N_1 érték. Ebben a pontban lineáris interpolációval meg kell határozni a függővonal-elhajlás ξ_1 meridián irányú összetevőjét. Ezen kívül, mivel *numerikus integrálást* végzünk, az integrál görbének ott lesz szélsőértéke (maximuma vagy minimuma), ahol a függővonal-elhajlás függvényének *zérushelye* van. Ezért ugyancsak lineáris interpolációval meg kell határozni ezeknek a zérushelyeknek is az *x* koordinátáját. Ezután az egyes szakaszokra meghatározzuk a

$\xi = \xi\ (x)$ görbe alatti területet trapéz (vagy háromszög, a zérus helyek esetében) területként és az N_1 értékből kiindulva folyamatos összegzéssel megkapjuk minden pontban a geoid-ellipszoid távolság értékét

$$\Delta N_{1,k} = N_k - N_1 = -\int_1^k \xi\, dx \approx \sum_{i=1}^{k} \tilde{\xi}_{i,i+1}\, x_{i,i+1}\ . \tag{3}$$

A képletben a negatív előjel azt fejezi ki, hogy az x tengely geodéziában szokásos É-i iránya és pozitív ξ értékek esetében *csökkenni* fognak a geoid-ellipszoid távolságok.

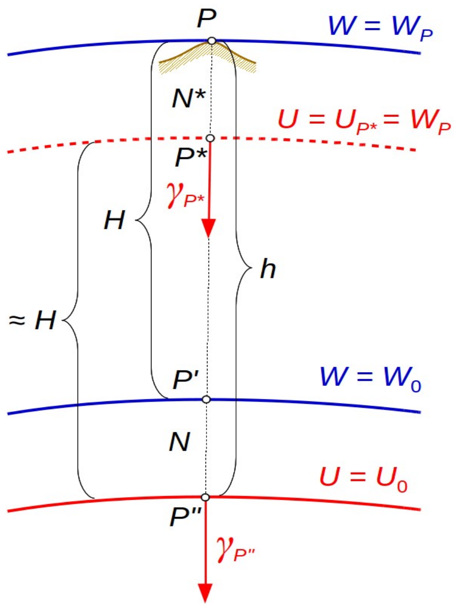
Geoidmeghatározás a potenciálzavarból a Bruns-féle összefüggéssel

A 2. házi feladatban meghatároztuk egy adott P pontban a valódi nehézségi erőtér W potenciáljának közelítő értékét egy ismert geopotenciális modell segítségével. Mivel a modell együtthatói sajnos hibásan lettek megadva, ezért ez helyett a feladatlapon megadott W potenciál értékével számoljunk. Valamely normál nehézségi erőteret felvéve meghatározható ugyanabban a pontban a *normál nehézségi erőtér* U potenciáljának az értéke is.

A normál nehézségi erőtér potenciálja (a *normálpotenciál*) a negyedfokú tagig bezárólag a

$$U(r,\vartheta) = \frac{kM}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{2} \bar{C}^{*}_{2n,0} \left(\frac{a}{r}\right)^{2n} P_{2n}(\cos\vartheta)\right] + \frac{1}{2}\omega^2 r^2 \sin^2\vartheta \tag{4}$$

gömbfüggvény sorral írható le, ahol $\bar{C}^{*}_{2n,0}$ a normálpotenciál gömbfüggvénysorának normalizált együtthatóit jelöli és az egyéb jelölések megegyeznek a 2. feladatban találhatóakkal. A számításhoz szükséges P_{2n} Legendre polinomok értékeit is ott már kiszámítottuk.



3. ábra.

A Bruns-féle összefüggés a földfelszíni pontban

A Bruns-féle összefüggés megadja két azonos potenciálértékű valódi és normál szintfelület távolságát. Most a valódi szintfelület a P ponton halad át, és az összefüggés alkalmazása a *3. ábra* szerint a $W = W_P$ valódi potenciálértékkel megegyező $U = W_P$ potenciálértékű normál szintfelület távolságát adja meg:

$$N^* = \frac{W_P - U_P}{\gamma_{P^*}} = \frac{T_P}{\gamma_{P^*}} \tag{5}$$

A képletben a T_P a potenciálzavar, valamint γ_{P^*} a normál nehézségi térerősség értéke a P^* pontban. Ez a következőképpen számítható:

$$\gamma_{P^*} = \gamma_{P''} + \left(\frac{\partial \gamma}{\partial h}\right) H\ , \tag{6}$$

ahol H a pont szintezett magassága és $\gamma_{P''}$ a normál nehézségi térerősség értéke a szintellipszoid felületén

$$\gamma_{P''} = \gamma_0 \left(1 + \beta \sin^2 \phi + \beta_1 \sin^2 2\phi\right) \quad . \qquad (7)$$

A (7)-es kifejezésben szereplő állandók értékét a GRS80-as ellipszoidra vonatkozóan a feladatban megtalálhatjuk.

Geoidmeghatározás a szatellitageodézia geometriai módszerével

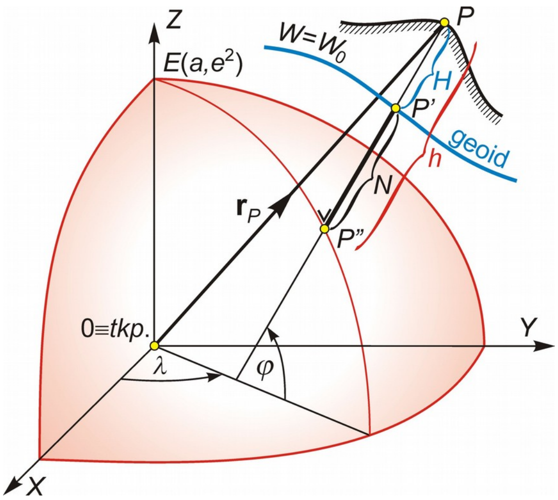
A szatellitageodézia eredményeinek geometriai alkalmazásaként a geoid meghatározására azt az eljárást tekinthetjük, amely esetben a geoidot a földfelszíni pontok megfelelő szatellitageodéziai módszerrel (pl. GPS) meghatározott

$$r_P = \begin{bmatrix} X_P \\ Y_P \\ Z_P \end{bmatrix} \overset{E(a,e^2)}{\Rightarrow} (\phi, \lambda, h) \qquad (8)$$

ellipszoidi földrajzi koordinátáiból úgy határozzuk meg, hogy a pontoknak a *h* ellipszoid feletti magasságából a - pl. szintezéssel meghatározott - tengerszint feletti *H* magasságát levonjuk, azaz

$$N = h - H \quad . \qquad (9)$$

Így igen egyszerűen megkapjuk a (ϕ, λ, h) ellipszoidi földrajzi koordinátákkal adott ellipszoidi felületi normálison a geoidnak az ellipszoid feletti *N* magasságát (*4 ábra*).



4. ábra.

Geoidmeghatározás a szatellitageodéziai mérések felhasználásával.