

Korszerű matematikai módszerek a geodéziában

Dr. Tóth Gyula

egyetemi docens

BME Általános- és Felsőgeodézia Tanszék

Jegyzet

2004-2012.

1 Számítógépes matematikai segédeszközök	2
1.1 Számítógépes algebrai rendszerek	2
1.2 Mátrix alapú numerikus rendszerek	7
2 Korszerű lineáris algebrai módszerek	10
2.1 Vektor és mátrix normák, kondíciós szám	10
2.2 Kondíciós szám, rosszul kondicionált egyenletek	10
2.3 Polinomillesztési feladat	12
2.4 Szinguláris érték felbontás (SVD)	13
3 Korszerű statisztikai módszerek	22
3.1 Statisztikai hipotézisvizsgálat, statisztikai próbák	22
3.2 Intervallumbecslés. Megbízhatósági (konfidencia) intervallumok	29
3.3 A Kalman (Kálmán)-szűrés	33
3.4 Robusztus becslési eljárások	47
3.5 Krigelés	55
4 A wavelet transzformáció és alkalmazásai	63
4.1 Bevezetés	63
4.2 A folytonos wavelet transzformáció	65
4.3 A diszkrét wavelet transzformáció	67
4.4 A Haar wavelet transzformáció	68
4.5 A wavelet transzformáció alkalmazása idősorok elemzésére	70
5 Idősorok analízise	73
5.1 Sztochasztikus folyamatok, idősorok, stacionaritás	73
5.2 Fehérzaj és színezett zaj	75
5.3 A folytonos Fourier-transzformáció (CFT)	76
5.4 A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)	78
5.5 A diszkrét Fourier transzformáció számítógépes megvalósítása	81
5.6 Digitális szűrők	81
5.7 Sztochasztikus folyamatok spektrálanalízise	90

1 Számítógépes matematikai segédeszközök

1.1 Számítógépes algebrai rendszerek

Mi a számítógépes algebra? Nem egyszerűen csak numerikus matematikai számítások végzése (pl. polinomok gyökeinek meghatározása vagy mátrixok sajátértékeinek numerikus közelítése), hanem *szimbolikus és algebrai számítások* elvégzése. Azt mondhatjuk, hogy matematikai objektumokat reprezentáló szimbólumokon végzett számításokról van szó. A szimbólumok reprezentálhatnak (egész, racionális, valós, komplex vagy algebrai) számokat, de ugyanúgy jelenthetnek más matematikai objektumokat, például polinomokat, racionális függvényeket, egyenletrendszereket, vagy még absztraktabb matematikai struktúrákat. A *szimbolikus* jelző azt hangsúlyozza, hogy a matematikai problémamegoldás végső célja sok esetben a válasz zárt alakban történő előállítása vagy valamely szimbolikus közelítésének a meghatározása. Az *algebrai* alatt pedig azt értjük, hogy a számításokat közelítő lebegőpontos aritmetika helyett az algebra szabályainak megfelelően hajtjuk végre. Szimbolikus algebrai számításokra példa a polinomok szorzattá alakítása, a differenciálás, az integrálás, a függvények sorbafejtése, a differenciálegyenletek analitikus megoldása, az egyenletrendszerek pontos megoldása és a matematikai kifejezések egyszerűsítése.

A számítógépes algebrai rendszereket célszerű két kategóriába sorolni: a speciális célú és az általános célú rendszerek csoportjába. A speciális célú rendszereket a fizika vagy a matematika egy adott területén fölmerülő speciális problémák megoldására tervezték. Az általános célú rendszerek változatos adatstruktúrákkal és sok matematikai függvénnyel felszerelve próbálják a lehető legtöbb alkalmazási területet lefedni. Ilyen rendszerek közül az ismertebbek a **Maple**, a **Mathematica**, és a **MuPAD**. A számítógépes algebrai rendszereket olyan *matematikai szakértői rendszereknek* is nevezhetjük, amelyekkel a matematikai problémákat hatékonyabban és pontosabban oldhatjuk meg, mint papírral és ceruzával. Fő előnyük az, hogy igen terjedelmes szimbolikus számítások végzésére is képesek. Bár sokszor papírral és ceruzával kiszámítható triviális standard átalakításokról van szó, minél nagyobbak a formulák, annál nehezebb a feladat, és annál kisebb a sikeres végrehajtás esélye. Az ilyen jellegű problémáknál nagyszerű segédeszköz egy számítógépes algebrai rendszer.

A szimbolikus és algebrai számítások gyakran megelőzik a numerikus számításokat. A matematikai képleteket gyakran azért alakítjuk át, hogy a később elvégzendő numerikus számításoknak megfelelő alakra hozzuk őket. A számítógépes algebrai rendszerek jó kapcsolódási felületet kínálnak a számítások két típusa között. Például úgy, hogy FORTRAN és C kifejezésekké tudják alakítani a saját nyelvükön fölírt kifejezéseket. Ha számítógépes algebrai rendszert használunk, a matematikai feladat elemzésére koncentrálhatunk, a számolás részleteit a gépre bízhatjuk. A számítógépes algebrai rendszerek "matematikai kísérletekre" buzdítanak bennünket.

A következőkben néhány példán keresztül röviden bemutatjuk a **Maple** rendszert. (jelenleg a 9-es verziója telepíthető egyetemi licensszel az [ftp://rapid.eik.bme.hu/Maple/](http://rapid.eik.bme.hu/Maple/) címről)

A Maple parancsait mindig pontosvesszővel kell zárunk:

```
> 2*3+2/7;
```

44/7

Ha az előző eredményt szeretnénk felhasználni, hivatkozhatunk rá a '%' karakterrel:

```
> 2*%+1;
```

95/7

A kifejezéseket változókhöz rendelhetjük ('%%' jelzi az előző eredmény előtti eredményt):

```
> R:= %%;
```

R := 44/7

A Maple nem tizedes, hanem egzakt aritmetikát használ. Például:

```
> sin(Pi/3);
```

1/2*3^(1/2)

A számértéket az `evalf` függvénnyel állíthatjuk elő:

```
> evalf(%);
```

.8660254040

Gyakorlatilag nincsen határa az egész számok hosszának a Maple számára. A Maple-ben természetes akár többszáz számjegyből álló egészekkel dolgozni. A decimális aritmetikát is képes az alapértelmezett 10 számjegynél pontosabbá tenni. Például kiszámíthatjuk π -t akár 1000 tizedesjegyre is. Ezt úgy érhetjük el, hogy a `Digits` nevű globális változót a kívánt pontosságra állítjuk be. Néhány példa:

```
> 2^100;
```

1267650600228229401496703205376

```
> Digits:=50;
```

```
> evalf( sin(Pi/3) );
```

.86602540378443864676372317075293618347140262690520

Láthatjuk azt is, hogy a parancsot kettősponttal zárva a Maple 'csöndben marad', nem ír ki semmit.

A Maple outputja nem mindig a legegyszerűbb alakú. Számos parancs, mint például a `collect`, `combine`, `expand`, `factor` és `simplify` használható a visszaadott válasz egyszerűsítésére illetve kívánt alakra hozására. Például, ha adott az alábbi polinom:

```
> (x+y)*(x-y)-x^2;
```

$(x+y)(x-y)-x^2$

elvégezve a beszorzást az `expand` paranccsal az eredmény egyszerűsödik:

> expand(%);

$$-y^2$$

Egy polinom szorzattá alakítása gyakran egyszerűbb eredményt ad, például:

> x^4+x^2*y+2*x^2+2*x^3+2*x*y+2*x+y+1;

$$x^4 + x^2 y + 2 x^2 + 2 x^3 + 2 x y + 2 x + y + 1$$

> factor(%);

$$(x+1)^2 (x^2 + y + 1)$$

A Maple hatékony eljárásokat tartalmaz függvények differenciálására, integrálására, sorösszegek számítására.

> diff(arcsin(a*x), x);

$$\frac{a}{\sqrt{1-a^2 x^2}}$$

> int(x*ln(x), x);

$$\frac{1}{2} x^2 \ln(x) - \frac{1}{4} x^2$$

> int(ln(x), x=1..2);

$$2 \ln(2) - 1$$

> sum(a^k, k=1..n);

$$\frac{a^{(n+1)}}{a-1} - \frac{a}{a-1}$$

Megoldhatunk egyenleteket vagy egyenletrendszereket egzakt módon a solve paranccsal. Közelítő numerikus megoldáshoz használjuk a fsolve parancsot. A közönséges differenciálegyenleteket megoldhatjuk a dsolve paranccsal. Példaként oldjuk meg az $x^3 - 6x = 5$ egyenletet x-re.

> solve(x^3-6*x=5, x);

$$-1, \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{21}, \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{21}$$

Oldjuk meg az $y(x) + y''(x) = e^x$ differenciálegyenletet az $y(0)=1$ és $y'(0)=0$ kezdeti feltételekkel:

> dsolve({y(x)+diff(y(x), x\$2)=exp(x), y(0)=1, D(y)(0)=0}, y(x));

$$y(x) = -\frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} e^x$$

Megemlíjtük, hogy a Maple sorozatokat, listákat, halmazokat, táblákat és tömböket használ bonyolultabb szerkezetű adatok ábrázolására. Nézzük meg a ?sequences, ?list, ?set, ?table, ?array parancsokat részletesebb segítség és példák végett.

A Maple linalg csomagja a lineáris algebra sok függvényét és eljárását tartalmazza vektorokkal és mátrixokkal végzett műveletekre. Ahhoz, hogy egy csomagot használni tudjunk, be kell töltenünk azt a with paranccsal:

> with(linalg);

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan,

kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspan, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

Ezek után bármelyik felsorolt függvényt használhatjuk. A `matrix` paranccsal vihetünk be egy mátrixot. A következő példában egy 3-szor 3-as mátrix inverzét és determinánsát számítjuk ki.

```
> A := matrix([[x-1,2,3],[0,x-2,2],[2,1,x-3]] );
```

$$A := \begin{bmatrix} x-1 & 2 & 3 \\ 0 & x-2 & 2 \\ 2 & 1 & x-3 \end{bmatrix}$$

```
> det(A);
```

$$x^3 - 6x^2 + 3x + 16$$

```
> inverse(A);
```

$$\begin{bmatrix} \frac{x^2 - 5x + 4}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & -\frac{2x - 9}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & -\frac{-10 + 3x}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} \\ \frac{4}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & \frac{x^2 - 4x - 3}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & -\frac{2(x-1)}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} \\ -\frac{2(x-2)}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & -\frac{x-5}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} & \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 6x^2 + 3x + 16} \end{bmatrix}$$

Ha beírjuk a `?packages` parancsot, megkapjuk a Maple által ismert összes csomag listáját és rövid leírásukat.

Egy- illetve többváltozós matematikai függvényeket is megadhatunk a Maple számára. A függvényt kiértékelhetjük akár numerikus akár szimbolikus módon adott értékekkel. Például

```
> f := x->sin(x)/x;
```

$$f := x \rightarrow \frac{\sin(x)}{x}$$

```
> f(2.0);
```

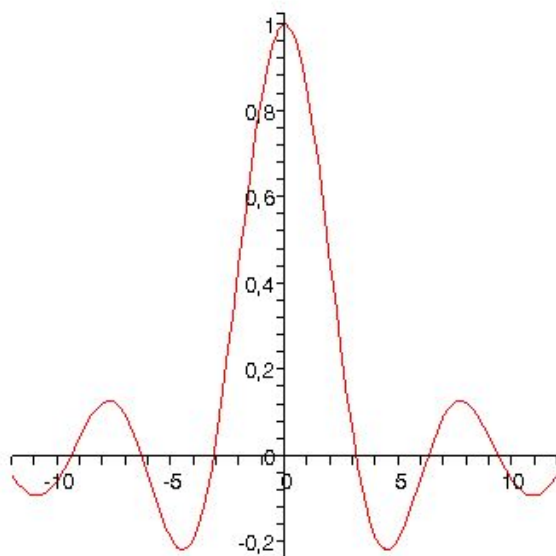
$$.4546487134$$

```
> f(t);
```

$$\frac{\sin(t)}{t}$$

A függvények grafikonját a `plot(f, a..b)` paranccsal rajzoltathatjuk meg. Próbaképpen rajzoljuk meg $f(t)$ ábráját.

```
> plot(f, -12..12);
```



Egy kétváltozós függvényre példa a következő:

> g := (x, y) -> (x^2 - y^2) / (x^2 + y^2);

$$g := (x, y) \rightarrow \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

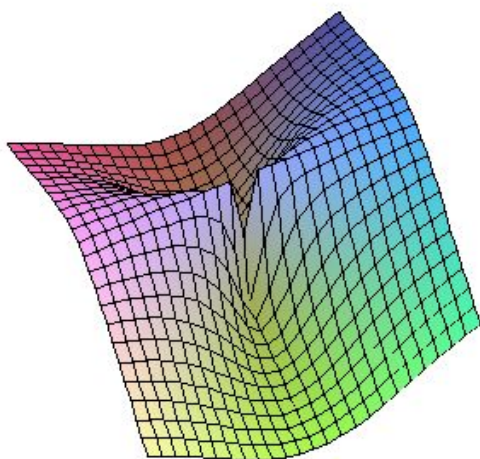
> g(1, 2);

$$-\frac{3}{5}$$

> g(1, x);

$$\frac{1 - x^2}{1 + x^2}$$

> plot3d(g, -1..1, -1..1);



Gyakorlatok

1. Számítsuk ki a $\sin(x)\cos(x)$ első és második deriváltjait x szerint.
2. Az $y(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ polinomnak határozzuk meg a gyökeit, összes helyi minimumát és maximumát. Ellenőrizzük megoldásunkat a polinom grafikonjáról.
3. Határozzuk meg az $f(x) = x^2 - 4$ függvény integrálját és az $1/f(x)$ függvény integrálját x szerint. Ellenőrizzük le a Maple válaszát a függvényt differenciálva.

4. Számítsuk ki a következő integrálokat:

$$\int_0^{\infty} e^{-t} dt \quad \text{és} \quad \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt$$

5. Számítsuk ki a következő összegeket:

$$\sum_{k=1}^{1000} k \quad \text{és} \quad \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2$$

6. Használjuk a `solve` parancsot az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldására.

$$\begin{cases} 4x - 5y = 11 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

A Maple magyar nyelvű szakirodalma

- Molnárka-Gergő-Wettl-Horváth-Kallós: A Maple V és alkalmazásai. Springer, 1996. 330 oldal.
- André Heck: Bevezetés a Maple használatába. JGYF Kiadó, Szeged, 1999. 654 oldal.

1.2 Mátrix alapú numerikus rendszerek

Több ilyen rendszer létezik, de mindegyik interaktív, tudományos és műszaki számítások céljára kifejlesztett mátrixalapú programrendszer. Összetett problémák is megoldhatók ezekkel a rendszerekkel anélkül, hogy bonyolult programokat kellene írni. Megemlítjük a **MATLAB** rendszert, ennek 'klónját', az ingyenes **Octave** rendszert, a jelfeldolgozásban jeleskedő ugyancsak szabadon elérhető **Scilab**-ot, illetve az **Euler** mátrix laboratóriumot, amelyik a 2.0-ás verziótól kezdve tartalmazza a Yacas nevű egyszerű számítógépes algebrai rendszert is. Az alábbi internetes címeken érhetők el további információk a fenti programokkal kapcsolatban:

Matlab: <http://www.math.bme.hu/~hujter/matlab.pdf>
<http://numanal.inf.elte.hu/~hegedus/matlab.html>
Octave: <http://www.octave.org>
Scilab: <http://www.scilab.org>
Euler: <http://mathsrv.ku-eichstaett.de/MGF/homes/grothmann/euler/>

Ismerkedjünk meg röviden közelebbről most az **Euler** rendszerrel, amelyik eléggé hasonlít a MATLAB-hoz. Elindítva a programot, két ablakot látunk, melyek átméretezhetők: a parancsablakot (ez szöveges) és a grafikus ablakot. A korábbi parancsokat a kurzor fel/le billentyűkkel hívhatjuk elő és az ESC megszakítja az éppen futó számítást. A grafikus ablak és a szöveges ablak között a TAB billentyűvel közlekedhetünk.

Az Euler-ben megadhatunk vektorokat (a transzponálás jele: `'`):

```
>v=[1;2;3]
```

```
1  
2  
3
```

vagy mátrixokat

```
>M=[1,2,3;4,5,6;7,8,9]
```

```
1      2      3  
4      5      6  
7      8      9
```

Ezután összeszorozhatjuk őket (a pont jelöli a mátrixszorzást):

```
>M.v
```

```
14  
32  
50
```

Könnyen generálhatunk vektorokat a : (kettőspont) operátorral:

```
>1:5
```

1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

A vektorok előállításához lépésközt is megadhatunk (itt ez 0,01):

```
>x=-1:0.01:1;
```

A sor végét pontosvesszővel zárva megakadályozhatjuk az eredmény kiírását (most nem íratunk ki az x vektor 201 elemét.

Az Euler egyik alapelve az, hogy egy függvényt alkalmazni kell a vektor összes elemére:

```
>sqrt(1:5)
```

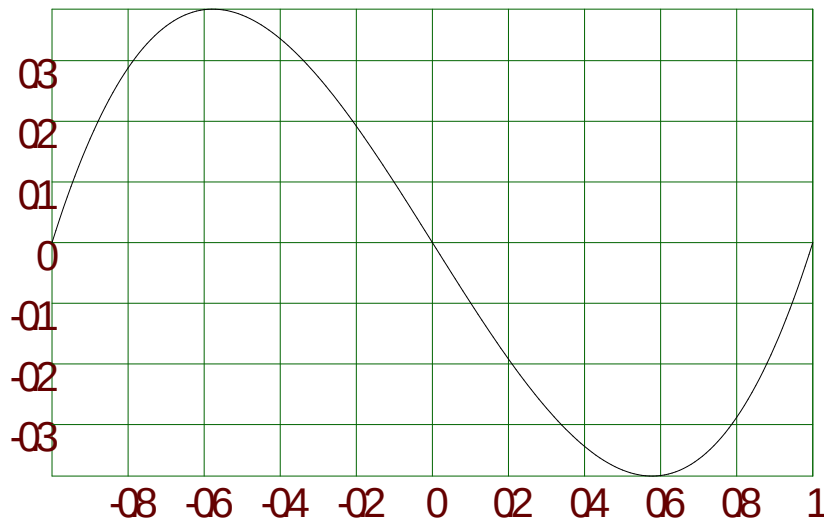
1	1.41421	1.73205	2	2.23607
---	---------	---------	---	---------

Ezzel egyszerűen állíthatjuk elő egy függvény táblázatát

```
>y=x^3-x;
```

és grafikonját:

```
>xplot(x,y);
```



Egyszerűen programozhatunk függvényeket is, például soronként közvetlenül beírva:

```
>function f(x)
```

```
$return 1/((x-0.3)^2+0.01)+1/((x-0.9)^2+0.04)-6;
```

```
$endfunction
```

Ezek után kirajzoltathatjuk a függvény grafikonját az `fplot` paranccsal:

```
>fplot("f",0,2);
```

Az Euler elég sokat tud a lineáris algebrából is. Például adjunk meg egy $[0,1]$ közötti egyenletes eloszlású véletlen számokból álló mátrixot:

```
>A=random(5,5)
```

0.655416	0.200995	0.893622	0.281887	0.525
0.314127	0.444616	0.299474	0.28269	0.883227
0.270906	0.704419	0.217693	0.445363	0.308411
0.914541	0.193585	0.463387	0.095153	0.595017
0.431184	0.72868	0.465164	0.323032	0.525184

Számítsuk ki az inverzét:

```
>inv(A)
```

-0.467539	-0.773215	1.04798	1.80403	-0.8916
-1.10542	-0.823302	-1.18887	-0.162705	3.37212
1.36344	-0.528943	-1.55323	-1.16391	1.75738
1.52372	0.82917	4.78762	-0.201431	-5.50093
-0.227238	1.73562	-0.779945	-0.100597	-0.215635

és ellenőrizzük (`id(n)` az $n \times n$ -es egységmátrix):

```
>totalmax(A.inv(A)-id(5))
```

```
8.32667e-016
```

Vagy vegyük a sajátértékeit:

```
>eigenvalues(A)
```

Column 1 to 3:

-0.302481+0i	-0.214375-0.302174i	-0.214375+0.302174i
--------------	---------------------	---------------------

Column 4 to 5:

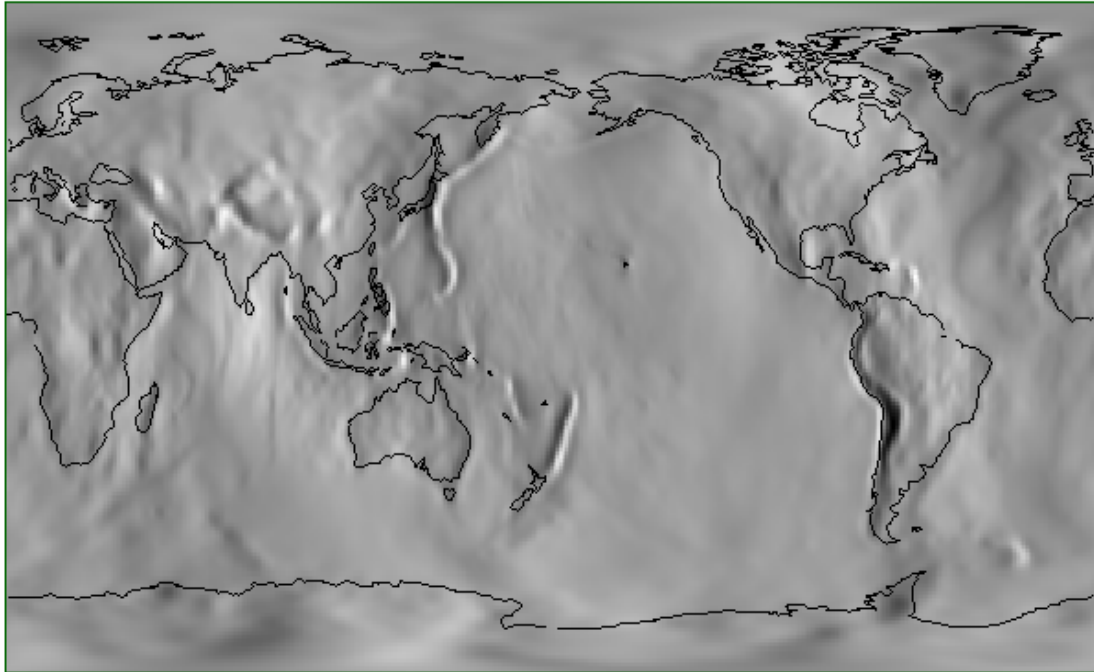
0.365732+4.72539e-015i	2.30356+1.04081e-016i
------------------------	-----------------------

Mi lesz a kondíciószáma?


```
>max(abs(eigenvalues(A)))/min(abs(eigenvalues(A)))  
7.61555
```

További részletesebb bemutatót láthatunk az Euler képességeiből, ha elindítjuk a demo-t a `load demo` utasítással (angol nyelven).

Példaként a grafikai képességekre, bemutatjuk a GOCE gradiométeres műhold magasságában az EGM96-os modellből számított V_{xx} gradiensek szürkeárnyaltos ábráját



Feladatok:

1. Írjunk Euler függvényt interpoláció számítására a $h(x, y) = ax + bxy + cy + d$ összefüggés szerint, ciklusutasítás nélkül. Legyenek a bemenő adatok a h mátrixban, a rácspontok koordinátái pedig az x, y vektorokban. Az interpolálandó pont x, y koordinátái pedig legyenek a pt 2 elemű vektorban. A `bilint(h, x, y, pt)` függvény visszaadott értéke az interpolált h érték legyen.

Tanács: Nézzük meg a `'find'` Euler függvényt. Ennek segítségével megtalálhatjuk hova esik a h mátrixban az interpolálandó pont.

Egy lehetséges megoldás:

```
function bilint(h,x,y,pt)  
    j=find(x,pt[2]);  
    i=find(y,pt[1]);  
    z=[h[i,j],h[i+1,j],h[i,j+1],h[i+1,j+1]];  
    xj=[x[j],x[j+1],x[j],x[j+1]];  
    yi=[y[i],y[i],y[i+1],y[i+1]];  
    Am=xj'|xj'*yi'|yi'|ones(4,1);  
    abcd=Am\z';  
    hint=[pt[2],pt[2]*pt[1],pt[1],1].abcd;  
    return hint;  
endfunction
```

2. Tegyük fel, hogy ismertek egy 50 pontból álló hálózat pontjaiban a magasságok. Állítsunk elő egy olyan ábrát, amely megmutatja a magasságkülönbségek átlagos értékét a hálózati pontok távolságának függvényében, a hálózat pontjai közötti távolságokat 20 egyenlő részre osztva.

Tanács: Először állítsuk elő a pontok közötti összes távolságot tartalmazó 50x50-es mátrixot, illetve az ennek megfelelő magasságkülönbség mátrixot. Dimenzionáljuk át mindkét mátrixot

sorvektorra és rendezzük át őket növekvő távolság szerint. Ezután határozzuk meg a minimális és maximális távolságot, osszuk be ezt az intervallumot 20 egyenlő részre. Végül írjunk függvényt, amelyik átlagolja az egyes intervallumokba eső magasságkülönbségeket.

2 Korszerű lineáris algebrai módszerek

2.1 Vektor és mátrix normák, kondíciószám

Mit nevezhetünk egy szám nagyságának? Az abszolút értékét: $|a| = \sqrt{a^2}$. Hogyan definiáljuk egy vektor vagy mátrix nagyságát (ez a norma)? Jelöljük az x vektor ill. X mátrix normáját $\|x\|$ -szel illetve $\|X\|$ -szel. Többféle vektor, illetve mátrix norma van, de mindegyikre igaznak kell lennie az alábbi alapösszefüggéseknek:

$$\begin{aligned}\|x\| &\geq 0 \quad \text{és valós} \\ \|x\| + \|y\| &\geq \|x + y\| \\ \|\alpha x\| &= |\alpha| \|x\| \\ \|XY\| &\leq \|X\| \|Y\|\end{aligned}\tag{2.1}$$

Szokásos vektor normák

abszolút értékek összege:

$$\|x\|_1 = \sum_i |x_i|$$

standard vagy Euklideszi norma:

$$\|x\|_2 = \left(\sum_i |x_i|^2 \right)^{1/2}$$

maximális elem (hibavektorhoz hasznos):

$$\|x\|_\infty = \max_i |x_i|$$

Szokásos mátrix normák

vektor normákból levezetett:

$$\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

maximális oszlopösszeg:

$$\|A\|_1 = \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$(A^T A)^{1/2}$ maximális sajátértéke:

$$\|A\|_2$$

maximális sorösszeg:

$$\|A\|_\infty = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Frobenius norma:

$$\|A\|_F = \left(\sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \right)^{1/2}$$

Norma számítás Maple-ben: `norm[linalg]: norm(A, normname)`, ahol
normname: 1, 2, 'infinity', 'frobenius'

2.2 Kondíciószám, rosszul kondicionált egyenletek

Az adatok kis megváltozása drasztikusan megváltoztathatja a megoldást, például lineáris egyenletrendszerek megoldása esetében. Egy A együttható mátrixszal felírt lineáris egyenletrendszer *kondíciószáma* az alábbi összefüggéssel definiálható:

$$\kappa(A) = \|A\| \|A^{-1}\| \quad (2.2)$$

Itt bármelyik mátrix norma használható, tehát beszélhetünk különböző kondíciós számokról: $\kappa_1(A)$, $\kappa_2(A)$, $\kappa_\infty(A)$, stb. A Maple a `cond(A, normname)` paranccsal számítja ki a kondíciós számot. Láthatjuk például, hogy az $\|A\|_2$ norma esetén a maximális és minimális sajátértékek hányadosa lesz a kondíciós szám.

Példa

$$\begin{bmatrix} 1 & -1,00001 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{megoldása:} \quad \begin{bmatrix} 100001 \\ 100000 \end{bmatrix},$$

viszont az adatokat csak kicsit megváltoztatva

$$\begin{bmatrix} 1 & -0,99999 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{a megoldás:} \quad \begin{bmatrix} -99999 \\ -100000 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrizzük le a megoldást Euler-ben az `x=A\b`; utasítással:

```
% Az eredeti egyenletrendszer:
>A1=[1, -1.00001; 1, -1];
>b=[0; 1];
% megoldása:
>A1\b
    100001
    100000
% kicsit megváltoztatott egyenletrendszer
>A2=[1, -0.99999; 1, -1];
% megoldása teljesen más:
>A2\b
    -99999
   -100000
```

Látható, hogy a fenti A mátrix *rosszul kondicionált* egyenletrendszerhez vezet. Számítsuk ki a kondíciós számát (`svdcondition()` a maximális és minimális sajátérték hányadosa):

```
>svdcondition(A1)
    400002
```

Ez a magas kondíciós szám jelzi a rosszul kondicionáltságot.

Notóriusan rosszul kondicionált mátrix az ún. *Hilbert-féle mátrix*:

$$H_n = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \dots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \dots & \frac{1}{2n-1} \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki például $n=5$ esetén a Hilbert-mátrix kondíciós számát:

```
>svdcondition(hilb(5))
    476607
```

A Hilbert mátrix kondíciós száma növekvő n -re az exponenciálisnál is gyorsabban nő, például $n=15$ esetén már $6.32643 \cdot 10^{17}$ az értéke (ez 17 értékes jegy elvesztését jelenti). A numerikus algoritmusokat ezért előszeretettel tesztelik Hilbert-mátrixokkal.

Ne gondoljuk, hogy rosszul kondicionált mátrixok a gyakorlatban csak ritkán fordulnak elő! Hogy ezt lássuk, vizsgáljunk meg egy ismert *polinomillesztési feladatot*.

2.3 Polinomillesztési feladat

Legyenek adottak az x_j ($j=1, 2, \dots, p$) pontokban az $\tilde{y}_j$ mérések. Határozzuk meg a legkisebb négyzetek szerint legjobban illeszkedő n -edfokú

$$y(x) = P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$$

polinomot ezekben a pontokban!

Ha az x_j koordinátákat hibátlannak tekintjük, akkor a

$$\sum_{j=1}^p \varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^p (y_j - \tilde{y}_j)^2 = \min$$

összeg minimalizálásával meghatározhatjuk az ismeretlen együtthatókat (paramétereket), ahol

$$y_j = \sum_{i=0}^n a_i x_j^i.$$

Ez a következő egyenletrendszerhez vezet:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{X} \cdot \mathbf{a} - \tilde{\mathbf{y}},$$

ahol $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p]^T$, $\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_p]^T$, $\mathbf{a} = [a_0, \dots, a_n]^T$ (ismeretlenek), és az alakmátrix

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1^0 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_p^0 & \dots & x_p^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & x_p^n \end{bmatrix}.$$

Az egyenletrendszer *legkisebb négyzetek szerinti megoldása* megadja a keresett paramétervektort:

$$\mathbf{a} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} (\mathbf{X}^T \tilde{\mathbf{y}}).$$

Kérdés: Vajon ez az egyenletrendszer jól kondicionált-e? Határozzuk meg az $(\mathbf{X}^T \mathbf{X})$ mátrix kondíciós számát. Az egyszerűség kedvéért legyenek az adatpontok az

$$x = 1, 2, 3, \dots, p$$

és $n=p-2$ ($n < p$ kell, hogy teljesüljön).

Az alakmátrixra és a kondíciós számra $p = 4$ esetén (másodfokú polinom)

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{bmatrix} \quad \kappa(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 5431 \approx 5 \cdot 10^3$$

adódik. Ha növeljük az adatpontok számát (egyben a polinom fokszámát), a kondíciós szám meredeken emelkedik:

$$p = 6 \quad \kappa(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 1,51 \cdot 10^6,$$

$$p = 7 \quad \kappa(\mathbf{X}^T \mathbf{X}) = 7,41 \cdot 10^8.$$

Az utolsó eset ötödfokú polinomnak felel meg. Látszik, hogy ebben az esetben a feladat rosszul kondicionáltsága miatt a számítás során már legalább 8 értékes jegy elveszik! Nem véletlen tehát, hogy pl. a Vetületi Szabályzat előírja azt, hogy a vetületi átszámítás során maximum ötödfokú polinomot szabad használni.

Kérdés: Megváltozik-e a helyzet, ha más (szabálytalan) adatpont halmazt veszünk fel?

Gyakorlat: Legyenek az adatpontjaink $\mathbf{x} = [1 \quad 2,5 \quad 3 \quad 4,5 \quad 5,1 \quad 7]$. Számítsuk ki a polinomillesztési feladat kondíciószámait $p = 4, 5, 6$ esetére!

Tanács: használjuk az alábbi Maple parancsot (vagy oldjuk meg Euler-rel a feladatot):

`cond(evalm(transpose(X&*X))); [with(linalg);]`

Hasonlítsuk össze az eredményeinket az előzővel! Válaszoljunk a kérdésre!

Tanulság: Legyünk nagyon óvatosak! Rosszul kondicionált feladatok egészen természetes módon és túlságosan is gyakran adódnak.

2.4 Szinguláris érték felbontás (SVD)

Előzmények

rang: az $\mathbf{A}$ mátrix rangja a lineárisan független sorainak vagy oszlopainak a száma.

Emlékezzünk rá, hogy egy n sorból és m oszlopból álló $\mathbf{A}$ mátrix egy lineáris leképezést valósít meg egy m dimenziós lineáris tér bázisvektoraiból egy n dimenziós lineáris térbe.

ortogonális mátrix: az ortogonális mátrix olyan négyzetes mátrix, amelynek oszlopvektoraai páronként egymásra merőlegesek (a merőlegesség itt zérus skalárszorzatot jelent).

Ez azt jelenti, hogy egy ortogonális mátrix a bázisvektorok egymásra merőleges halmazát egy új egymásra merőleges bázisvektor halmazra képezi le. Ez a művelet egy *általánosított forgatás*, mivel geometriailag a tér elforgatásának és esetleg néhány tengely tükrözésének felel meg. Így tehát ortogonális mátrixok szorzata ismét ortogonális mátrix.

sajátérték: az $\mathbf{A}$ mátrix λ_k sajátértékei azok, amelyekre $|\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{I}| = 0$ teljesül.

sajátvektor: az $\mathbf{A}$ mátrix $\mathbf{u}_k$ sajátvektoraik azok, amelyekre $\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \lambda_k \mathbf{u}_k$, ($\mathbf{u}_k \neq \mathbf{0}$) teljesül.

Szimmetrikus mátrix sajátértékei mind valósak, ezen kívül a sajátvektorok valósak és ortogonálisak. Tehát bármely szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix esetén van egy olyan ortogonális $\mathbf{U}$ mátrix, hogy $\mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda}$, ahol $\mathbf{\Lambda}$ a sajátértékekből alkotott átlós mátrix.

vektorok külső szorzata egy $(m \times n)$ -es, 1-rangú mátrix:

$$\mathbf{xy}^T = \{x_m y_n\},$$

ahol $\mathbf{x}$ $(m \times 1)$ -es, $\mathbf{y}$ $(n \times 1)$ -es vektorok.

Egy mátrix *szinguláris érték felbontása* a mátrix ábrázolásának standard formája. Kár, hogy alig tanítják, mert nemcsak alapvető mátrixfelbontás, hanem egyben rendkívül hasznos is.

Legyen $\mathbf{X}$ egy $(n \times m)$ -es mátrix és legyen $m \leq n$. Az $\mathbf{X}\mathbf{X}^T$ és $\mathbf{X}^T\mathbf{X}$ mátrixok nemnegatív $(m \times m)$ -es és $(n \times n)$ -es *szimmetrikus* mátrixok, azonos $\{\lambda_i\}$ valós sajátértékekkel. Mivel $m \leq n$,

ezért legfeljebb $r \leq m$ nemzérus sajátérték van (r a mátrix rangja). Ezért lehetséges r ortogonális, $(m \times 1)$ -es $\{\mathbf{V}_m\}$ sajátvektort találni $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ -hez és r ortogonális, $(n \times 1)$ -es $\{\mathbf{U}_m\}$ sajátvektort találni $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$ -hez, azaz

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} \mathbf{V}_m = \lambda_m \mathbf{V}_m, \quad m = 1, \dots, r \quad (2.3)$$

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T \mathbf{U}_m = \lambda_m \mathbf{U}_m, \quad m = 1, \dots, r \quad (2.4)$$

Az alapvető eredmény tehát az, hogy bármely $\mathbf{X}$ $(n \times m)$ -es mátrix felbontható az alábbi három mátrix szorzatára

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T, \quad (2.5)$$

ahol $\mathbf{U}$ $(n \times r)$ -es és $\mathbf{V}$ $(m \times r)$ -es mátrixok, amelyeknek az oszlopai egymásra ortogonálisak. A $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ pedig a sajátértékekből alkotott átlós mátrix:

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}.$$

Ennek a felbontásnak az az előnye, hogy az $\mathbf{X}$ mátrix hatását könnyen érthető részekre bontja: egy (általánosított) forgatásra, a tengelyek átskalázására és egy újabb forgatásra. Ha ismert ez a felbontás, közvetlenül megválaszolhatunk az $\mathbf{X}$ mátrixra vonatkozó számos kérdést.

Az $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$ felbontást az $\mathbf{X}$ mátrix *spektrális ábrázolásának* vagy *külső szorzat felbontásának* is nevezik (ennek okát lásd később).

Az SVD tulajdonságai

1. Ha már ismerjük a $\mathbf{V}_m$, $m = 1, \dots, r$ sajátvektorokat, az $\mathbf{U}_m$ sajátvektorok kiszámíthatók:

$$\mathbf{U}_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \mathbf{X} \mathbf{V}_m \quad m = 1, \dots, r.$$

2. Az $\mathbf{X}_k$ mátrixok, amelyeket az alábbi (külső szorzat) részösszegek definiálnak,

$$\mathbf{X}_k = \sum_{m=1}^k \sqrt{\lambda_m} \mathbf{U}_m \mathbf{V}_m^T \quad k \leq r, \quad (2.6)$$

a *legjobb k-rangú legkisebb négyzetek szerinti közelítése* $\mathbf{X}$ -nek, ha a λ_m -eket nagyság szerint csökkenő sorrendbe rendezzük ($\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_r$). Mivel bármely $k \leq r$ esetén a közelítés négyzetes hibája,

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{m,n} |x(m,n) - x_k(m,n)|^2,$$

végül is így írható fel:

$$\varepsilon_k^2 = \sum_{m=k+1}^r \lambda_m.$$

A (2.6) felbontás teljesen analóg egy bázisfüggvények szerinti *sorfejtéssel*, ahol a megfelelő λ_m skalárok négyzetgyökei adják a mátrix spektrumát.

1. gyakorlat

Legyen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Keressük meg az $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ mátrix sajátértékeit, ezután számítsuk ki $\Lambda^{1/2}$ -t, majd az $\mathbf{X}$ mátrix SVD felbontását, valamint a $\mathbf{V}_1$, $\mathbf{V}_2$ sajátvektorokat.

Ezután számítsuk ki $\mathbf{U}_1$ -et a fenti képletből és a legjobb lkn. 1-rangú $\mathbf{X}_1$ közelítőjét $\mathbf{X}$ -nek!

Megoldás (Euler)

```
% Mátrix SVD
>X=[1,2; 2,1; 1,3]
      1      2
      2      1
      1      3
% X'.X sajátértékei és sajátvektorai
>{e,V}=eigen(X'.X);
% Lam^1/2 mátrix
>Lam=sqrt(diag([2,2],0,e))
      1.39203+0i      0+0i
      0+0i      4.24997+0i
>U=X.V/sqrt(e)
      0.0998137+0i      0.52512+0i
      -0.882089+0i      0.439712+0i
      0.460386+0i      0.72863+0i
>U.Lam.V'
      1+0i      2+0i
      2+0i      1+0i
      1+0i      3+0i
% ez az eredeti X mátrix
>re(U.Lam.V')
      1      2
      2      1
      1      3
% Legjobb 1-rangú közelítése X-nek
>X1=sqrt(e[2])*U[:,2]*V[:,2]'
      1.12017+0i      1.93026+0i
      0.937983+0i      1.61631+0i
      1.5543+0i      2.67833+0i
% Eltérések:
>re(X1-X)
      0.120174      -0.0697395
      -1.06202      0.616313
      0.554295      -0.32167
```

2. gyakorlat

Legyen

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 4 & 7 & 8 \end{bmatrix}.$$

Számítsuk ki $\mathbf{X}$ SVD felbontását, ezenkívül $\sum_{m=1}^k \lambda_m$ -et ($k = 1, 2$).

Unitér (ortogonális) SVD

unitér mátrix (komplex ortogonális): $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{*T}$ (transzponált konjugált)

Néha az SVD felbontást *négyzetes* $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ unitér mátrixokkal definiálják. Ezek mérete ekkor $(m \times m)$ -es és $(n \times n)$ -es, és ezt további ortogonális sajátvektorokkal való kibővítéssel érik el. $\mathbf{X}$ továbbra is $(m \times n)$ -es mátrix, az ortogonális SVD felbontás pedig

$$\begin{bmatrix} \Lambda^{1/2} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{U}^T \mathbf{X} \mathbf{V}.$$

2.4.1 Szinguláris érték felbontás alkalmazása egyenletek megoldására. Pseudoinverz

Négyzetes, nonszinguláris $\mathbf{A}$ mátrixok esetén az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet megoldása $\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}$. Általánosabb esetben az SVD kibővíti a mátrix inverz fogalmát szinguláris és nem négyzetes mátrixokra az $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ egyenlet megoldása céljából.

Az $\mathbf{A}$ mátrix SVD felbontása (ortogonális SVD) a következő:

$$\underset{(m,n)}{\mathbf{A}} = \underset{(m,m)}{\mathbf{U}} \underset{(m,m)}{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T, \quad (2.7)$$

ahol

$$\underset{(m,m)}{\Lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \sqrt{\lambda_r} & \vdots & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Amikor $\mathbf{A}$ nonszinguláris négyzetes mátrix, az $\mathbf{A} = \mathbf{U} \Lambda^{1/2} \mathbf{V}^T$ egyszerűen invertálható, $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ ortogonalitását kihasználva és tekintetbe véve azt, hogy $\Lambda^{1/2}$ $(m \times m)$ -es átlós mátrix ($r = m$) az inverz a következő lesz:

$$\mathbf{A}^{-1} = (\mathbf{U} \Lambda^{1/2} \mathbf{V}^T)^{-1} = (\mathbf{V}^T)^{-1} (\Lambda^{1/2})^{-1} \mathbf{U}^{-1} = \mathbf{V} \Lambda^{-1/2} \mathbf{U}^T.$$

A lineáris egyenletrendszer megoldása tehát $\mathbf{x} = \mathbf{V} \Lambda^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{b}$.

Ha $\mathbf{A}$ szinguláris vagy nem négyzetes, $\Lambda^{1/2}$ nem invertálható, mivel a főátlóban vannak zérus elemei. Viszont definiálható egy $\mathbf{A}^+$ $(n \times m)$ -es *pseudoinverz* mátrix az alábbi azonosság szerint: $\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{I}$.

Ha bevezetjük a

$$\underset{(m,m)}{\Lambda}^{1/2+} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r^{-1/2} & \vdots & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

jelölést, egyszerűen igazolható, hogy $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \Lambda^{1/2+} \mathbf{U}^T$. A $\Lambda^{1/2}$ mátrix zérus elemei a $\Lambda^{1/2+}$ mátrixban is zérusok lesznek (zérus kitöltés). Ha $\mathbf{A}$ négyzetes és nonszinguláris mátrix, a pseudoinverz és az inverz azonosak: $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^+$.

2.4.2 Legkisebb négyzetek problémájának megoldása a pszeudoinverz segítségével

Legyen adott az $\mathbf{A}$ alakmátrix és egy m -elemű $\mathbf{y}$ vektor. Keressük meg azt az $\mathbf{x}$ vektort, amely minimalizálja az $\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$ normát, azaz az $\mathbf{Ax} - \mathbf{y}$ maradékvektor hosszát!

Ennek a legkisebb négyzetek problémájának az egyik megoldása az $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$ vektor. A $\mathbf{A}^{1/2+}$ mátrix definíciójakor elfogadott zérus kitöltés miatt a *megoldás* egyértelmű és $\|\mathbf{x}\|_{\min}$ *minimális normájú*.

Az $\mathbf{A}$ alakmátrix SVD felbontását (a pszeudoinverz $\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T$ SVD előállítását) felhasználó legkisebb négyzetes megoldás tehát a következő lesz:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{y}.$$

Példa: Polinomillesztés SVD felbontással

Illesszünk harmadfokú

$$y_k \cong \sum_{i=0}^3 a_i x_k^i \quad (k = 1, 2, \dots)$$

polinomot az $\mathbf{x} = [0 \ 0,2 \ 0,4 \ 0,6 \ 0,8 \ 1]$ pontokban vett $\mathbf{y} = [-3 \ -2,6 \ -2,3 \ -1,8 \ -1,4 \ -1]$ mérési adatokhoz!

Megoldás (Maple)

```
d:=evalf(Svd(A,U,V));
D1:=diag( ... elements of d);
a:=evalm(V*(inverse(D1)&*submatrix(transpose(U)*y, 1..4, 1..1)));
```

A megoldásvektor a fenti problémára az SVD segítségével a következő lesz:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -2.988\,888\,890 \\ 1.582\,010\,589 \\ 0.873\,015\,864 \\ -0.462\,962\,961 \end{bmatrix} \quad \text{a különbség:} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ 0.1 \cdot 10^{-8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Azt, hogy egy legkisebb négyzetek probléma mennyire rosszul vagy jól kondicionált, gyorsan és közvetlenül meghatározhatjuk a szinguláris értékekből. Ugyanis a legkisebb négyzetes feladat szokásos kondíciószáma

$$\kappa_{LS}(\mathbf{A}) = \frac{\sqrt{\lambda_1}}{\sqrt{\lambda_n}},$$

ahol $\mathbf{A}$ ($m \times n$)-es alakmátrix.

Ha $\sqrt{\lambda_n} = 0$, akkor $\mathbf{A}$ -nak lineárisan összefüggő oszlopai vannak, és a problémát nem lehet megoldani semmilyen szükséges pontossággal. Egy ilyen mátrixot *ranghiányos* mátrixnak is neveznek. Viszont akár négyzetes egy mátrix, akár nem, akár ranghiányos, akár nem, a pszeudoinverze mindig létezik. Éppen ezért tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrixszal felírt legkisebb négyzetes problémának általában létezik megoldása, $\mathbf{x} = \mathbf{A}^+ \mathbf{y}$. Ez a megoldás az a *legkisebb* $\mathbf{x}$ vektor, amelyik egyben *minimalizálja* a hiba négyzetösszegét is.

Gyakorlat

Mi a fenti polinomillesztési feladat κ_{LS} kondíciószáma? Mi lesz a megoldás a normálegyenletek módszerét használva?

2.4.3 Súlyozott legkisebb négyzetek problémájának megoldása a szinguláris érték felbontás (SVD) segítségével

Legyen adott az $\mathbf{A}$ ($m \times n$)-es alakmátrix, $\mathbf{P}$ a mérések ($m \times m$)-es súlymátrixa és egy m -elemű $\mathbf{y}$ mérési eredmény vektor. Keressük meg azt a (minimális) $\mathbf{x}$ n -elemű paramétervektort, amely minimalizálja az $(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$ normát (súlyozott négyzetösszeget). A hagyományos megoldást az

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A})^{-1} (\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{y}) \quad (2.8)$$

összefüggés adja, a normálegyenletrendszer felállításán keresztül.

Írjuk fel most az SVD-n alapuló megoldást, beírva a fenti egyenletbe a $\mathbf{P}_0 \mathbf{A}$ mátrix ($\mathbf{P}_0^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$, $\mathbf{P}_0 \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$ SVD felbontását (mivel $\mathbf{A}^T (\mathbf{P}_0 \mathbf{A})^T \mathbf{P}_0 \mathbf{A} \mathbf{A} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A}$):

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= ((\mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T)^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T)^{-1} ((\mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T)^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}) \\ &= (\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T)^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \\ &= (\mathbf{V}^T)^{-1} (\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \\ &= \mathbf{V} (\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \\ &= \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{-1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.9)$$

A levezetés 5. sorában feltételeztük, hogy $\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$ invertálható. Ha az $\mathbf{A}$ mátrix ranghiányos, akkor $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ nem mindegyik főátlóbeli eleme zérustól különböző, tehát $\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2}$ szinguláris (nem invertálható). Viszont a pszeudinverz ekkor is létezik, $\mathbf{\Lambda}^{-1/2} = \mathbf{\Lambda}^{1/2+}$ (az előző szakaszban mondottak szerint). Tehát a teljesen általános megoldás és ez tetszőleges $\mathbf{A}$ mátrix esetén a következő:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y} \quad (2.10)$$

Példa: Rosszul kondicionált lkn. feladat megoldása SVD-vel (Euler)

két adatvektort definiálunk:

```
>c1=[1 2 4 8]';
>c2=[3 6 9 12]';
```

a harmadik ezek lineáris kombinációja plusz egy kis "zaj"

```
>c3=c1-4*c2+0.0000001*(random(4,1)-0.5*[1 1 1 1]');
```

az alakmátrix ezekből mint oszlopokból áll és rosszul kondicionált lesz

```
>A=c1|c2|c3
      1      3      -11
      2      6      -22
      4      9      -32
      8     12     -40
```

most hasonlóan definiáljuk a mérési eredmények vektorát

```
>y=2*c1-7*c2+0.0001*(random(4,1)-0.5*[1 1 1 1]')
-19
-38
-55
-68
```

a súlymátrix:

```
>P=diag([4,4], 0, [1 4 4 6])
      1      0      0      0
      0      4      0      0
      0      0      4      0
      0      0      0      6
```

1. Megoldás - hagyományos normálegyenletekkel

```
>x=inv(A'.P.A).A'.P.y
-1.82787
-3.0645
0.818348
```

'maradék' vektor - y-nal azonos nagyságrendű!!!

```
>v=y-A.x; sqrt(v'.P.v)
41.5554
>sqrt(y'.y)
97.2317
```

2. megoldás SVD-vel

```
>{U,w,V}=svd(sqrt(P).A);
>w
132.397      5.46867 2.48116e-008
>U
-0.0862163 -0.153196 -0.112261
-0.344865 -0.612785 0.709608
-0.505365 -0.490184 -0.681542
-0.786283 0.600621 0.139119
>V
-0.157983 0.958898 0.235702
-0.276482 0.186196 -0.942809
0.947945 0.214115 -0.235702
>lp=diag([3,3], 0, 1/w[1:3])
0.00755301      0      0
0      0.18286      0
0      0 4.03037e+007
```

paraméter vektor

```
>xs=V.lp.U'.sqrt(P).y
-244.46
978.841
246.46
```

$\mathbf{v}$ maradék vektor és $\mathbf{v}^T \mathbf{P} \mathbf{v}$ normája

```
>vs=y-A.xs; sqrt(vs'.P.vs)
6.45121e-006
>vs
3.88505e-006
-7.87231e-007
-1.53059e-006
-1.5639e-006
```

a feladat kondíciószáma (maximális és minimális sajátértékek hányadosa):

```
>max(w)/min(w)
5.33611e+009
```

2.4.4 Mátrix approximáció szinguláris érték felbontás (SVD) segítségével

Legyen adott az $\mathbf{A}$ ($m \times n$)-es mátrix. A (2.6) egyenlet értelmében az SVD felbontása csökkenő sajátértékei szerinti sor első r tagja a mátrix *legjobb r -ed rangú közelítését* állítja elő. Ha kiszámítjuk az $r+1$ -edik sajátértéktől kezdve a sajátértékek négyzetösszegének

négyzetgyökét, ez az adott r rangú közelítő A_r mátrix és az eredeti mátrix négyzetes eltérését adja. Valójában bebizonyítható, hogy az SVD adja a *legjobb* ilyen négyzetes értelemben vett r -ed rangú közelítését A -nak. Ha tehát a mátrix sajátértékei gyorsan csökkennek, akkor ezek a közelítések négyzetes értelemben már viszonylag kis r értékre nagyon jók lesznek.

Ez az eljárás alkalmazható például képtömörítésre, adatrendszer tömörítésre, felület approximációra, stb. A tömörítés akkor hatékony, ha r kis érték, mert ekkor csak $r(m + n)$ darab számot kell tárolni, $m \cdot n$ szám helyett.

Példa: magyarországi geoidfelület SVD közelítése

Euler program:

SVD alkalmazása a magyarországi geoidfelület közelítésére

Beolvasom a geoid adatokat

φ, λ, N : 2450 adatpont, $0.1^\circ \times 0.1^\circ$ rácra (HGTUB98 megoldás)

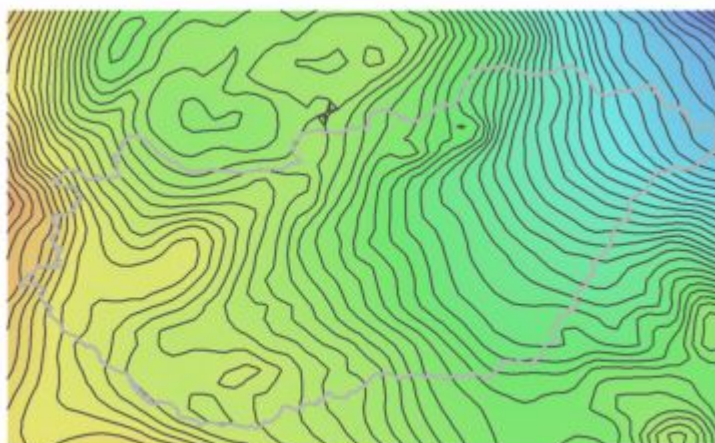
```
>geoid=getmatrix(2450,3,"geoid.txt");
```

geoidmagasságok rácra 35 sor, 70 oszlop

```
>N=flipy(redim(geoid[:,3],35,70));
```

kirajzoltatom a közelítendő geoidfelületet

```
>huecolor(0); density(N);
```



Geoidfelület [izovonalköz: 0.2 m]

SVD felbontást számítok

```
>{U,w,V}=svd(N);
```

Jól látszik, hogy csökkenő sajátértékek szerint van rendezve

```
>w[1:10]
```

Column 1 to 6:

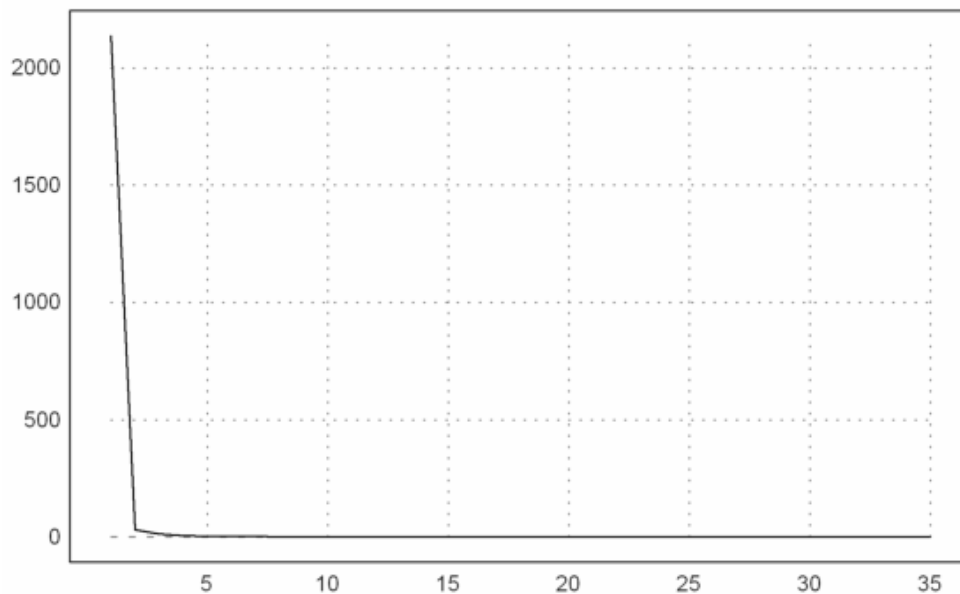
2137.49	30.1655	12.7873	4.23156	3.37888	2.95186
---------	---------	---------	---------	---------	---------

Column 7 to 10:

1.90148	1.25895	0.966045	0.879069
---------	---------	----------	----------

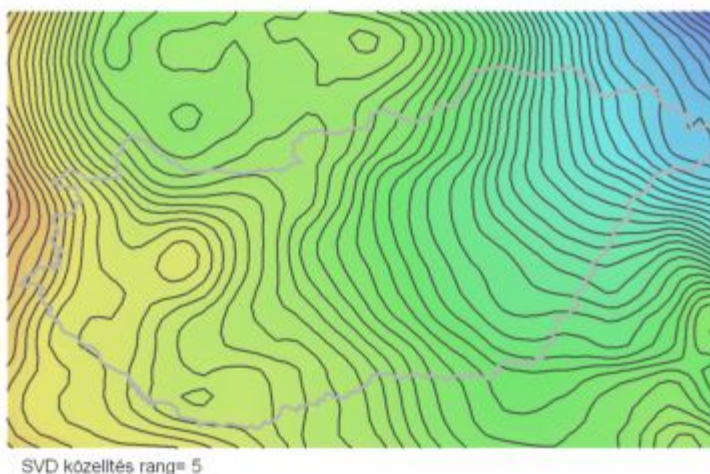
Ki is rajzoltathatjuk a mátrix spektrumát, és látszik, hogy mivel a geoidfelület sima függvény, a sajátértékei igen gyorsan csökkennek

```
>wmin=1; wmax=min(size(N)); xplot(wmin:wmax,w[wmin:wmax]);
```



Legjobb n-edfokú SVD közelítés, step -enként kirajzoltatva

```
>function svdapprox(U,w,V,k,n,step)
$ dm=zeros(rows(U),cols(V));
$ for i=k to n;
$   dm=dm+w[i]*U[:,i]*V[:,i]';
$   if mod(i,step)==0;
$     cmin=floor(totalmin(dm)); cmax=floor(totalmax(dm));
$     linewidth(1); color(1);
$     density(dm); hold on; contour(dm,cmin:0.2:cmax);
$     linewidth(4); color(7); plot(hun([16,22.9,45.6,49])); hold off;
$     label("SVD közelítés rang= ",i,18,45.6);
$     key();
$   endif;
$ end;
$ return dm;
$endfunction
>Na=svdapprox(U,w,V,1,5,5);
```



a közelítés relatív hibája

```
>erel=sqrt(cumsum(w[wmax:-1:1]^2)/sum(w^2));
>xplot(wmax:-1:1,erel)
```

1	35	1.72053e-005	1
---	----	--------------	---

közelítés rms hibája

```
>er=sqrt(cumsum(w[wmax:-1:1]^2)/2450);
>xplot(wmax:-1:1,er[1:wmax])
```

1	35	0.000743082	43.1891
---	----	-------------	---------

Látható, hogy már az 5-öd rangú közelítés +/- 10 cm-es középhibával adja vissza a felületet. Ez összesen $5 \cdot (70+35) = 525$ elem tárolását jelenti, 2450 elem helyett

```
>er[wmax:-1:10]
```

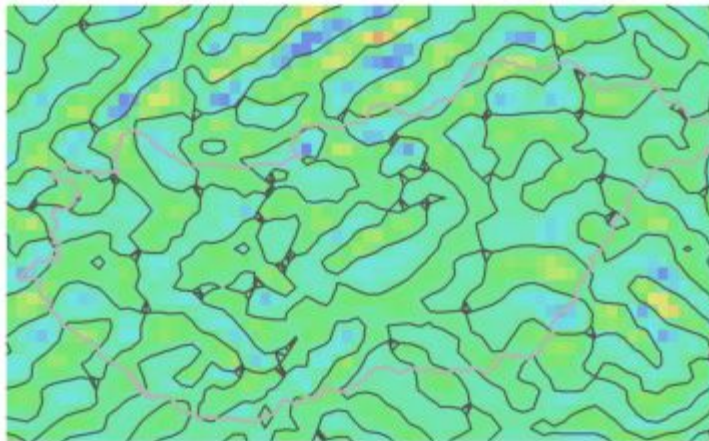
Column 1 to 6:

43.1891 0.676345 0.293312 0.138891 0.109463 **0.0855701**

Column 7 to 12:

0.0613653 0.0478533 0.0405342 0.0355261 0.0307684 0.0264125

a 10-ed rangú közelítés eltérései ábrája



Eltérések [izovonalköz: 0.2 m]

3 Korszerű statisztikai módszerek

3.1 Statisztikai hipotézisvizsgálat, statisztikai próbák

A statisztikai hipotézisvizsgálatkor általában valamilyen feltételezésből, az ún. *nullhipotézisből* indulunk ki (lásd Detrekői: Kiegyenlítő számítások, 1991). Ilyen feltételezés lehet például két mérési eredményt jellemző ξ és η valószínűségi változó várható értékének egyenlősége:

$$H_0: a(\xi) = a(\eta). \quad (3.1)$$

A nullhipotézissel szembeni valamely más lehetőséget *ellenhipotézisnek* vagy *alternatívának* nevezzük. Például a (3.1) nullhipotézissel szembeni lehetséges alternatíva a következő:

$$H_1: a(\xi) \neq a(\eta). \quad (3.2)$$

A hipotézisvizsgálatkor a nullhipotézissel kapcsolatosan két alternatív válasz lehetséges: a nullhipotézist elfogadjuk vagy elutasítjuk. Azt az eljárást, amelynek alapján egy statisztikai hipotézis felől minta alapján döntünk, *statisztikai próbának* nevezzük.

A próba alapján hozott döntés kétféle módon lehet hibás: *elsőfajú hiba* áll fenn, ha a nullhipotézist elutasítjuk, holott az fennáll; *másodfajú hibát* követünk el, ha elfogadjuk a nullhipotézist, holott nem áll fenn, hanem az alternatíva valamely eloszlása érvényes. A logikailag lehetséges döntéseket az alábbi sémában foglalhatjuk össze.

	Ha a nullhipotézist	
	elfogadjuk	elutasítjuk
H_0 fennáll	helyes döntés	elsőfajú hiba
H_0 nem áll fenn	másodfajú hiba	helyes döntés

A statisztikai próbák konstrukciója a következő elven alapszik. A k elemű minta alapján meghatároznak egy olyan tartományt, amely, ha a hipotézis igaz, csak egy előre adott igen kis α valószínűséggel tartalmazza a mintát. Ezt a tartományt *kritikus tartománynak* nevezzük, a kiegészítő halmazát pedig *elfogadási tartománynak* hívjuk.

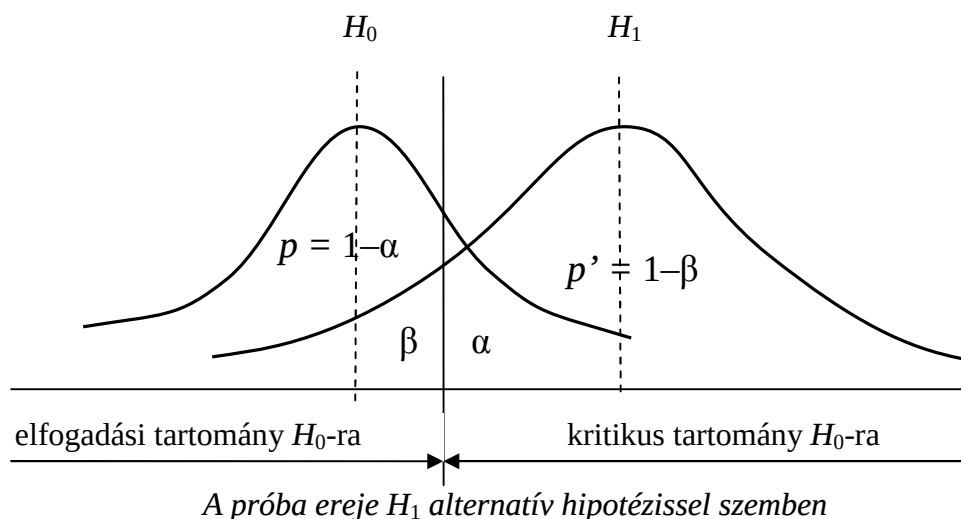
Az elfogadási tartomány meghatározása az $L_1, L_2, \dots, L_k$ k elemű minta valamely $D(L_1, L_2, \dots, L_k)$ statisztikai függvénye (a *statisztika*) alapján történhet. Meghatározzuk ennek a függvénynek az eloszlását a H_0 nullhipotézis fennállása esetén. Előre megválasztott $p = 1 - \alpha$ *konfidenciaszinthez* meghatározzuk a

$$D_0 = f(p/H_0) \quad (3.3)$$

konfidenciaintervallumot, amelybe D értéke a H_0 nullhipotézis fennállása esetén p valószínűséggel esik. Ha a mintából számított $\bar{D}$ érték ebbe az intervallumba esik, akkor a nullhipotézist p szinten elfogadjuk, ellenkező esetben viszont elutasítjuk.

Az ábra alapján az elsőfajú hiba valószínűsége α , a másodfajú hiba elkövetésének valószínűsége pedig β . A helyes elutasítás $p' = 1 - \beta$ valószínűségét pedig a *próba erejének* hívjuk a H_1 alternatív hipotézissel szemben.

A $p = 1 - \alpha$ szintet a matematikai statisztikában általában 0,90; 0,95; 0,99 értékben szokták felvenni. Geodéziai mérések feldolgozásakor alacsonyabb (például 0,80) szint felvétele is indokolt lehet. Ez azonban azzal jár, hogy az elsőfajú hiba valószínűsége növekszik.



Konkrét feladatok megoldásakor a hipotézisvizsgálatot célszerű a következő lépésekre bontva elvégezni:

1. A feladat megfogalmazása, a megfelelő statisztikai próba kiválasztása
2. A H_0 nullhipotézis felvétele
3. A statisztikai függvény eloszlásának meghatározása
4. A statisztika számértékének a mintaelemek alapján történő meghatározása
5. A $p = 1 - \alpha$ konfidenciaszint felvétele
6. A statisztikai függvény elméleti eloszlásából a $p = 1 - \alpha$ konfidenciaszinthez tartozó intervallum meghatározása
7. Döntés a H_0 nullhipotézis elfogadásáról vagy elutasításáról. A döntéshez minden esetben meg kell adni azt a szintet, amelyen a döntés történt.

A következőkben néhány, a gyakorlat számára fontos statisztikai próbát tárgyalunk. A mondottakat számpéldákkal is illusztráljuk.

3.1.1 Statisztikai próba egyetlen várható értékre

Legyen $\xi \sim N(a, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Az $L_1, L_2, \dots, L_k$ minta alapján becsüljük az a várható értéket az $\bar{a}$ mintaközéppel. Vizsgálni akarjuk, hogy a minta várható értéke megegyezik-e valamilyen a_0 értékkel.

A nullhipotézis ebben az esetben a következő lehet:

$$H_0: a = a_0. \quad (3.4)$$

A következőkben két fontos esetet különböztetünk meg.

1. A szórás ismert (u -próba)

Ekkor az

$$u = \frac{a_0 - \bar{a}}{\sigma} \sqrt{k} \quad (3.5)$$

statisztika standardizált $N(0, 1)$ normális eloszlású. A minta alapján a statisztika $\bar{u}$ értékűnek adódik. Az elfogadási tartományt a p konfidenciaszinthez tartozó $(-u_p : u_p)$ intervallum jelenti. A döntés ennek megfelelően a következő:

- ha $|\bar{u}| \leq u_p$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell fogadni;
- ha $|\bar{u}| > u_p$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell utasítani.

Példa

Kitűztünk három pontjával egy egyenest. Ezután felállunk egy teodolittal a középső ponton és $k = 6$ fordulóban megmérjük a két szélső pontra menő irányt. A mérési eredmények alapján a szög $\bar{a} = 180^\circ 0' 3,7''$ -nek adódott. Az egy fordulóban történő szögmérés szórása a korábbi mérések elemzése alapján $\sigma = 5''$ értékű. Kérdés: tekinthető-e a három pont egy egyenesre illeszkedőnek? A kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy lehet-e a méréseink várható értéke $a = 180^\circ 0' 0''$?

A nullhipotézis: $H_0: a = a_0 = 180^\circ 0' 0''$.

A statisztika: $u = \frac{a_0 - \bar{a}}{\sigma} \sqrt{k}$, számértéke $u = -3.7/5 \cdot \sqrt{6} = -1.81$

A konfidenciaszintet $p = 0,90$ értékűnek választjuk.

A statisztika elméleti értéke az inverz normális eloszlásból $\text{invnormaldis}(0.95) = 1.64$

A döntés: mivel $|-1,81| > 1,64$, a nullhipotézist – azaz a három pont egy egyenesre illeszkedését – a $p = 0,90$ szinten **elvetjük**.

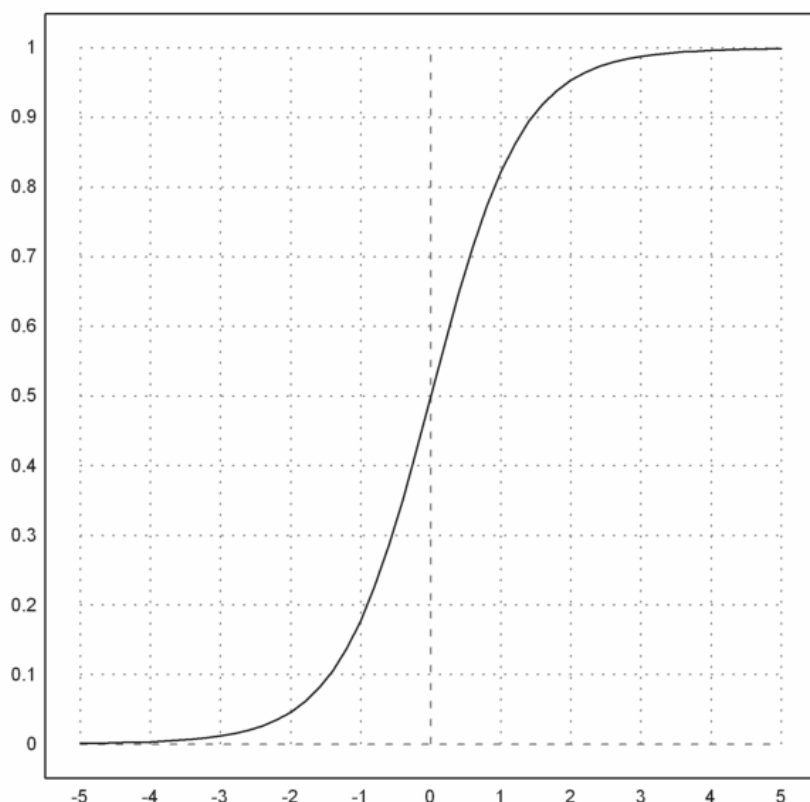
2. A szórás nem ismert (t -próba)

Ebben az esetben a szórást a $\bar{\sigma}$ tapasztalati szórással becsüljük. Ekkor a

$$t = \frac{a_0 - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \sqrt{k} \quad (3.6)$$

statisztika $f = k - 1$ szabadsági fokú t (Student)-eloszlású. A minta alapján a statisztika $\bar{t}$ értékűnek adódik. Az elfogadási tartományt az f szabadsági fokhoz és p konfidenciaszinthez tartozó $(-t_{p,f} : t_{p,f})$ intervallum jelenti. A döntés ennek megfelelően a következő:

- ha $|\bar{t}| \leq t_{p,f}$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell fogadni;
- ha $|\bar{t}| > t_{p,f}$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell utasítani.



$k = 6$ szabadsági fokú Student eloszlás eloszlásfüggvénye

Példa

Vizsgáljuk az előbbi esetet, azzal a különbséggel, hogy a szórás helyett a tapasztalati szórás $\bar{\sigma} = 5''$ értékét tekintjük kiszámítottnak. Kérdés: tekinthető-e a három pont egy egyenesre illeszkedőnek?

A nullhipotézis: $H_0: a = a_0 = 180^\circ 0' 0''$.

A statisztika: $t = \frac{a_0 - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \sqrt{k}$, számértéke $t = -3.7/5 * \sqrt{6} = -1.81$

A konfidenciaszintet $p = 0,90$ értékűnek választjuk.

A statisztika elméleti értéke az inverz t eloszlásból $\text{invtdis}(0.95, 4) = 2.02$

A döntés: mivel $|-1,81| < 2,02$, a nullhipotézist – azaz a három pont egy egyenesre illeszkedését – a $p = 0,90$ szinten **elfogadjuk**.

3.1.2 Statisztikai próba két várható értékre

Legyen $\xi_1 \sim N(a_1, \sigma_1)$ normális eloszlású, $\xi_2 \sim N(a_2, \sigma_2)$ normális eloszlású valószínűségi változó. A ξ_1 -re vett k_1 elemű minta és a ξ_2 -re vett k_2 elemű minta alapján meghatároztuk az $\bar{a}_1$ és $\bar{a}_2$ mintaközépeket. Célul tűzzük ki annak vizsgálatát, hogy a két mintaközép különbsége megegyezik-e valamilyen adott δ értékkel.

A nullhipotézis ebben az esetben a következő:

$$H_0: a_1 - a_2 = \delta. \quad (3.7)$$

A most felírt nullhipotézis speciális esete a $\delta = 0$ érték, ekkor a nullhipotézis a két várható érték egyenlőségét fejezi ki. Ha például a mérések egy távolságra vonatkoznak, akkor a nullhipotézis a pontokat összekötő irányban vett zérus deformáció. Itt is két esetet

különböztetünk meg. Az egyikben a σ_1 és σ_2 szórásokat adottnak, a másikban a $\bar{\sigma}_1$ és $\bar{\sigma}_2$ tapasztalati szórásokat a minta alapján meghatározottnak tételezzük fel. Az első esetben az

$$u = \frac{\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \delta}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{k_1} + \frac{\sigma_2^2}{k_2}}} = \frac{\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \delta}{\sqrt{k_2\sigma_1^2 + k_1\sigma_2^2}} \sqrt{k_1k_2} \quad (3.8)$$

statisztika standardizált $N(0, 1)$ normális eloszlású. Ha a minta alapján a statisztika $\bar{u}$ értékűnek adódik és ezt összevetjük valamilyen p konfidenciaszinthez tartozó u_p értékkel, a döntést a következőképpen végezhetjük el:

- ha $|\bar{u}| \leq u_p$, akkor a nullhipotézist a p szinten elfogadhatjuk;
- ha $|\bar{u}| > u_p$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell vetnünk.

A második esetben a választott statisztika a következő:

$$t = \frac{\bar{a}_1 - \bar{a}_2 - \delta}{\sqrt{(k_1 - 1)\bar{\sigma}_1^2 + (k_2 - 1)\bar{\sigma}_2^2}} \sqrt{\frac{k_1k_2(k_1 + k_2 - 2)}{k_1 + k_2}}. \quad (3.9)$$

Ez a statisztika $f = k_1 + k_2 - 2$ szabadsági fokú t -eloszlású. A minta alapján a statisztika $\bar{t}$ értékűnek adódik. Az elfogadási tartományt az f szabadsági fokhoz és p konfidenciaszinthez tartozó $(-t_{p,f}; t_{p,f})$ intervallum jelenti. A döntés az eddigiekben leírt módon történik:

- ha $|\bar{t}| \leq t_{p,f}$, akkor a nullhipotézis a p szinten elfogadható;
- ha $|\bar{t}| > t_{p,f}$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell utasítani.

Példa

Egy völgyzáró gát elmozdulásának vizsgálatára előmetszéssel meghatároztuk a gát egyes pontjainak a koordinátáit. Valamely vizsgált pontnak a gátra merőleges koordinátája az egyik mérési alkalommal $k_1 = 7$ mérésből $\bar{a}_1 = 100,4136$ m értékűnek, a másik mérési alkalommal $k_2 = 5$ mérésből $\bar{a}_2 = 100,4184$ m értékűnek adódott. A megfelelő tapasztalati szórások $\bar{\sigma}_1 = 0,0042$ m és $\bar{\sigma}_2 = 0,0036$ m értékűek voltak.

A kérdés az, hogy méréseink alapján a két mérési alkalom közötti időben mozdulatlanak tekinthetjük-e a gátat? Ezt a kérdést úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a két alkalommal azonos-e a vizsgált pont gátra merőleges koordinátájának a várható értéke?

A nullhipotézis: $H_0: a_1 - a_2 = 0$.

Mivel a szórásokat is a mérések alapján határoztuk meg, a (3.9) statisztikát kell felhasználnunk. Ennek számértéke méréseink alapján $t = (100.4136 - 100.4184) / \sqrt{(6 * 0.0042^2 + 4 * 0.0036^2)} * \sqrt{(7 * 5 * 10 / 12)} = -2.064$.

A konfidenciaszint ismét legyen $p = 0,90$. A statisztika $f = k_1 + k_2 - 2 = 10$ szabadsági fokú. Az inverz inverz t eloszlásból $\text{invtdis}(0.95, 10) = 1.813$.

A döntés: mivel $|-2,064| > 1,813$, a nullhipotézist – azaz a mozdulatlanságot – a $p = 0,90$ szinten **elvetjük**. Viszont a $p = 0,95$ szinthez $\text{invtdis}(0.975, 10) = 2.229$ érték tartozik, így ezen a szinten a mozdulatlanságot kifejező nullhipotézist már **elfogadhatjuk**. Az a tény, hogy a mozdulatlanságot kifejező nullhipotézist csak viszonylag magas p értéknél fogadhatjuk el, arra figyelmeztet, hogy a mozgás fellépése nem kizárt.

3.1.3 Statisztikai próba erősen eltérő mintaelemre

Mintavételkor – például mérések esetén – előfordul, hogy valamely mintaelem lényeges eltérést mutat a többihez képest.

Ezzel az esettel találkozhatunk például, ha távmérővel többször megmérünk egy távolságot. Ha a mérési sorozat egyik értéke a többitől szemmel láthatóan eltér, felmerül a kérdés, hogy ezt az eredményt a továbbiakban felhasználhatjuk-e. Ha az eltérés lényegesnek tekinthető, akkor általában indokolt a mérés megismétlése, s az eltérő eredmény fel nem használása. A "lényeges eltérés" objektív – vagy legalábbis azonos feltételek esetén megismételhető – megítélését segíti a most bemutatásra kerülő – Grubbs nevéhez fűződő – próba.

Induljunk ki abból, hogy a k elemű minta $L_1, L_2, \dots, L_k$ elemei ugyanazon $N(a, \sigma)$ normális eloszláshoz tartoznak. Legyen a minta legnagyobb eleme $L_{\max}$. Ekkor a

$$q = \frac{L_{\max} - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \quad (3.10)$$

menyiség eloszlása csak a minta k terjedelmétől függ. A k mintaterjedelemhez és a különböző p konfidenciaszintekhez meghatározhatók azok a $q_{p,k}$ értékek, melyekre:

$$P(q \leq q_{p,k}) = p = 1 - \alpha. \quad (3.11)$$

A $q_{p,k}$ értékek meghatározhatók a

$$q_{p,k} = \frac{k-1}{\sqrt{k}} \sqrt{\frac{t_{\alpha/(2k),k-2}^2}{k-2+t_{\alpha/(2k),k-2}^2}} \quad (3.12)$$

összefüggésből, ahol $t_{\alpha/(2k),k-2}$ a $k-2$ szabadsági fokú t -eloszlásból meghatározott $\alpha/(2k)$ szignifikancia szinthez tartozó kritikus érték.

Az eddig leírtak alapján a $q_{p,k}$ érték segítségével megvizsgálhatjuk azt a *nullhipotézist*, hogy az $L_{\max}$ (vagy az $L_{\min}$) a minta többi elemével *azonos eloszlású*.

A statisztika:

$$\bar{q} = \frac{L_{\max} - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \quad (3.13)$$

vagy

$$\bar{q} = \frac{\bar{a} - L_{\min}}{\bar{\sigma}}. \quad (3.14)$$

A döntés:

- ha $\bar{q} \leq q_{p,k}$, akkor a nullhipotézis a p szinten elfogadható,
- ha $\bar{q} > q_{p,k}$, akkor a nullhipotézist a p szinten el kell vetnünk.

Példa

Távmérővel $k=6$ alkalommal megmértünk egy távolságot. A mérési eredmények a következők:

$L_1 = 104,874$ m,	$L_2 = 104,871$ m,	$L_3 = 104,877$ m,
$L_4 = 104,861$ m,	$L_5 = 104,874$ m,	$L_6 = 104,875$ m.

A mérési eredmények közül az L_4 a többitől erősen eltér. A kérdés az, hogy elfogadhatjuk-e az eltérő eredményt a többivel azonos $N(a, \sigma)$ eloszlásúnak, vagy kiugró értéknek kell tekintenünk. A kérdés megválaszolásához a most bemutatott próbát használjuk fel.

A nullhipotézis: $H_0 : L_4 \in N(a, \sigma)$.

A statisztika:

$$\bar{q} = \frac{\bar{a} - L_4}{\bar{\sigma}} = \frac{104,872 - 104,861}{0,0057} = 1,930.$$

A konfidenciaszintet $p = 0,90$ értékűnek választjuk. A kritikus $q_{p,k}$ érték számítható az Euler segítségével az inverz t -eloszlásból:

```
>k=6; alpha=0.1; a=alpha/(2*k);  
>t=invtdis(a, k-2)  
-3.95711  
>qpk=(k-1)/sqrt(k)*sqrt(t^2/(k-2+t^2))  
1.82178
```

Tehát $q_{0,90;6} = 1,822$.

A döntés: mivel $1,930 > 1,822$, a nullhipotézist a $p = 0,90$ konfidenciaszinten el kell vetnünk, tehát ezen a szinten nem mondható a 4. mérési eredmény ugyanahhoz a normális eloszláshoz tartozónak.

3.2 Intervallumbecslés. Megbízhatósági (konfidencia) intervallumok

Ha valamely mérési eredmény normális eloszlást mutat, akkor a mérendő a mennyiség legjobb becslése az $\bar{a}$ mintaközép. Bár nagy k elemszámú minta esetében $\bar{a}$ -t már úgy tekinthetjük, mint ami közel van a -hoz, mégis egyrészt a gyakorlatban a mintanagyság nem mindig túl nagy, másrészt még nagy k esetén is $\bar{a}$ bizonyos hibát tartalmaz. Annak érdekében, hogy képet kapjunk az elkövetett pontatlanságról, szükségesnek mutatkozhat egy olyan felső és egy olyan alsó határ megadása, hogy az ismeretlen paraméter – legalábbis nagy valószínűséggel – ezen határokon belül legyen. Más szóval olyan (c, d) intervallumot keresünk, ami bizonyos értelemben nagy p valószínűséggel tartalmazza a becsült paraméter tényleges a értékét:

$$P(c \leq a \leq d) = 1 - \varepsilon = p. \quad (3.15)$$

Itt c és d nem állandók, hanem valószínűségi változók, melyek konkrét értékét mintából állapítjuk meg.

Ezt az a állandóra vonatkozó ún. *konfidencia intervallumot* (megbízhatósági intervallumot) szabatosabban a következőképpen definiáljuk.

Függjön a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye az ismeretlen a paramétertől. Ha előre adott $p = 1 - \varepsilon$ valószínűséggel (ahol ε kicsi, tehát p egyhez közeli szám) a ξ -re vonatkozó $L_1, L_2, \dots, L_k$ megfigyeléseknek olyan $c = c(L_1, L_2, \dots, L_k)$ és $d = d(L_1, L_2, \dots, L_k)$ függvényét (statisztika) tudjuk konstruálni, amelyekre

$$P(c \leq a \leq d) = 1 - \varepsilon = p,$$

akkor a (c, d) intervallumot az a paraméterre vonatkozó p szintű *megbízhatósági szintű konfidencia intervallumnak* nevezzük. A p valószínűség az ún. konfidenciaszint. A konfidenciaszintet legtöbbször 0,90; 0,95; 0,99 értékűnek választják. Valamely kiválasztott paraméter esetén a konfidenciaintervallum annál nagyobb, minél közelebb választjuk 1-hez a konfidenciaszint értékét. Megjegyzendő, hogy a konfidenciaintervallumok meghatározásához általában ismernünk kell a minta eloszlását.

Valószínűségi vektorváltozók esetén szükséges lehet két vagy több paraméter egyidejű vizsgálata. Ilyenkor lehetséges a (3.15) összefüggéssel megadott konfidenciaintervallum fogalmának általánosítása. Például egyváltozós normális eloszlás várható értékéhez konfidenciaintervallumot rendelhetünk, kétváltozós normális eloszlás várható értékeihez konfidenciaellipszist.

Lássunk néhány példát.

3.2.1 Konfidencia intervallum normális eloszlású valószínűségi változó várható értékére

Legyen $\xi \sim N(a, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Az $L_1, L_2, \dots, L_k$ minta alapján becsüljük az a várható értéket az $\bar{a}$ mintaközéppel. Tételezzük fel, hogy a σ szórás ismert.

A felsorolt mennyiségekből képzett

$$u = \frac{a_0 - \bar{a}}{\sigma} \sqrt{k} \quad (3.16)$$

valószínűségi változó standardizált $N(0, 1)$ normális eloszlású. Ennek megfelelően felírhatjuk a várható értékre a következő szimmetrikus intervallumot:

$$P\left(-u_p \leq \frac{a_0 - \bar{a}}{\sigma} \sqrt{k} \leq u_p\right) = p = 1 - \varepsilon, \quad (3.17)$$

ebből

$$P\left(\bar{a} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}} \leq a \leq \bar{a} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}}\right) = p = 1 - \varepsilon \quad (3.18)$$

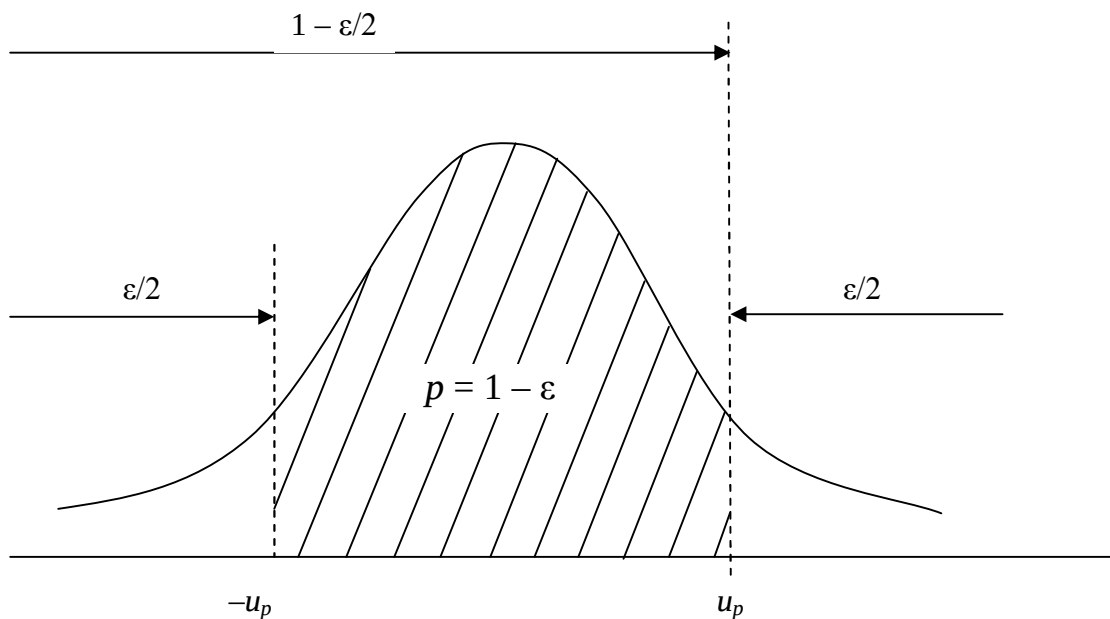
A konfidencia intervallumra vonatkozó jelölésünk szerint

$$\begin{aligned} c &= \bar{a} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}} \\ d &= \bar{a} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}} \end{aligned} \quad (3.19)$$

Ha például $p = 0,95$, akkor $\varepsilon = 1 - p$ miatt $\varepsilon = 0,05$ és az $1 - \varepsilon/2 = 0,975$ értékhez az inverz normális eloszlásból $\text{invnormaldis}(0,975) = 1,9604$ érték adódik u -ra, s így

$$P\left(\bar{a} - 1,9604 \frac{\sigma}{\sqrt{k}} \leq a \leq \bar{a} + 1,9604 \frac{\sigma}{\sqrt{k}}\right) = 0,95.$$

A leírtakat szemlélteti a következő ábra.



A most tárgyalt eset, tehát az, hogy a várható értéket a minta alapján becsljük, a szórás viszont ismert, általában akkor fordul elő, ha egyetlen elemű vagy kis elemszámú minta alapján kívánunk konfidencia intervallumot meghatározni. Ilyenkor az ismertnek tekintett szórás korábbi mérések elemzéséből nyert érték lehet. A $k = 1$ mintaterjedelemhez tartozó konfidencia intervallum fontos szerepet játszik a geodéziai mérések hibahatárainak a megállapításakor. Általában a hibahatárt a szórás háromszorosaként szokás megadni. Ez megfelel a $p = 0,9973$ konfidenciaszintű intervallumnak.

Példa

Giroteodolittal $k = 4$ alkalommal megmértünk egy azimutot. A négy mérés alapján a mintaközép $\bar{a} = 18^\circ 07' 05,6''$ -nek adódott. A szórást ismertnek, $\sigma = 5''$ értékűnek tételezzük

fel. Határozzuk meg a $p = 0,90$ konfidencia szinthez tartozó intervallumot. A $p = 0,90$ szinthez $\varepsilon = 0,10$ és az $1 - \varepsilon/2 = 0,95$ értékhez az inverz normális eloszlásból $\text{invnormaldis}(0.95) = 1.64521$ érték adódik u -ra. Ezt felhasználva a konfidencia intervallum határai a következők:

$$c = \bar{a} - u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = 18^\circ 07' 05,6'' - 4,1'' = 18^\circ 07' 01,5''$$

$$d = \bar{a} + u_p \frac{\sigma}{\sqrt{k}} = 18^\circ 07' 05,6'' + 4,1'' = 18^\circ 07' 09,7''$$

Vizsgáljuk ezután azt az esetet, amikor a mintaközepet és a szórást is a mintából becsüljük.

2. A szórás nem ismert (t-próba)

Tételezzük fel ismét, hogy $\xi \sim N(a, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó. A mondottak szerint a szórást is, a mintaközéphez hasonlóan, a $\bar{\sigma}$ tapasztalati szórással, k elemű minta alapján *becsüljük*. Ekkor a

$$t = \frac{a_0 - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \sqrt{k} \quad (3.20)$$

valószínűségi változó $f = k - 1$ szabadsági fokú t (Student)-eloszlást követ. A várható érték körüli szimmetrikus intervallum ennek megfelelően a következő:

$$P\left(-t_{p,f} \leq \frac{a_0 - \bar{a}}{\bar{\sigma}} \sqrt{k} \leq t_{p,f}\right) = p = 1 - \varepsilon, \quad (3.21)$$

amiből

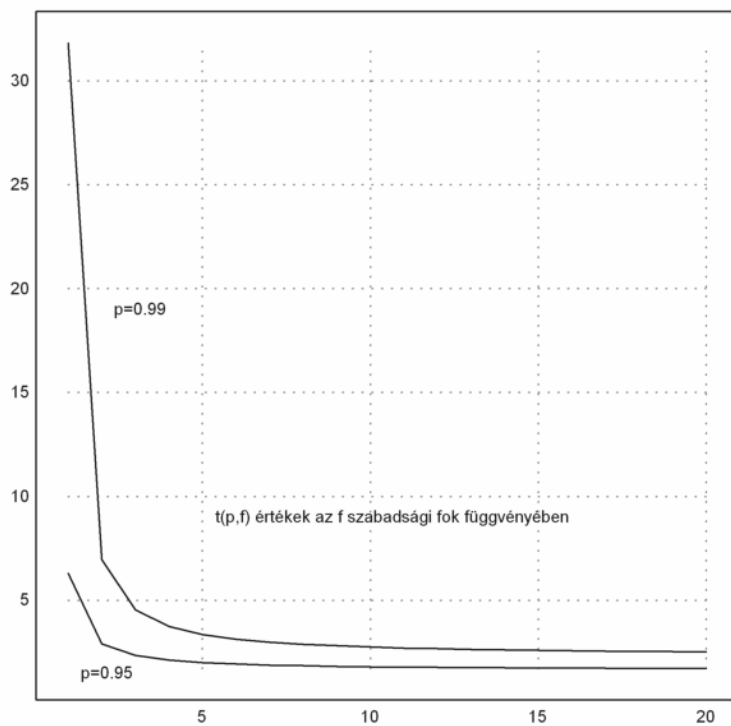
$$P\left(\bar{a} - t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{k}} \leq a \leq \bar{a} + t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{k}}\right) = p = 1 - \varepsilon, \quad (3.22)$$

azaz a konfidencia intervallum határai

$$c = \bar{a} - t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{k}}$$

$$d = \bar{a} + t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{k}}. \quad (3.23)$$

A $t_{p,f}$ értékeket egy adott konfidencia szinthez az inverz t -eloszlásból határozhatjuk meg. Az ábrán feltüntetett értékeket szemlélve látszik, hogy kis mintaterjedelem esetén a konfidencia intervallumok – különösen a magas konfidencia szinthez tartozók – rendkívül nagyok lesznek.



Különböző mintaterjedelmekhez tartozó $t_{p,f}$ értékek.

Ezért, ha k kicsi, akkor a konfidencia intervallumot célszerű ismertnek tekintett szórás segítségével meghatározni.

Példa

Vizsgáljuk az előbbi esetet, azzal a különbséggel, hogy a szórás helyett a tapasztalati szórás $\bar{\sigma} = 5''$ értékét tekintjük kiszámítottnak. A $p = 0,90$ szinthez $\varepsilon = 0,10$ és az $1 - \varepsilon/2 = 0,95$ értékhez az inverz t eloszlásból $\text{invtdis}(0.95, 2) = 2.913$ érték adódik $t_{p,f}$ -re. Ezt felhasználva a konfidencia intervallum határai a következők:

$$c = \bar{a} - t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{4}} = 18^\circ 07' 05,6'' - 7,3'' = 18^\circ 06' 58,3''$$

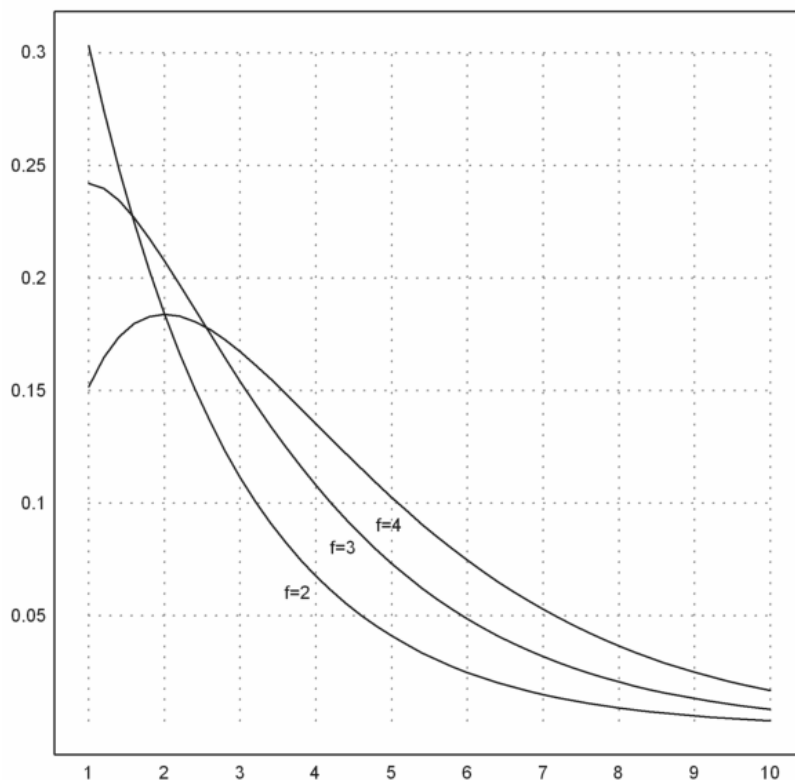
$$d = \bar{a} + t_{p,f} \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{k}} = 18^\circ 07' 05,6'' + 7,3'' = 18^\circ 07' 12,9''$$

3.2.2 Konfidencia intervallumok normális eloszlású valószínűségi változó szórására

Legyen $\xi \sim N(a, \sigma)$ normális eloszlású valószínűségi változó. Becsüljük a σ szórást a ξ -re vett k elemű minta alapján a $\bar{\sigma}$ tapasztalati szórással. A konfidencia intervallum az

$$f \frac{\bar{\sigma}^2}{\sigma^2} \quad (3.24)$$

valószínűségi változó $f = k - 1$ szabadsági fokú χ^2 -eloszlásából határozható meg. Mivel az ábrán is látható, hogy a χ^2 eloszlás nem szimmetrikus a várható értékre, ennek következtében a várható értéknél bevezetett szimmetrikus intervallumok nem alkalmazhatók.



Különböző szabadsági fokokhoz tartozó χ^2 eloszlások

A χ^2 eloszlás alapján konfidencia intervallumot általában kétféle módon állítanak elő. Az ún. *kétoldali* esetben az intervallumot úgy határozzák meg, hogy annak határai a $p_1 = \varepsilon/2$ és $p_2 = 1 - \varepsilon/2$ értékéhez tartozzanak. Ilyenkor azt a két értéket keresik, amelyek által meghatározott intervallum a varianciát $p = 1 - \varepsilon$ valószínűséggel tartalmazza. Az ún. *egyoldali* esetben a most felírt határok a $p_1 = 0$ és $p_2 = 1 - \varepsilon$ értékekhez tartoznak. Ilyenkor tehát azt az egyetlen értéket keresik, amelynél a variancia p valószínűséggel kisebb.

3.3 A Kalman (Kálmán)-szűrés

Szűrésnek azt az eljárást nevezzük, amikor egy alapfolyamatról (jel) a zaj hatását leválasztjuk. Predikcióról pedig akkor beszélhetünk, amikor nem mért pontban számítjuk ki a jelet. Ez lehet akár egy folyamat előrejelzése a következő időpontban. A Kalman-szűrés mindkét említett feladatot képes megoldani. Elsősorban a Kalman-szűrési technika dinamikus rendszerek állapotának becslésére alkalmas módszer, amelynek elvi alapja a Gauss-féle legkisebb négyzetek módszeréhez (LKN) kapcsolódik. A Kalman-szűrés számos alkalmazását dolgozták ki a navigáció, a geodézia, a járműkövetés (repülőgépek, űrhajók, járművek irányítása), a geológia, a deformációanalízis, az oceanográfia területén. A Kalman-szűrés alkalmazható hatékony rekurzív kiegyenlítésre is, mivel fontos előnye a LKN módszerével szemben az, hogy a durva hibák szűrése lényegesen hatékonyabb ezzel a módszerrel.

A Kalman-szűrést legegyszerűbb egy példán keresztül bemutatni. Ezt a járműnavigáció területéről vettük. A cél egy jármű önműködő irányítása, viszont ehhez megbízható helyzetinformációra van szükség. Ezt az információt a Kalman-szűrés fogja szolgáltatni.

3.3.1 Lineáris rendszerek

A Kalman-szűrést akkor tudjuk a zaj leválasztására felhasználni, ha a mért folyamatot egy lineáris rendszerrel lehet leírni. Számos fizikai folyamat, például az úton haladó jármű, a Föld körül keringő szatellita, vagy egy szinuszos rádiójel vivőfrekvencia lineáris rendszerrel

közelíthető. Egy lineáris rendszer egyszerűen egy olyan folyamat, amelyik az alábbi két egyenlettel írható le.

Állapotegyenlet:

$$x_{k+1} = Ax_k + Bu_k + w_k \quad (3.25)$$

Átviteli egyenlet:

$$y_k = Cx_k + z_k \quad (3.26)$$

A fenti egyenletekben A , B , C mátrixok; k az időváltozó (index); x a rendszer állapota, u a rendszer ismert bemenete, y a mért kimenete, továbbá w és z a zaj. A w változót folyamat zajnak nevezik, z -t pedig a mérési zajnak. Általános esetben ezek mind vektorok és így több mint egy elemből állnak. Az x vektor tartalmazza a rendszer jelenlegi állapotát leíró összes paramétert, viszont nem tudjuk közvetlenül mérni. Ehelyett y -t mérjük, amit a z zaj leront. Felhasználhatjuk y -t arra, hogy becslést adjunk x -re, viszont nem vehetjük biztosra a benne foglalt információt a zaj miatt.

Példaként vegyünk egy egyenes úton haladó járművet. A modellünkben a rendszer (jármű) állapotát a p helyzete és v sebessége jellemzi. Az u bemenetet az általunk vezérelt gyorsulások jelentik és az y kimenet a mért helyzetinformációval azonosítható. Mondjuk azt, hogy gyorsulásokkal vezéreljük a rendszert és a helyzetét T másodperces időközönként mérjük. Ez esetben az elemi kinematikai ismereteink szerint a v sebesség a következő egyenlettel írható le:

$$v_{k+1} = v_k + Tu_k \quad (3.27)$$

Vagyis egy időlépéssel később (T másodperc múlva) a sebesség egyenlő lesz a jelenlegi sebesség plusz a kiadott gyorsulás szorozva a T idővel. Viszont a fenti egyenlet nem szolgáltat pontos értéket v_{k+1} -re. Ezzel szemben a sebesség véletlenszerűen megváltozik még a széllekedések, kátyúk és egyéb elkerülhetetlen tényezők miatt. A sebesség zaja időfüggő véletlen változó. Ezért realiztikusabb modell a következő:

$$v_{k+1} = v_k + Tu_k + \tilde{v}_k \quad (3.28)$$

ahol $\tilde{v}_k$ a sebesség zaja. Ehhez hasonló egyenlet írható fel a p helyzetre is:

$$p_{k+1} = p_k + Tv_k + \frac{1}{2}T^2u_k + \tilde{p}_k \quad (3.29)$$

ahol $\tilde{p}_k$ a helyzet zaja (bizonytalansága). Most definiálhatjuk az x állapotvektort, ami a helyzetből és a sebességvektorból áll.

$$x_k = \begin{bmatrix} p_k \\ v_k \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

Végül mivel tudjuk, hogy a mért kimenet a jármű helyzete, az alábbi lineáris rendszeregyenleteket írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} x_k + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_k + w_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x_k + z_k \end{aligned} \quad (3.31)$$

A z_k mérési zaj például a mérőműszer (eljárás) hibájából adódik. Ha a járművet szeretnénk valamilyen visszacsatolásos vezérlőrendszerrel irányítani, szükségünk van a jármű p helyzetének és v sebességének pontos ismeretére. Másképpen fogalmazva, az x állapotvektor ismeretére van szükségünk.

3.3.2 A Kalman-szűrés elmélete és algoritmusa

Tegyük fel, hogy az előzőekben leírt dinamikus rendszerrel rendelkezünk. Szeretnénk a meglevő y méréseink alapján becslést adni a rendszer x állapotára. Hogyan tudunk a lehető legjobb becslést adni rá? Milyen kritériumnak tegyen eleget a becslésünk? Két nyilvánvaló követelményünk van ezzel kapcsolatosan.

Először is azt szeretnénk elérni, hogy a becslésünk átlaga megegyezzen a valódi állapot átlagával. Vagyis semmiképpen nem szeretnénk torzított becslést adni rá. Matematikailag megfogalmazva a becslés várható értéke egyezzen meg az állapot várható értékével.

Másodszor, olyan becslést szeretnénk, amelyik olyan kevésbé tér el a valódi rendszerállapottól amennyire az csak lehetséges. Matematikai értelemben azt mondjuk, hogy olyan becslést akarunk találni, melynek a lehető legkisebb a hiba varianciája.

Történetesen éppen a Kalman-szűrő adta becslés az, amelyik mindkét feltételt kielégíti. Viszont a Kalman-szűrővel végzett becsléshez a rendszerünket terhelő zajnak bizonyos feltételeket kell teljesítenie. Fel kell tételeznünk azt, hogy mind a w rendszer zajnak mind a z mérési zajnak az átlaga zérus. Továbbá fel kell tételeznünk, hogy w és z korrelálatlanok. Vagyis bármely k időpontban w_k és z_k független valószínűségi változók. Ezután definiáljuk a következő zaj kovariancia mátrixokat:

Folyamat zaj kovariancia:

$$S_w = E(w_k w_k^T) \quad (3.32)$$

Mérési zaj kovariancia:

$$S_z = E(z_k z_k^T) \quad (3.33)$$

ahol w_k és z_k a véletlen zaj vektorok transzponáltjai és $E(\cdot)$ jelöli a várható értéket.

Most már végre abban a helyzetben vagyunk, hogy felírhatjuk a Kalman-szűrő egyenleteit. Ezeket sokféle, egymással ekvivalens alakban kifejezhetjük. Az egyik ilyen felírás a következő:

$$\begin{aligned} K_k &= A P_k C^T (C P_k C^T + S_z)^{-1} \\ \hat{x}_{k+1} &= (A \hat{x}_k + B u_k) + K_k (y_{k+1} - C \hat{x}_k) \\ P_{k+1} &= A P_k A^T + S_w - A P_k C^T S_z^{-1} C P_k A^T \end{aligned} \quad (3.34)$$

Ez tehát a Kalman-szűrő. Három egyenletből áll és mindegyik mátrixműveleteket foglal magában. A K mátrixot a Kalman-féle *nyereségmátrix*nak nevezik, a P mátrixot pedig a becslési hiba kovariancia mátrixnak.

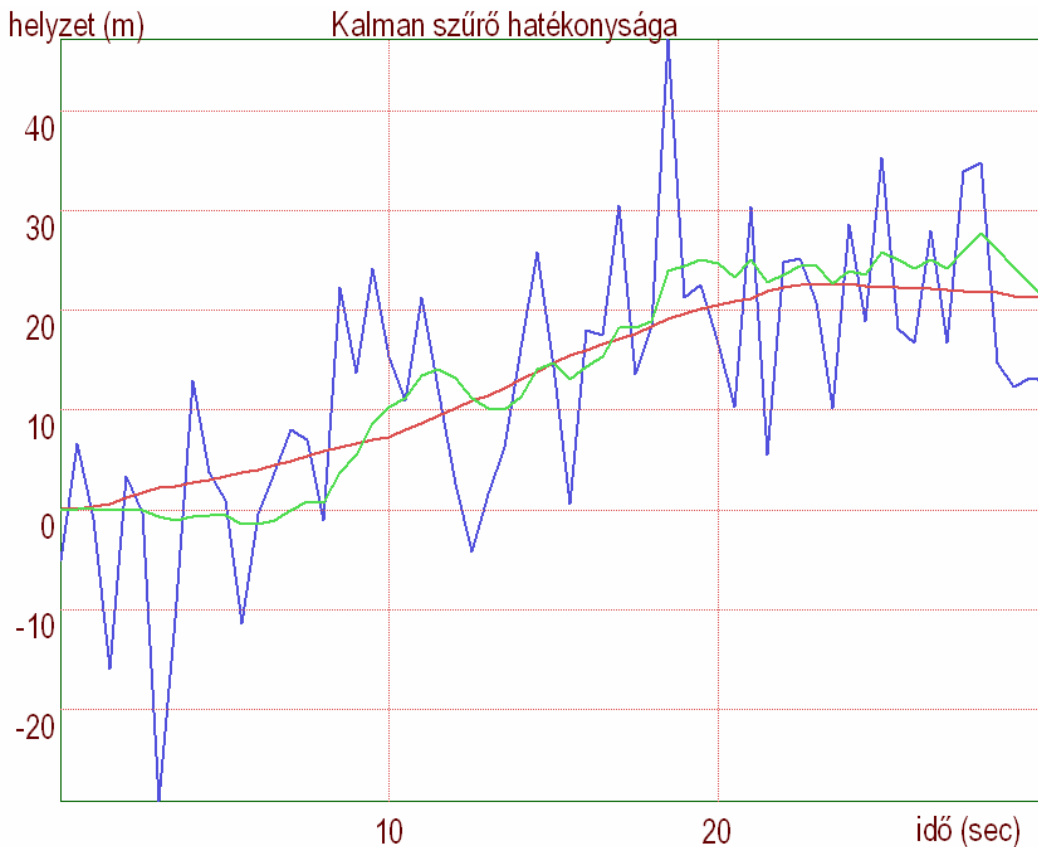
Az $\hat{x}$ állapot becslési egyenlet elég könnyen érthető. A $k+1$ -edik időpontra vonatkozó állapotbecslés első tagja éppen A -szorosa a k -edik állapotra vonatkozó becslésnek plusz B -szerese az ismert k időpontbeli inputnak. Ez lenne az állapotbecslés ha nem volnának mérések. Más szavakkal az állapotbecslés az időben a rendszermodellnek megfelelően terjedne tovább. Az $\hat{x}$ -re vonatkozó egyenlet második tagja az állapot *korrekció*, és azt jelzi, hogy mennyivel kell megváltoztatni a becslést a mérés miatt.

Megfigyelve a K -ra vonatkozó egyenletet látszik az, hogy ha nagy a mérési zaj, S_z is nagy lesz, tehát K kicsi, és így nem adunk nagy hitelt az y méréseinknek a következő $\hat{x}$ állapot

becslésénél. Viszont ha kicsi a mérési zaj, S_z is kicsi lesz, tehát K nagy, és így több hitelt adunk a méréseinknek a következő $\hat{x}$ állapot becslésénél.

Példa a járműnavigáció területéről

Az előző egyenletekkel leírt rendszert szimuláljuk véletlenszerű gyorsulásokkal, melyek szórása $0,5 \text{ m/s}^2$. A helyzetet 10 m-es középhibával (szórással) határoztuk meg (egy szigma). A következő ábra megmutatja azt, hogy mennyire hatékonyan tudott a Kalman-szűrő helyzetinformációt becsülni a nagy mérési zaj ellenére. Az ábrán piros vonal jelzi a valódi helyzetet, zöld a szűrő által becsült helyzetet, míg kék jelzi a mért helyzetet.



Példa Kalman-szűrésre a járműnavigáció területéről

A fenti példát az alábbi Euler függvénnel állítottuk elő:

```
function kalman(alpha, duration, dt)
## function kalman(alpha, duration, dt) - Kalman filter simulation
## alpha = forgetting factor (alpha >= 1)
## duration = length of simulation (seconds)
## dt = step size (seconds)

measnoise = 10; ## position measurement noise (meter)
accelnoise = 0.5; ## acceleration noise (meter/sec^2)

a = [1 dt; 0 1]; ## transition matrix
c = [1 0]; ## measurement matrix
x = [0; 0]; ## initial state vector
xhat = x; ## initial state estimate

Q = accelnoise^2 * [dt^4/4 dt^3/2; dt^3/2 dt^2]; ## process noise covariance
P = Q; ## initial estimation covariance
R = measnoise^2; ## measurement error covariance

## set up the size of the innovations vector
Inn = zeros(size(R));
```

```

pos = []; ## true position array
poshat = []; ## estimated position array
posmeas = []; ## measured position array

Counter = 0;
for t = 0 to duration step dt;
    Counter = Counter + 1;
    ## Simulate the process
    ProcessNoise = accelnoise * [(dt^2/2)*normal(1,1); dt*normal(1,1)];
    x = a . x + ProcessNoise;
    ## Simulate the measurement
    MeasNoise = measnoise * normal(1,1);
    z = c . x + MeasNoise;
    ## Innovation
    Inn = z - c . xhat;
    ## Covariance of Innovation
    s = c . P . c' + R;
    ## Gain matrix
    K = a . P . c' . inv(s);
    ## State estimate
    xhat = a . xhat + K . Inn;
    ## Covariance of prediction error
    P = a . P . a' + Q - a . P . c' . inv(s) . c . P . a';
    ## Save some parameters in vectors for plotting later
    pos = pos_x(1);
    posmeas = posmeas_z;
    poshat = poshat_xhat(1);
end;

## Plot the results
t = 0 : dt : duration;

hold off;
color(12); plot(t,posmeas');
hold on;
color(10); xplot(t,pos');
color(11); plot(t,poshat');
color(1); hold off;

w=window();
text("idő (sec)", w[3]-120,w[4]);
text("helyzet (m)",w[2],-12);
text("Kalman szűrő hatékonysága",w[2]+300,-12);

return 0;

endfunction

```

3.3.3 Kalman-szűrés alkalmazása GPS mérések feldolgozására

A GPS mérések esetében a helymeghatározás egy egyenletrendszer megoldását jelenti. Az egyes egyenletek a GPS műholdak ismert koordinátái, a mért műhold-vevő távolságok és a vevő ismeretlen koordinátái között teremtenek kapcsolatot. Az ismeretlenek (a vevő három térbeli koordinátája és a vevő órájának igazíthatatlansága) egyértelmű meghatározásához legalább négy műholdra végzett egyidejű távolságmérésre van szükség. Általában több mint négy műhold egyidejű mérése lehetséges, így az elkerülhetetlen mérési hibák miatt a helymeghatározás egyenletrendszere ellentmondásokhoz vezet. Az ellentmondások megszüntetésének hagyományos módszere a legkisebb négyzetek (LN) módszerén alapuló

kiegyenlítés. A helymeghatározás egyenletrendszere nem hagyományos módon, rekurzív kiegyenlítéssel is megoldható, amely tulajdonképpen a Kalman-szűrés összefüggésein alapul. Ezt a megoldást mutatjuk be most részleteiben mint a Kalman-szűrés egy lehetséges alkalmazását a GPS-mérések feldolgozása területén. Látni fogjuk, hogy a Kalman-szűrés számos előnyös tulajdonsággal rendelkezik és alkalmas mind statikus mind kinematikus mérések feldolgozására.

Induljunk ki a kódtávolságokon alapuló helymeghatározás egyenletrendszeréről (Husti et al. 2000):

$$PR_i = \sqrt{(X^i - x)^2 + (Y^i - y)^2 + (Z^i - z)^2} + Cr \quad i = 1..n \quad (3.35)$$

ahol

X^i, Y^i, Z^i	az i -edik műhold ismert térbeli derékszögű koordinátái
PR_i	az i -edik műholdra végzett távolságmérés eredménye
x, y, z	a vevő ismeretlen térbeli derékszögű koordinátái
Cr	a vevő órahibájának hatása (az időeltérés és a hullám terjedési sebesség szorzata)
n	az észlelt műholdak száma

A (3.35) egyenletrendszer bal oldalán álló pszeudotávolságokat korrigálni kell a légkör jelkésleltető hatásával illetve a műholdak órájának igazíthatatlanságával, a jobb oldalon levő műholdkoordinátákat pedig a Föld forgásának hatásával. A GPS műholdak órájának δt^s korrekciója a t_{0c} időpontra érvényes három paraméterrel számítható:

$$\delta t^s(t) = a_0 + a_1(t - t_{0c}) + a_2(t - t_{0c})^2. \quad (3.36)$$

A Föld forgásának hatását pedig a műholdkoordinátákra a jel τ terjedési idejét és a Föld forgásának ω szögsebességét számításba véve a következőképpen írhatjuk fel:

$$\begin{bmatrix} X_r^i \\ Y_r^i \\ Z_r^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega\tau) & \sin(\omega\tau) & 0 \\ -\sin(\omega\tau) & \cos(\omega\tau) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \end{bmatrix}. \quad (3.37)$$

A (3.35) egyenletrendszer közvetlen megoldását $n \geq 4$ esetén az egyenletek linearizálása nélkül például *Bancroft* módszere szolgáltatja. Az egyenletek alkalmas átrendezésével és a $\mathbf{g}$, $\mathbf{h}$ négyesvektorok $\langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \sum_{i=1}^3 g_i h_i - g_4 h_4$ ún. Lorentz-metrikáját bevezetve (itt a koordinátákból és a PR pszeudotávolságból alkotott négyesvektorok szerepelnek) egyismeretlenes másodfokú egyenletet kapunk. Bancroft eljárása nem igényel előzetes koordinátákat és így kiválóan alkalmas a vevő előzetes koordinátáinak kiszámítására, amely a Kálmán-szűrési eljárás bemeneteként szolgálhat. Megemlítjük még, hogy Bancroft eljárása számára bemenetként éppen az észlelt műholdak javított műholdkoordinátáiból és korrigált pszeudotávolságokból mint négyes sorvektorokból álló $\mathbf{B}$ mátrix szükséges. Az algoritmus lépései:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} X^1 & Y^1 & Z^1 & PR^1 \\ X^2 & Y^2 & Z^2 & PR^2 \\ \vdots & & & \vdots \\ X^n & Y^n & Z^n & PR^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{e} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]$$

$$\alpha^i = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \\ PR^i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X^i \\ Y^i \\ Z^i \\ PR^i \end{bmatrix} \right\rangle \quad \Lambda = \frac{1}{2} \left\langle \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Cr \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Cr \end{bmatrix} \right\rangle$$

$$n = 4 \quad \langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} \rangle \Lambda^2 + 2(\langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a} \rangle - 1) \Lambda + \langle \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}, \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a} \rangle = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Cr \end{bmatrix}^{1,2} = \Lambda^{1,2} \cdot \mathbf{B}^{-1} \mathbf{e} + \mathbf{B}^{-1} \mathbf{a}$$

$$n > 4 \quad \langle \mathbf{B}^+ \mathbf{e}, \mathbf{B}^+ \mathbf{e} \rangle \Lambda^2 + 2(\langle \mathbf{B}^+ \mathbf{e}, \mathbf{B}^+ \mathbf{a} \rangle - 1) \Lambda + \langle \mathbf{B}^+ \mathbf{a}, \mathbf{B}^+ \mathbf{a} \rangle = 0$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ Cr \end{bmatrix}^{1,2} = \Lambda^{1,2} \cdot \mathbf{B}^+ \mathbf{e} + \mathbf{B}^+ \mathbf{a}$$

$$\text{ahol } \mathbf{B}^+ = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T.$$

A Kalman-szűrés a (3.35) egyenletrendszer linearizált változatának megoldására alkalmas rekurzív kiegyenlítési eljárás. Ezért először felírjuk a helymeghatározás linearizált egyenleteit a (3.35) jobb oldalának Taylor-sorba fejtésével és a magasabb fokszámú tagok elhanyagolásával. A linearizált egyenlet:

$$PR_i = \rho_0^i - \frac{X^i - x_0}{\rho_0^i} \Delta X - \frac{Y^i - y_0}{\rho_0^i} \Delta Y - \frac{Z^i - z_0}{\rho_0^i} \Delta Z + Cr \quad i = 1..n \quad (3.38)$$

ahol

$$\begin{array}{ll} x_0, y_0, z_0 & \text{a vevő előzetes térbeli derékszögű koordinátái} \\ \Delta X, \Delta Y, \Delta Z & \text{az előzetes koordináták javítása} \\ \rho_0^i = \sqrt{(X^i - x_0)^2 + (Y^i - y_0)^2 + (Z^i - z_0)^2} & \text{a geometriai távolság közelítő értéke,} \\ & \text{amely a vevő közelítő koordinátáinak ismeretében számítható.} \end{array}$$

Az így levezetett lineáris közvetítő egyenletrendszer mátrixos alakban a következő:

$$\mathbf{l} = \mathbf{A} \mathbf{x}$$

részletesebben:

$$\begin{bmatrix} PR_1 - \rho_0^1 \\ PR_2 - \rho_0^2 \\ \vdots \\ PR_n - \rho_0^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{X^1 - x_0}{\rho_0^1} & -\frac{Y^1 - y_0}{\rho_0^1} & -\frac{Z^1 - z_0}{\rho_0^1} & +1 \\ -\frac{X^2 - x_0}{\rho_0^2} & -\frac{Y^2 - y_0}{\rho_0^2} & -\frac{Z^2 - z_0}{\rho_0^2} & +1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\frac{X^n - x_0}{\rho_0^n} & -\frac{Y^n - y_0}{\rho_0^n} & -\frac{Z^n - z_0}{\rho_0^n} & +1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \\ Cr \end{bmatrix}. \quad (3.39)$$

A fenti egyenletrendszer megoldása rekurzív kiegyenlítéssel is történhet a Kalman-szűrés összefüggéseinek az alkalmazásával. Jelöljük az **A** alakmátrix *i*-edik sorát a **hⁱ** vektorral, a négy ismeretlen tartalmazó állapotvektort pedig az **x** vektorral. A (3.39)-es egyenletrendszer megoldásához a Kalman-szűrés összefüggései szerint a következő iterációs lépésekre van szükség:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_i &= \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{h}^i \cdot (\mathbf{h}^{i,T} \cdot \mathbf{P}_i \cdot \mathbf{h}^i + \mathbf{R})^{-1} \\ \mathbf{x}_{i+1} &= \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_i \cdot (l_i - \mathbf{h}^{i,T} \cdot \mathbf{x}_i) \\ \mathbf{P}_{i+1} &= \mathbf{P}_i - \mathbf{K}_i \cdot \mathbf{h}^{i,T} \cdot \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (3.40)$$

Az iteráció utolsó lépése után a **P** mátrix a normálmátrix inverzévé válik. A Kalman-szűrés előnye az, hogy az egyes időpontokhoz tartozó helyzet-adatok simíthatók. Ez egyszerűen úgy valósítható meg, hogy az **x** ismeretlenek és a **P** kovarianciamátrixuk az előző epochában meghatározott mátrix és egy predikciós tapasztalati tényező összegeként lesz felvéve. Ez a tapasztalati tényező tulajdonképpen a futó átlagolás hosszával analóg mennyiség. A módszer továbbá tartalmazza azt is, hogy ha valamelyik időpontban négynél kevesebb műholdat észlelünk (például kinematikus mérés esetén), akkor a módszer ehhez az időponthoz is szolgáltat helyzet-adatot (Takács, 2001).

A Kalman-szűrés tehát a kódtávolságok feldolgozásával nemcsak a vevő folyamatos helyzetét adja meg, hanem az egyes epochákhoz tartozó vevő órákorrekció értékét is.

Normálmátrix inverzével illetve Kalman-szűréssel történő megoldások összevetése

Egy egyszerű példán demonstráljuk a kódtávolságokkal történő helymeghatározás kétféle eljárását és vetjük össze a kapott eredményeket. A számpéldában egy epochában észlelt 6 GPS műholdra a következő adataink vannak.

Műholdkoordináták és mért kódtávolságok (m):

X	Y	Z
14177509.188	-18814750.65	12243944.449
15097198.146	-4636098.555	21326705.426
23460341.997	-9433577.991	8174873.599
-8206498.071	-18217989.839	17605227.065
1399135.83	-17563786.82	19705534.862
6995655.459	-23537808.269	-9927906.485
PR		
21119263.116		
22527063.486		
23674159.579		
20951643.862		
20155386.649		
24222112.972		

Előzetes koordinátákat és vevő órahibát számítunk az első négy műhold kódtávolságaiból Bancroft eljárásával:

x ₀	y ₀	z ₀	Cr
596902.7678	-4847836.3767	4088214.5698	8.7692

Ezután felállítjuk a linearizált egyenletrendszert a közelítő koordinátákkal (3.39) szerint.

Az **A** alakmátrix:

-0.6430434144817	0.6613351396979	-0.386174830993	1
-0.6436830972644	-0.0093992607280	-0.765234424339	1
-0.9657543376721	0.1937022602350	-0.172620953674	1
0.4201775172811	0.6381440525425	-0.645153487300	1
-0.0398024121859	0.6308958390619	-0.774845925483	1
-0.2641698855464	0.7716078388939	0.578649820295	1

Az **l** tisztatagvektor:

-5.216937914491
-8.360058475286
-17.52516719699
21.09123019129
-1.381752319634
0.4555279240012

A normálegyenletrendszer megoldása a **dx** ismeretlenek vektora:

25.44498451404
-1.64096977165
1.68243450462
8.63329334780

A végleges vevő koordináták és a vevő órahiba (m):

596928.2128
-4847838.0176
4088216.2523
17.4024

A *Kalman-szűrésen* alapuló megoldáshoz felvesszük egységnek az **R** mátrixot (ez most egyetlen elem), a **P** mátrixot a főátlóban 10^6 értékű számokkal töltjük fel és a **dx** változások vektorát kiindulásként zérussal tesszük egyenlővé.

A fentieket és a Kalman-szűrést a következő rövid Euler-program illusztrálja:

```
% Számítás Kalman-szűréssel
>function kupdate(x,P,A,l,R)
$ omc=l-A.x;
$ AP=A.P;
$ invar=AP.A'+R;
$ K=AP'/invar;
$ x=x+K.omc;
$ P=P-K.AP;
$ return {x,P};
$endfunction

% pszeudotávolság varianciája (R)
>prvar=1;
>P=1.0e6*id(4);
>deltx=zeros(4,1);

% a számítás lépései
>h=A[1,:];
>{deltx,P}=kupdate(deltx,P,h,l[1],prvar);
.
.
.
>h=A[6,:];
>{deltx,P}=kupdate(deltx,P,h,l[6],prvar);
```

A számítás során az állapotvektor a következőképpen változik:

$\mathbf{dx}_1$	$\mathbf{dx}_2$	$\mathbf{dx}_3$	$\mathbf{dx}_4$	$\mathbf{dx}_5$	$\mathbf{dx}_6$
1.6773	2.3621	16.6320	23.6356	29.2038	25.444915
-1.7250	2.3566	10.2962	7.6202	-4.2326	-1.640867
1.0073	4.1179	-9.9551	-5.2317	11.1631	1.682394
-2.6084	-3.6663	-5.1754	2.9219	16.5725	8.633203

Látható, hogy az utolsó lépésben a Kalman-szűrés ugyanazt a $\mathbf{dx}$ megoldást szolgáltatta mint a LKN módszere. A $\mathbf{P}$ mátrix pedig a normálmátrix inverzévé vált:

$\mathbf{P} - (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$:

-1.33059e-005	2.52224e-005	-9.54152e-006	-2.06549e-005
2.52224e-005	-5.00663e-005	1.8600e-005	4.04269e-005
-9.54146e-006	1.86001e-005	-7.4851e-006	-1.53055e-005
-2.06549e-005	4.0427e-005	-1.53056e-005	-3.28803e-005

A Kalman-szűrés ebben az esetben tehát *rekurzív kiegyenlítésként* is felfogható és teljesen azonos megoldást szolgáltat a LKN módszerével. Viszont ahogy láttuk, a Kalman-szűrésen alapuló megoldás előnye az, hogy nem kell invertálni a normálmátrixot.

A következőkben a Kalman-szűrést több epochában végzett GPS kódtávolság mérések feldolgozására fogjuk használni.

Kidolgozott számpélda a kódtávolságokkal történő Kalman-szűrésre több epochában

Nézzük, hogyan alkalmazhatjuk a fenti algoritmust statikus GPS-mérések feldolgozására és a vevő órakorrekció értékének becslésére. A feldolgozáshoz a *Kai Borre* által írt MATLAB programcsomagot használtuk fel. A feldolgozáshoz szükséges főbb MATLAB állományok rövid leírásukkal együtt a következők:

kalclock.m	Vevő órahiba és helyzet becslése RINEX o és n-fájlból (fő eljárás)
rinexe.m	RINEX navigációs (n) állomány olvasása
anheader.m	RINEX o-állomány fejlécének elemzése (mérési típusok és ant. magasság)
get_eph.m	Fedélzeti pályaadatok kinyerése
fobs_typ.m	Adott típusú mérési adatok kinyerése
grabdata.m	Az adott epochára és műholdra vonatkozó mérések kinyerése
b_point.m	A vevő előzetes koordinátáinak számítása a Bancroft algoritmussal
bancroft.m	A vevő helyzetének számítása Bancroft algoritmusával
fepoch_0.m	A következő epocha méréseinek kivétele egy RINEX állományból
find_eph.m	Az adott műholdra vonatkozó fedélzeti pályaadatok kinyerése
check_t.m	A GPS-idő ellenőrzése
satpos.m	Szatellita helyzetének számítása fedélzeti pályaadatokból
e_r_corr.m	Szatellita helyzetének földforgás korrekciója
togeod.m	Ellipszoidi földrajzi koordináták számítása térbeli der. koord.-ból
topocent.m	Egy vektor transzformálása topocentrikus rendszerbe
tropo.m	A troposzféra jelkésltetésének számítása
normals.m	A normálegyenletek újabb műholdhoz tartozó adatainak előállítás
k_update.m	A Kalman-szűrés i-edik lépése

A feldolgozandó statikus adatok kiválasztott 80 epocha 15 másodperces időközönkénti kódtávolság mérései. Ezek és a navigációs adatok a pta.96o és pta.96n RINEX állományokban vannak. Az egy másodperces kinematikus mérés adatait pedig a 88.obs és 88.nav RINEX fájlok tartalmazzák. A kinematikus mérés RINEX állományának egy részlete:

```

2 OBSERVATION DATA GPS RINEX VERSION / TYPE
TerraSat GeoGenius GPS+GLONASS Decoder 20-May-98 09:41:46 PGM / RUN BY / DATE
8874_____ 88741340 MARKER NAME
OBSERVER / AGENCY
8874 TRIMBLE 722 306 REC # / TYPE / VERS
00000000 EXT_UNKNOWN ANT # / TYPE
4178843.769 854026.187 4727065.313 APPROX POSITION XYZ
0.0000 0.0000 0.0000 ANTENNA: DELTA H/E/N
1 1 0 WAVELENGTH FACT L1/2
5 C1 P2 L1 L2 D1 # / TYPES OF OBSERV
1 INTERVAL
1998 5 14 11 15 0.000000 GPS TIME OF FIRST OBS
9 # OF SATELLITES
END OF HEADER

98 5 14 11 15 0.0000000 0 7 03 06 10 17 22 23 25
23011038.648 23011043.582 -2520095.87209 -1914184.28209 -2346.406
22656486.766 22656490.926 2846831.78809 2218308.78509 3111.547
25208044.570 25208052.648 2792763.41809 2092367.57209 3176.844
20516141.266 20516144.699 397408.55809 310868.69809 840.875
20672087.805 20672091.133 -472788.02909 -359572.74609 -65.578
23742052.258 23742058.809 -2707431.84709 -2071248.37809 -2522.453
24089939.922 24089947.273 3598636.03909 2712164.63209 3846.781
98 5 14 11 15 1.0000000 0 7 03 06 10 17 22 23 25
23010592.219 23010597.047 -2522442.03709 -1916012.46109 -2346.078
22657078.656 22657082.781 2849943.61009 2220733.58209 3111.953
25208649.234 25208657.277 2795940.67109 2094843.36209 3177.453
20516301.500 20516304.898 398249.89809 311524.28709 841.672
20672075.508 20672078.883 -472853.14409 -359623.48509 -64.797
23741572.055 23741578.949 -2709954.05209 -2073213.72409 -2522.094
24090671.664 24090678.664 3602483.07409 2715162.31209 3847.078

```

...

Érdeemes megnézni a `kalclock.m` eljárás vázlatát, amely a Kalman-szűrési algoritmust megvalósítja.

```

function offset = kalclock(ofile, navfile, extended_filter)
% KALCLOCK Estimates receiver clock offset and position as
% read from the RINEX o-file. A RINEX navigation
% nav-file is also needed.
% Extended filter is used, if extended_filter = 1

%Typical call: kalclock('pta.96o', 'pta.96n', 1)

%Kai Borre 03-29-97
%Copyright (c) by Kai Borre
%$Revision: 1.0 $ $Date: 1997/09/22 $

...
Itt a navigációs és kódmerési adatok beolvasása történik meg
...
Ezután előzetes állomás koordinátát határozunk meg Bancroft eljárásával:

pos = b_point(pr,sv,tr_RAW,navfile);
fprintf(['\nPreliminary position:\n X = %10.2f Y = %10.2f', ...
        ' Z = %10.2f T = %10.2f\n\n'], pos(1),pos(2),pos(3),pos(4))

Epochankénti feldolgozás következik:

for iepoch = 1:max_epochs % loop over epochs

    itt beolvassuk az adott epochához tartozó méréseket a RINEX állományból
    ...

    felállítjuk műholdanként a linearizált mérési egyenleteket:
    for jsat = 1:NoSv

        műhold óra korrekció számítása:
        sat_clk_corr = a0 + (a1 + a2*dt)*dt;
        tx_GPS = tx_RAW - sat_clk_corr;

        műhold geocentrikus helyvektorának számítása:
        X = satpos(tx_GPS, Eph(:,k));

        földforgás korrekció iteratív számítása:

```

```

traveltime = 70.e-3;          % First guess: 70 ms
for iter = 1:2
    Rot_X = e_r_corr(traveltime, X);
    rho = norm(Rot_X - pos(1:3,1));
    traveltime = rho/v_light;
end; % iter-loop

```

troposzférikus jelkésleltetés:

```

corrected_pseudorange = pr(jsat) - ...
    tropo(sin(el),h/1000,1013.0,293.0,50.0,0.0,0.0,0.0);

```

linearizált mérési egyenletek felállítása az adott GPS holdra:

```

dx = Rot_X(1) - pos(1,1);
dy = Rot_X(2) - pos(2,1);
dz = Rot_X(3) - pos(3,1);
distance = norm([dx dy dz]); % sqrt(dx^2+dy^2+dz^2);
calculated_pseudorange = distance - v_light*sat_clk_corr;
Y = corrected_pseudorange - calculated_pseudorange;
H(1,1) = -dx/distance;
H(2,1) = -dy/distance;
H(3,1) = -dz/distance;
H(4,1) = v_light;

```

Kalman-szűrés következő lépése (update):

```

[x,P] = k_update(x,P,H',Y,pseudorange_variance);

```

```

end; % jsat-loop

```

javított állomáskoordináták az update után:

```

pos(1:3,1) = pos(1:3,1)+x(1:3,1);

```

vevő órajavítás az adott epochára:

```

rec_clk_offset(1,iepoch) = x(4,1);

```

```

end % iepoch-loop

```

GPS vevő pozíciója:

```

fprintf('\n Solution: %6.2f %6.2f %6.2f %6.2f\n',...
    x(1), x(2), x(3), x(4)*1.e9)
pos(1:3,1) = pos(1:3,1)+x(1:3,1)

```

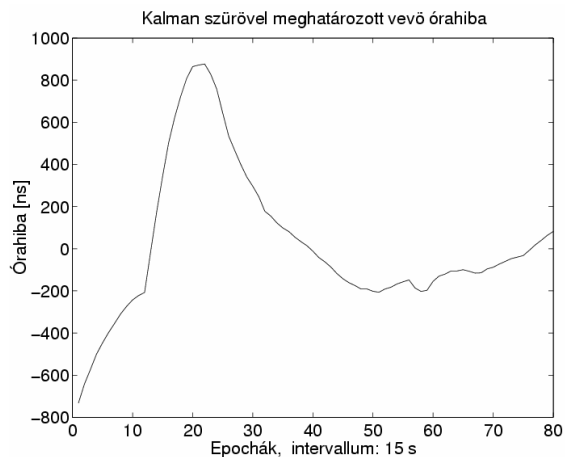
vevő órahibája (nanoszekundum):

```

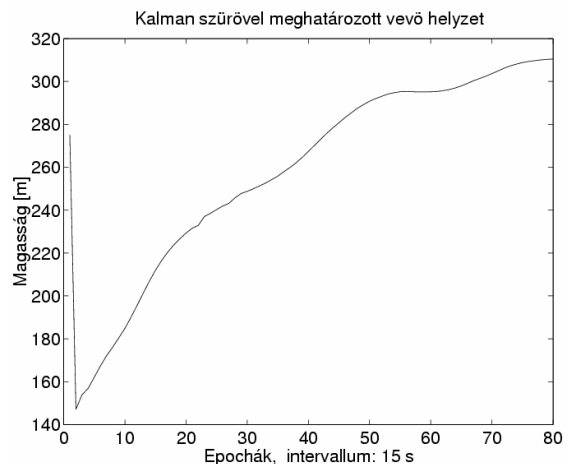
offset = rec_clk_offset*1.e9;

```

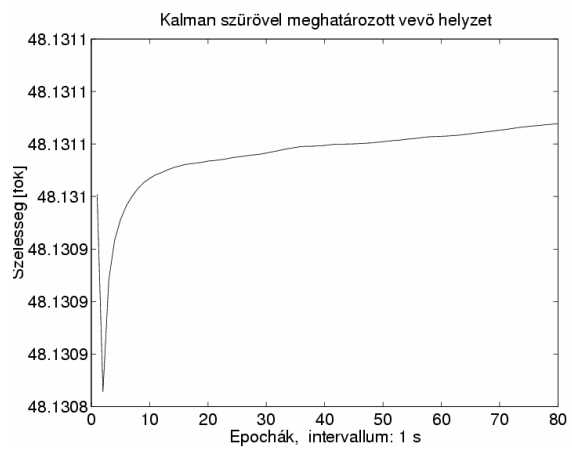
Végül nézzük meg az eredményeket bemutató néhány ábrát.



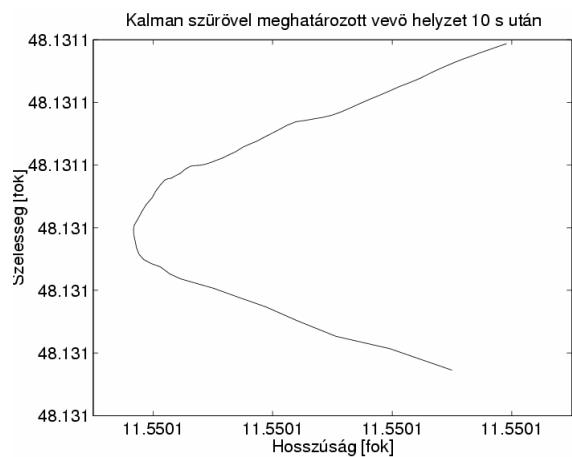
Statikus mérés vevő órahibái



Statikus méréssel meghatározott vevő koordináták (magassági komponens)



Kinematikus mérés, szélességi komponens



Kinematikus mérés, vízszintes helyzet a
10. epocha után

Az ábrákról jól látszik, hogy néhány epochányi inicializáció után a Kalman-szűrő „magára talál”, és korrekt helyzet-, és órajavítás információt szolgáltat. Különösen kinematikus mérésnél tesz a Kalman-szűrő jó szolgálatot, hiszen az ilyen mérésnél gyakran előfordulhat az, hogy csak négynél kevesebb műholdat lát a vevő, viszont a helymeghatározást a Kalman-szűrő segítségével ekkor is el tudjuk végezni.

3.4 Robusztus becslési eljárások

A statisztikai becslések felhasználási területein előforduló megfigyelésekről megállapítható, hogy egyes kivételes esetektől eltekintve, hibaeloszlásuk nem követi a normális eloszlást, bár ezt a nagy számok törvénye alapján általában feltételezik. A valamely paraméteres modell alapján létrehozott optimális becslések általában nagyon érzékenyek a modelltől való eltérésre. Sajnos ezek a modellek szinte sohasem igazak; a használatuk során felmerült problémák vezettek arra, hogy a 60-as évektől fellendült az ilyen eltérésekkel szemben kevésbé érzékeny (robosztus) becslések kutatása.

A modelltől való eltérések okai 4 fő csoportba sorolhatók:

1. durva hibák előfordulása: egy értéket nem pontosan másoltak le, rosszul olvasták le a mérőeszköztől, vagy valami mást mértek (pl. hibás irányzás)
2. a mérések eleve korlátozott pontosságúak, kerekítések előfordulhatnak
3. gyakran előfordul, hogy a valódi eloszlás különbözik a paraméteres modellben levőtől. Sokszor maga a modell is csak közelítőleg érvényes, vagy a paramétere időben változó mennyiség
4. hosszú és látszólag független adatsorozatok is mutathatnak jelentős korrelációt.

Az irodalomban találhatunk példákat a fenti okokra: Hampel szerint 5-10%-os durva hiba inkább szabálynak látszik, nem kivételnek.

A modelltől való eltérések nem hagyhatók figyelmen kívül a gyakorlatban, mert még enyhe és észrevehetetlen eltérések is teljesen elronthatják az 'optimális' becslés viselkedését. A robusztus becsléseket akkor használjuk, ha a kiugró (outlier) értékeket elhagyni, vagy súlyukat csökkenteni szeretnénk, tehát olyan módszert alkalmazunk, amely jól működik a modellben kiugró értékek és más eltérések esetén is.

A robusztus becslések fő megközelítési módja az, hogy létrehozunk egy modellt a paraméteres modelltől való eltérések kezelésére, és olyan becsléseket keresünk, melyek jól megfelelnek ennek a modellnek, és közelítőleg optimálisak.

A robusztus becslések alapvető jellemzője az, hogy kevésbé érzékenyek a feltételezett paraméteres modelltől eltérő eloszlású adatsorokból történő paraméterbecslésre. Az érzékenység pedig annak a mértéke, hogy egy lokális zavaró hatás mennyire befolyásolja a becslés értékét.

3.4.1 A robusztus M-becslők jellemzése

Az M-becslők (Maximum Likelihood) osztályába tartozó becslési módszerek az x paramétervektort az $L(\mathbf{y}, x)$ *likelihood függvény* maximumából határozzák meg, ahol

$$L(\mathbf{y}, x) = \prod_{i=1}^n f(y_i, x) \quad i=1, \dots, n, \quad (3.41)$$

ha az $y_1, \dots, y_n$ minta feltételezhetően $f(\mathbf{y}, x)$ sűrűségfüggvényű eloszlásból származik. A megoldás szokásos módszere az, hogy a (3.41) likelihood függvény helyett annak negatív logaritmusrát, a ρ *célfüggvényt* minimalizáljuk (mivel $\ln$ szigorúan monoton növekvő):

$$-\ln L(\mathbf{y}, x) = -\sum_{i=1}^n \ln f(y_i, x) = \sum_{i=1}^n \rho(y_i, x). \quad (3.42)$$

A vizsgált függvény szélsőértékét deriváltjának zérushelyeként is megkaphatjuk:

$$\frac{d}{dx} \left[\sum_{i=1}^n \rho(y_i, x) \right] = 0, \quad (3.43)$$

vagyis a minimumképzés egyenlet(rendszer) megoldására vezethető vissza. Nevezzük a $\Psi(y) = \rho'(y)$ függvényt a becslés *hatásfüggvényének*, és definiáljuk az $\omega(y)$ *súlyfüggvényt* a következőképpen:

$$\omega(y) = \frac{\Psi(y)}{y}, \quad y \neq 0. \quad (3.44)$$

Az ismertebb eloszlástípusokra a várható érték M-becslése a következőképpen alakul:

a) normális eloszlás

$$f(y) = e^{-\frac{y^2}{2}} \quad \rho(y) = \frac{y^2}{2} \quad \Psi(y) = y \quad \omega(y) = 1$$

az M-becslés az átlaggal egyezik meg.

b) szimmetrikusan exponenciális eloszlás (Laplace)

$$f(y) = e^{-|y|} \quad \rho(y) = |y| \quad \Psi(y) = \text{signy} \quad \omega(y) = \frac{1}{|y|}$$

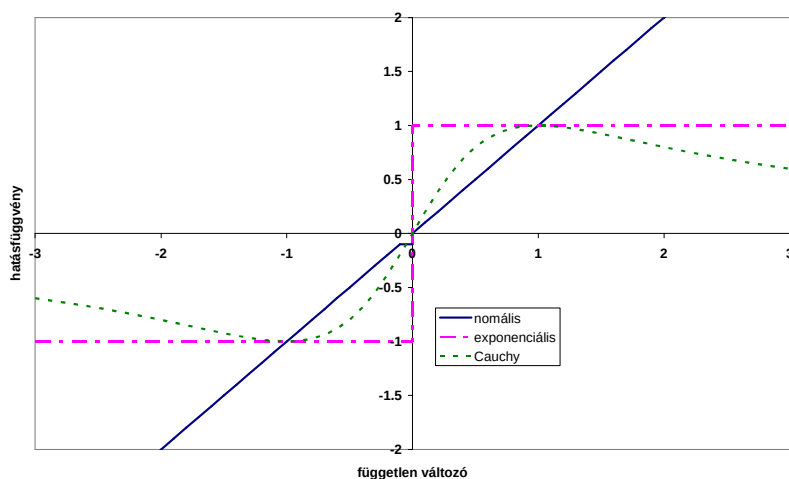
az M-becslés a mediánnal egyezik meg.

c) Cauchy eloszlás

$$f(y) = \frac{1}{1+y^2} \quad \rho(y) = \ln(1+y^2) \quad \Psi(y) = \frac{2y}{1+y^2} \quad \omega(y) = \frac{2}{1+y^2}$$

az M-becslés csak iterációval határozható meg.

Az a)-c) hatásfüggvényeket szemlélteti a következő ábra.



Látható, hogy a normális eloszlás hatásfüggvénye nem korlátos, ezért nem is robusztus, de a b)-c) becslők már robusztusak. A tapasztalatok szerint a geodéziai mérési eredmények hibaeloszlása középen normális, de a széleken bizonytalan. Ezen segítendő, Huber az alábbi hatásfüggvényt javasolta (például az $a = 1,5\sigma$ paraméter értéket felvéve):

$$\Psi(y) = \begin{cases} y, & \text{ha } |y| \leq a \\ a \text{ sign } y & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |y| \leq a \\ \frac{a}{|y|} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Később Hampel a durva hibák biztos kizárása érdekében az intervallumbeosztást tovább finomítva a hatásfüggvényt a széleken csökkentette (pl. $a = 2\sigma$, $b = 4\sigma$, $c = 8\sigma$ értékekkel):

$$\Psi(y) = \begin{cases} y, & \text{ha } |y| \leq a \\ a \operatorname{sign} y & \text{ha } a < |y| \leq b \\ \frac{a(c \operatorname{sign} y - y)}{c - b} & \text{ha } b < |y| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad \omega(y) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |y| \leq a \\ \frac{a}{|y|}, & \text{ha } a < |y| \leq b \\ \frac{a(1-c)}{b-c}, & \text{ha } b < |y| \leq c \\ 0 & \text{ha } |y| \geq c \end{cases}.$$

Ezt a hatásfüggvényt alkalmazták például a dán alaphálózat kiegyenlítése során (Borre, 1983).

3.4.2 M-becslők alkalmazása közvetett mérések kiegyenlítésére

Alkalmazzuk ezután Hampel módszerét az r elemű $\mathbf{x}$ paramétervektor becslésére, ha a $\mathbf{v}$ hibavektor az $\mathbf{x}$ -től lineárisan függ:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l} \quad \text{és} \quad \mathbf{A} = [a_{i,j}]_{i=1,n}^{j=1,r}. \quad (3.45)$$

Ha a $\mathbf{v}$ hibavektort tekintjük mintának, feltételezve, hogy $f(\mathbf{v}, \mathbf{x})$ eloszlásfüggvénye ismert, akkor levezethető a (3.42) likelihood függvény, vagyis felírható az $\mathbf{x}$ paramétervektor legjobb becslésének feltételi egyenlete:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i, \mathbf{x}) \Rightarrow \min.$$

Oldjuk meg (3.45) figyelembe vételével az aktuális szélsőérték feladatot:

$$v_i = \sum_{j=1}^r a_{i,j} x_j - l_i \quad i = 1, \dots, n$$

ezért

$$\frac{dv_i}{dx_k} = a_{i,k} \quad k = 1, \dots, r \quad (3.46)$$

és így (3.43) a következőképpen alakul

$$\frac{d}{dx_k} \sum_{i=1}^n \rho(v_i(x)) = \sum_{i=1}^n \frac{d\rho(v_i(x))}{dv_i} \frac{dv_i}{dx_k} = \sum_{i=1}^n a_{i,k} \Psi(v_i) = 0 \quad k = 1, \dots, r$$

ami tömörített írásmódban

$$\mathbf{A}^T \Psi(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \text{ahol} \quad \Psi(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \Psi(v_1) \\ \Psi(v_2) \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (3.47)$$

Láttuk, hogy a normális eloszlás hatásfüggvénye $\Psi(v) = v$, ezért (3.47) a következő alakot veszi fel:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) = \mathbf{0},$$

melyből a legkisebb négyzetek módszerével kapott megoldás már levezethető:

$$\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}$$

Nézzük most meg, hogy néznek ki a Hampel módszeréből levezetett feltételi egyenletek! Feltesszük, hogy az $\mathbf{A}$ mátrixot a v_i hibák nagysága alapján függőlegesen 4 almatrixra bonthatjuk, melyek legyenek rendre $\mathbf{A}_1$ ($|v_i| \leq a$), $\mathbf{A}_2$ ($a < |v_i| \leq b$), $\mathbf{A}_3$ ($b < |v_i| \leq c$) és $\mathbf{A}_4$ ($c < |v_i|$). Ennek megfelelően particionáljuk (3.45)-ben a $\mathbf{v}$ hibavektort és $\mathbf{l}$ -et is:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}^1 \\ \mathbf{v}^2 \\ \mathbf{v}^3 \\ \mathbf{v}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{A}^4 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} - \begin{bmatrix} \mathbf{l}^1 \\ \mathbf{l}^2 \\ \mathbf{l}^3 \\ \mathbf{l}^4 \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

Ezután írjuk fel (3.47)-et is particionálva:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_3^T & \mathbf{A}_4^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi(\mathbf{v}^1) \\ \Psi(\mathbf{v}^2) \\ \Psi(\mathbf{v}^3) \\ \Psi(\mathbf{v}^4) \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Tehát

$$\mathbf{A}_1^T \Psi(\mathbf{v}^1) + \mathbf{A}_2^T \Psi(\mathbf{v}^2) + \mathbf{A}_3^T \Psi(\mathbf{v}^3) + \mathbf{A}_4^T \Psi(\mathbf{v}^4) = \mathbf{0}. \quad (3.49)$$

A megfelelő hatásfüggvények behelyettesítésével adódik:

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{v}^1 + \mathbf{A}_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + \mathbf{A}_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^3) = \mathbf{0}.$$

A $\mathbf{v}^i = \mathbf{A}_i \mathbf{x} - \mathbf{l}_i$ (3.48) behelyettesítése után kapjuk:

$$\mathbf{A}_1^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{x} - \mathbf{l}_1) + \mathbf{A}_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + \mathbf{A}_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 + \mathbf{l}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Az egyenletet rendezve adódik:

$$\left[\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_3^T \mathbf{A}_3 \frac{a}{c-b} \right] \mathbf{x} = \mathbf{A}_1^T \mathbf{l}_1 - \mathbf{A}_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + \mathbf{A}_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 + \mathbf{l}_3).$$

Végeredményben tehát egy $\mathbf{Bx} = \mathbf{d}$ alakú egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \quad \text{és} \quad \mathbf{d} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} - a \mathbf{A}^T \mathbf{Q} \operatorname{sign} \mathbf{v}, \quad (3.50)$$

ahol $\mathbf{P}$ és $\mathbf{Q}$ átlós súlymátrixok, melyeknek főátlóelemei

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |v_i| \leq a \\ \frac{a}{b-c} & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad q_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a < |v_i| \leq b \\ \frac{b}{c-b} & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

Mivel a megoldás iterációban történik, ezért sign $\mathbf{v}$ -t lépésenként konstansként kell kezelni, és a $\mathbf{v}$ ellentmondás-vektor alapján a kiegyenlítést mindig az aktuális osztályba sorolásnak megfelelően ismételjük meg. Az $\mathbf{x}$ paramétervektor kezdőértékét pedig a feladat jellegétől függően becsléssel állapítjuk meg. Huber módszerének munkaképleteit külön nem részletezzük, mivel azt a Hampel módszer speciális eseteként ($b = c = \infty$) már tartalmazza.

3.4.3 A W-becslés, mint az M-becslés közelítő formája

A hatásfüggvény önkényes megválasztása a paraméterbecslés gyakorlati kivitelezhetőségét teszi kétségesé, mert nemlineáris egyenletrendszer megoldásához vezethet. Térjünk vissza ezért a közvetett mérések M-becslése megoldásának (3.47) alakjához:

$$\mathbf{A}^T \Psi(\mathbf{v}) = \mathbf{0}, \quad \text{ahol } v_i = v_i(\mathbf{x}).$$

Láttuk, hogy a (3.47) feladatot a paramétervektor egy $\mathbf{x}^0$ kezdő becsléséből indulva iterációval kell megoldani, mert a hatásfüggvény értelmezése intervallum-szakaszonként különböző. Tehát a k -adik iterációs lépésben a paramétervektor megelőző $\mathbf{x}^{k-1}$ -edik becsléséből írhatjuk fel a megfelelő $\Psi(v_i)$ függvényeket, és oldhatjuk meg (3.47)-et a paramétervektor következő $\mathbf{x}^{k-1}$ becslése céljából:

$$\mathbf{A}^T \Psi(\mathbf{v}(\mathbf{x}^k)) = \mathbf{0}. \quad (3.51)$$

A W-becslés, ami végeredményében súlyozott kiegyenlítést jelent, a $\Psi(\mathbf{v})$ hatásfüggvénynek az $\omega(\mathbf{v})$ súlyfüggvénnyel való következő közelítésén alapszik:

$$\Psi(v_i(\mathbf{x}^k)) \approx \frac{\Psi(v_i(\mathbf{x}^{k-1}))}{v_i(\mathbf{x}^{k-1})} v_i(\mathbf{x}^k) = \omega(v_i(\mathbf{x}^{k-1})) v_i(\mathbf{x}^k), \quad (3.52)$$

ami praktikusán bármely hatásfüggvény esetén lehetővé teszi a közelítő M-becslést, mivel (3.52) alapján (3.51) megoldása :

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \mathbf{v} = \mathbf{A} \mathbf{x}^k - \mathbf{l}$$

alakban adódik, ahol $\mathbf{P}$ átlós súlymátrix és

$$P_{i,j} = \omega(v_i(\mathbf{x}^{k-1})) \quad i = 1, \dots, n.$$

Tehát az $\mathbf{x}$ paramétervektor új becslését az

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x}^k = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (3.53)$$

egyenletrendszer megoldásaként kapjuk, ami közismerten a súlyozott megfigyeléseken alapuló kiegyenlítés megoldása.

Hangsúlyozni kell, hogy a W-becslés és az M-becslés nem azonosak, még akkor sem, ha ugyanazon a hatásfüggvényen alapulnak. Az viszont igaz, hogy a két módszer fixpontja szükségszerűen egybeesik, tehát ha az $\mathbf{x}$ paramétervektor az egyik módszernek fixpontja (ami azt jelenti, hogy $\mathbf{x}^{k-1} = \mathbf{x}^k = \mathbf{x}$ teljesül), akkor fixpontja lesz a másik eljárásnak is. Problémát csak az jelent, hogy egyik módszernél sem garantált, hogy az iteráció eléri a fixpontot (szélsőséges esetben akár divergens is lehet).

3.4.4 A síkbeli Helmert-transzformáció robusztus megoldása

Az alapfeladat a következő:

Legyen adott a síkon egy $P_i(\xi_i, \eta_i)$ pontsorozat, melyet egy Helmert-transzformáció (forgatás, nyújtás, eltolás) képez le a $Q_i(X_i, Y_i)$ pontsorozatba. Határozzuk meg a nevezett transzformáció paramétereit, melynek ismeretében azután más pontok leképezése is elvégezhető. A leképezést célszerűen az alábbi formában írhatjuk fel, vagyis kezeljük összevontan a forgatást és a nyújtást:

$$\begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & -s \\ s & r \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \xi_i \\ \eta_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_0 \\ Y_0 \end{bmatrix}. \quad (3.54)$$

Látható, hogy a transzformációt az (X_0, Y_0, r, s) paraméterekkel jellemezzük, amelyek két pont és képeinek ismeretében már meghatározhatók. Amennyiben több transzformált ismerünk, a transzformáció paramétereit már kiegyenlítőssel kell meghatározni, hogy a leképezés (mérés) esetleges hibáit kompenzálni tudjuk. A hibaegyenletek a következők lesznek:

$$\begin{aligned} v_{x_i} &= \xi_i r - \eta_i s + X_0 - X_i \\ v_{y_i} &= \eta_i r + \xi_i s + Y_0 - Y_i \end{aligned} \quad (3.55)$$

vagyis $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}$ jelölés mellett $\mathbf{x} = (X_0, Y_0, r, s)^T$ és

$$\begin{aligned} a_{2i-1,1} &= 1 & a_{2i-1,2} &= 0 & a_{2i-1,3} &= \xi_i & a_{2i-1,4} &= -\eta_i & l_{2i-1} &= X_i \\ a_{2i,1} &= 0 & a_{2i,2} &= 1 & a_{2i,3} &= \eta_i & a_{2i,4} &= \xi_i & l_{2i} &= Y_i \end{aligned}.$$

Amennyiben az egyes pontok méréséhez a priori eltérő p_i súlyokat rendelünk, akkor a paraméterek meghatározása az

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} \quad (3.56)$$

egyenletből történhet, ahol

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & . \\ 0 & p_1 & 0 & 0 & \cdots & . \\ 0 & 0 & p_2 & 0 & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & p_2 & 0 & . \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & . \end{bmatrix}.$$

Ha a P_i pontok koordináta-rendszerének origója egybeesik a pontok súlypontjával (eltolással mindig elérhető $\sum p_i \xi_i = \sum p_i \eta_i = 0$), akkor a (3.56) egyenletrendszer az alábbi alakra egyszerűsödik:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \sum p_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sum p_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum p_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum p_i (\xi_i^2 + \eta_i^2) \end{bmatrix} \\ \mathbf{A}^T \mathbf{P} \mathbf{l} &= \begin{bmatrix} \sum p_i X_i \\ \sum p_i Y_i \\ \sum p_i (\xi_i X_i + \eta_i Y_i) \\ \sum p_i (\xi_i Y_i - \eta_i X_i) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

ezért közvetlenül megoldható:

$$\begin{aligned} X_0 &= \frac{\sum p_i X_i}{\sum p_i}, & r &= \frac{\sum p_i (\xi_i X_i + \eta_i Y_i)}{\sum p_i (\xi_i^2 + \eta_i^2)} \\ Y_0 &= \frac{\sum p_i Y_i}{\sum p_i}, & s &= \frac{\sum p_i (\xi_i Y_i - \eta_i X_i)}{\sum p_i (\xi_i^2 + \eta_i^2)}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Tehát az iteratív robusztus becsléshez a transzformációs paraméterek első közelítését egy lépésben előállíthatjuk, miáltal a $\mathbf{v}$ ellentmondás vektor is meghatározott. Elindítható tehát a robusztus becslés szerinti iteráció, amely a korábbiak szerint majd olyan (3.50) súlyozást generál, ahol az egyes súlyok a pontok előző iterációbeli ellentmondásaitól függenek.

Mintapéllda

Egy egyszerű példán demonstráljuk a 2D Helmert transzformáció robusztus megoldását és vetjük össze a legkisebb négyzetek (LKN) szerinti hagyományos megoldással. A lokális koordináta-rendszer 1., 2. és 10. pontjában 0,84 m; 0,24 m és 0,67 m durva hibát feltételezünk. A két koordináta-rendszer között van $0,8 \cdot 10^{-3}$ radián forgatás és mindkét tengely irányában 0,1 m eltolás, valamint a koordináta meghatározás ± 1 cm-es normális eloszlású véletlen középhibával jellemezhető. A Huber módszerrel történő becsléshez az a paraméter értékét ezért 3σ -ra, azaz ± 3 cm-re vettük fel.

A két koordináta-rendszerben adott pontok koordinátái (m):

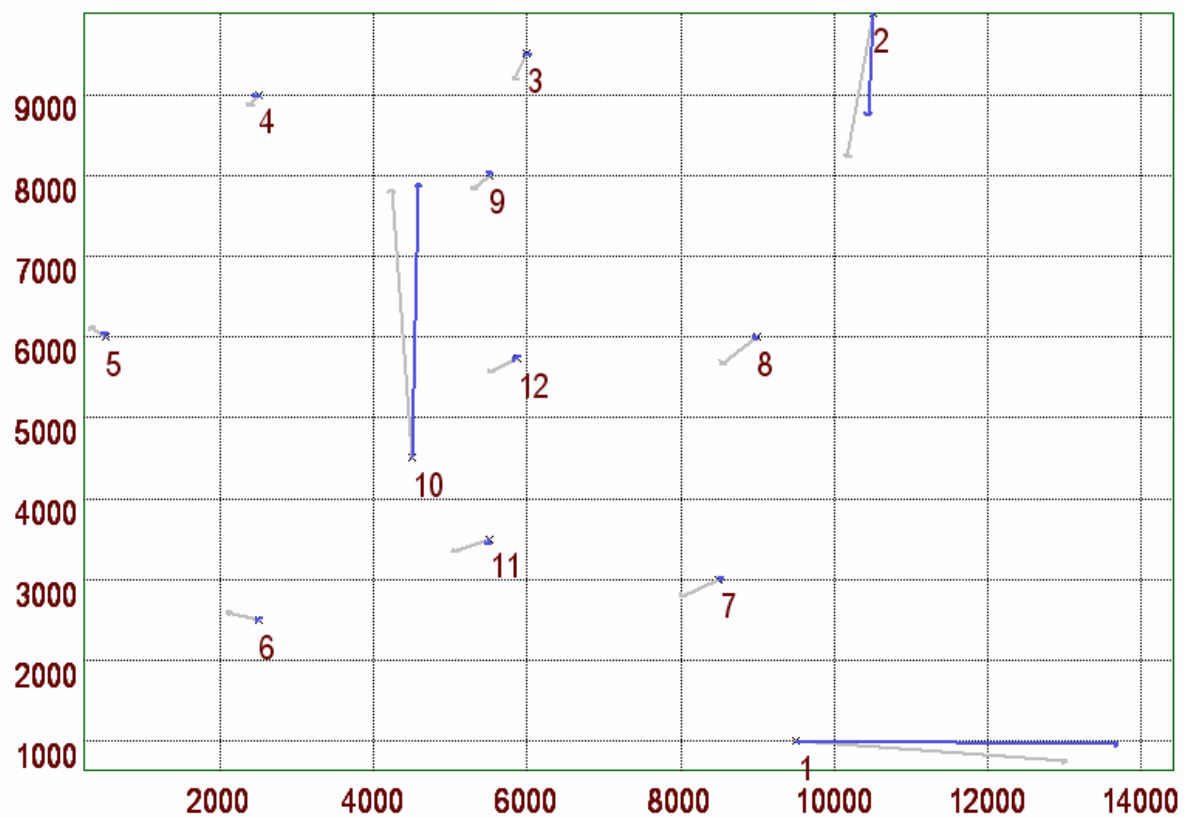
Psz.	X	Y	ξ	η
1.	9500.000	1000.000	9501.541	992.280
2.	10500.000	10000.000	10507.894	9991.248
3.	6000.000	9500.000	6007.502	9495.096
4.	2500.000	9000.000	2507.089	8997.894
5.	500.000	6000.000	504.688	5999.510
6.	2500.000	2500.000	2501.891	2497.897
7.	8500.000	3000.000	8502.312	2993.095
8.	9000.000	6000.000	9004.692	5992.695
9.	5500.000	8000.000	5506.303	7995.509
10.	4500.000	4500.000	4503.516	4496.974
11.	5500.000	3500.000	5502.692	3495.482
12.	5863.636	5727.273	5868.113	5722.482

A hagyományos legkisebb négyzetek módszerével és a Huber-féle robusztus eljárással kapott javítások és x, y koordináta súlyok a második iteráció után az alábbi táblázatban láthatók.

Psz.	V_{LKN}	v^2	p_x^2	p_y^2
1.	0.706	0.838	0.036	1.000
2.	0.362	0.251	1.000	0.115
3.	0.071	0.003	1.000	1.000
4.	0.040	0.012	1.000	1.000
5.	0.048	0.014	1.000	1.000
6.	0.085	0.005	1.000	1.000
7.	0.108	0.010	1.000	1.000
8.	0.117	0.012	1.000	1.000
9.	0.054	0.011	1.000	1.000
10.	0.666	0.679	1.000	0.044
11.	0.098	0.014	1.000	1.000
12.	0.079	0.006	1.000	1.000

Világosan látszik az, hogy míg a LKN megoldás „elkente” a durva hibákat, a robusztus becslés már a második iteráció után is teljesen „lesúlyozta” a hibás koordinátákat és a javítások a durva hibával egyenlők lettek a durva hibás pontokon, míg a meghatározás ± 1 cm-es középhibájával jól összhangba kerültek a többi ponton.

Érdemes ábrán is megsejmelni a javítások vektorait:



3.5 Krigelés

A geostatistikában általában, de különösen a bányászatban alkalmazzák a feltalálójáról, a délafrikai Krige professzorról krigelésnek nevezett súlyozott optimális becslési eljárást. A krigelés kiterjedten alkalmazott interpolációs eljárás a különböző GIS rendszerekben. A Golden Software népszerű SURFER felületmodellező programja is tartalmazza a krigelést mint fontos interpolációs módszert. A krigelésről részletes összefoglalót ad Steiner F. A geostatistika alapjai (1990) c. tankönyve.

A geostatistika egyedülálló vonása az ún. *regionalizált változók* alkalmazása, amely változók jellegükben a véletlen (eratikus) és teljesen determinisztikus (strukturált) változók közé esnek. Regionalizált változók írják le a térbeli helyzettel is jellemezhető jelenségeket (például a felszín magassága). A regionalizált változót szokásosan z vagy Z betűvel jelölik a geostatistikában. A jelenség térben folytonos; ennek ellenére nem minden pontban lehetséges a mintavételezés.

Röviden összefoglalva a geostatistikai elemzés általában a következő lépéseket foglalja magában:

- a minták közötti térbeli autokorreláció becslése
- a térbeli autokorrelációs modell paramétereinek becslése
- a felszíni pont becslése pont krigeléssel
- az átlagértékek becslése blokk krigeléssel

A térbeli autokorrelációt elemezhetjük korrelogram, kovariancia függvény vagy variogram (=félvariogram) felhasználásával. A kovariancia függvényről Detrekői Á. Kiegyenlítő számítások (1981) c. tankönyve ad áttekintést.

3.5.1 A félvariogram

A regionalizált változók elmélete a *félvarianciát* használja a felszíni pontok egymáshoz vett viszonya mértékének jellemzésére. A félvariancia az egymástól konstans d távolságra (szeparáció, mely 2 dimenziós esetben vektor mennyiség) levő összes lehetséges pontban a regionalizált változó értékek különbségei varianciájának a fele.

A félvariancia nagysága a minták térbeli függőségi fokának a mértéke. Ha a távolság kisebb, a félvariancia is kisebb; nagyobb távolság nagyobb félvarianciát hoz magával. A félvarianciák grafikonja a távolság függvényében a *félvariogram* vagy variogram:

$$\gamma(d) = \frac{1}{2N(d)} \sum_{i=1}^{N(d)} (z_i - z_{i+d})^2 \quad i=1, \dots, n, \quad (3.58)$$

ha $N(d)$ jelöli az adatpontok párjainak számát, z_i az adatpontokat elválasztó d vektor kezdőpontja, z_{i+d} a végpontja. A gamma érték tehát a d vektor által elválasztott adatponti párok értékei különbsége átlagos négyzetének a fele. A variogramot a térben mért tulajdonságok *térbeli korrelációjának* leírására használjuk. Nem más, mint az egymástól d távolságra levő értékek hasonlóságának (a két érték közötti kovarianciának) a mértéke.

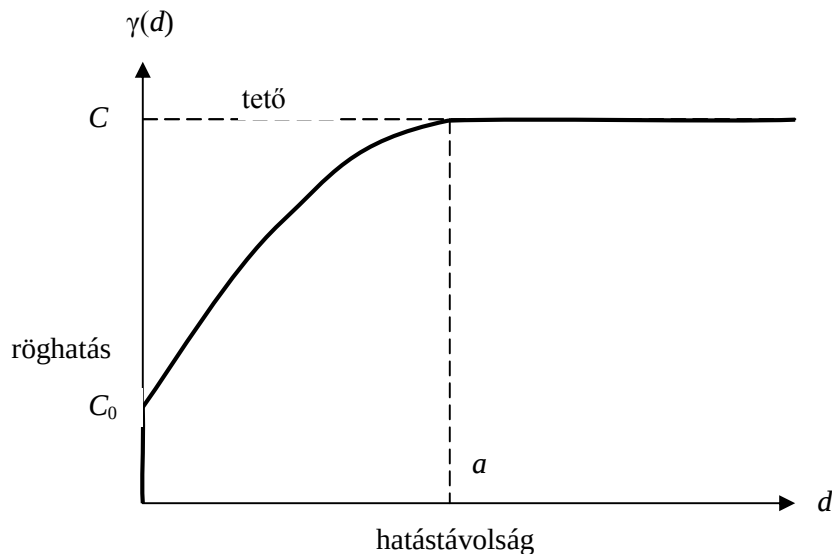
Bár a félvariogram és a kovariancia látszólag hasonlóak, a félvariogram számításához nem kell a *stacionaritás* hipotézise. Egy $z(x)$ valószínűségi változó *gyengén stacionárius*, ha

1. a várható érték létezik és nem függ az x hely megválasztásától, továbbá
2. a valószínűségi változó minden $\{z(x), z(x+d)\}$ párjára a $C(x_1, x_2) = E\{[z(x_1) - m(x_1)][z(x_2) - m(x_2)]\}$ *kovariancia* létezik és csak a pontokat elválasztó d szeparációs vektortól függ.

Ezenkívül a félvariogram számítása nem igényli a regionalizált változó $m(x)$ *átlagát* míg a kovariancia igen.

A félvariogram jellegzetességei között megemlíthetjük azt, hogy a $d = 0$ értéknél zérus értéket kell felvennie mivel a pontot önmagával összehasonlítva az értékek különbsége zérus. A tapasztalat azt mutatja, hogy sok variogramnak ugrása van a $d = 0$ értéknél, ami sokszor a

regionalizált változóban meglevő struktúráatlan 'zaj' komponens hatásának tulajdonítható. Ez az ugrás a *röghatás* (nugget effect). A röghatás oka lehet az is, hogy a minta intervallumnál sokkal kisebb hatástávolságú, nagyon kis léptékű strukturált komponens van jelen. Növekvő d távolságra a félvariancia is növekszik. Ezután egy adott d távolságon, amit *hatástávolságnak* (range) nevezünk, a félvariancia körülbelül egyenlő lesz a felület varianciájával. Ez a maximális érték a *tető* (sill). A hatástávolság az a maximális távolság, amelyre a felület egyik pontja még kapcsolatban van egy másik ponttal. A hatástávolság a pontnak azt a maximális környezetét definiálja, amelyen belül kell a pontjainkat egy tetszőleges pont függvényértékének interpolálásához kiválasztanunk a pontok közötti statisztikai korreláció kiaknázása érdekében. Olyan körülmények között, amikor az interpolálandó pont és a rácspontok távolsága meghaladja a hatástávolságot, a krigelés ugyanazt az eredményt adja mint a hagyományos statisztika, vagyis az átlagértéket. A félvariogram most tárgyalt jellemzőit az alábbi ábrán mutatjuk be.

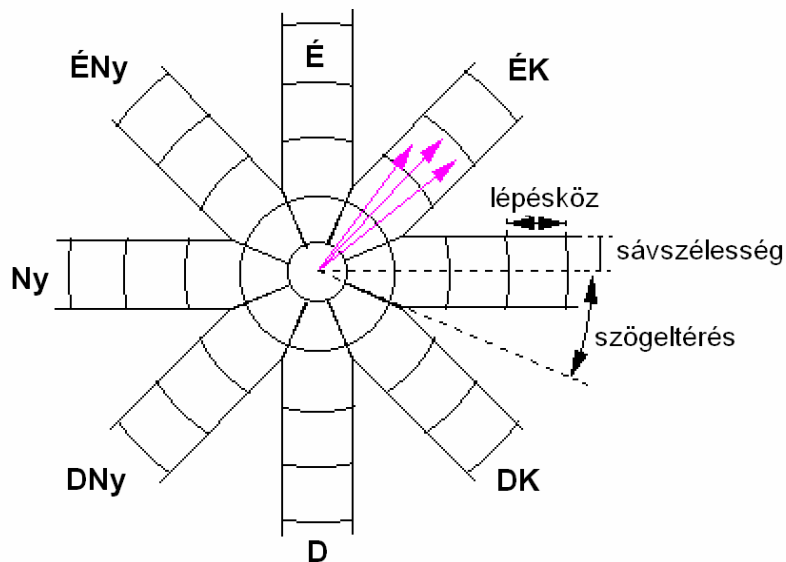


A félvariogram jellegzetességei

A variogram *egyszerű*, ha egyetlen változó térbeli függését méri és *kereszt*, ha két különböző változó függését jellemzi. Az egyszerű variogram mindig pozitív vagy zérus értékű, mivel egyfajta variancia. Ha egy változónak nincs térbeli függése, horizontális variogramot eredményez, amely csak zérus d távolságon zérus.

A kereszt (fél)variogram felvehet negatív, zérus és pozitív értékeket is, mivel egyfajta kovariancia. Annyi kereszt-variogram van, ahány különböző változó pár található. Ahol a kereszt variogram pozitív, ha a két változó hajlamos együttesen változik, ellenkező esetben, ha a kereszt variogram negatív, a két változó jórészt egymással ellentétesen változik. Ott lesz zérus, ahol a változók egymástól függetlenül változnak.

A félvariogramot a *tapasztalati félvariogram* segítségével becsüljük, amely az adatponti értékekből kapott félvariogram. A variogramot az adatokból különböző irányokra állítjuk elő. Ezek általában az É-D, K-Ny, ÉK-DNy és ÉNy-DK irányok. Amennyiben adataink nem szabályos hálóba rendezettek, úgy bizonyos eltéréseket engedünk meg a variogram számításakor, vagy is az összes lehetséges d szeparációs vektorokat különböző osztályokba soroljuk (lásd az alábbi ábrát).



Íránymenti tapasztalati félvariogram számítása

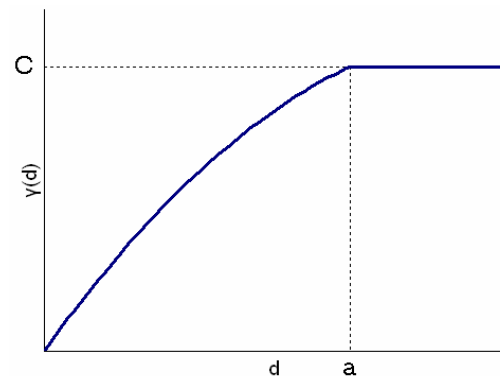
Amennyiben a szepariációs vektorok ugyanabba cellába esnek, akkor azonos osztályba soroljuk őket és a variogram értéket külön becsüljük minden osztályra. Az irányok száma nem csak 8 lehet, hanem ettől eltérő (4, 8, 16, stb). Ha a megengedett szögeltérés $\pm 90^\circ$, akkor az összes adatpont értékét tartalmazni fogja a számítás.

A mérési eredményekből szerkesztett variogram nem sima függvény, ezért a numerikus kezelhetőség megkívánja, hogy valamilyen elméleti függvénnyel közelítsük a tapasztalati variogramot. A gyakorlatban sokszor a legkisebb négyzetek módszerével illesztjük az elméleti függvényt (annak paramétereit kiegyenlítőssel meghatározva) a tapasztalati értékekhez. Az elméleti modellek között megemlíthjük a következő négyet:

szférikus-tető modell

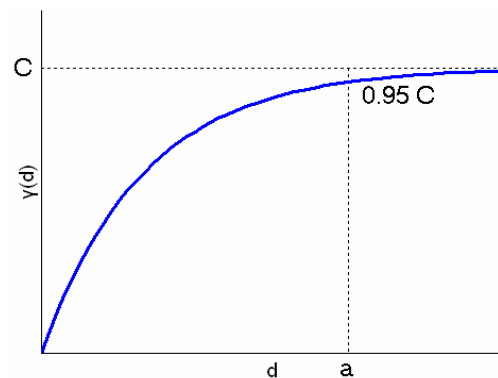
$$\gamma(d) = C \left[1.5 \frac{d}{a} - 0.5 \left(\frac{d}{a} \right)^3 \right], \quad \text{ha } 0 \leq d \leq a$$

$$\gamma(d) = C \quad \text{ha } d > a$$



exponenciális modell

$$\gamma(d) = C \left[1 - e^{-\frac{3d}{a}} \right]$$

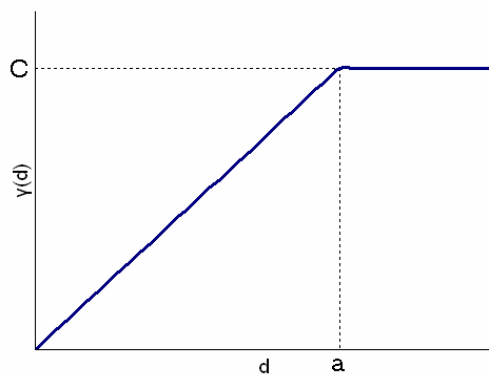


aszimptotikusan simul C -hez, gyakorlati hatástávolsága $\gamma(a) = 0.95C$

lineáris-tető modell

$$\gamma(d) = C \frac{d}{a}, \quad \text{ha } 0 \leq d \leq a$$

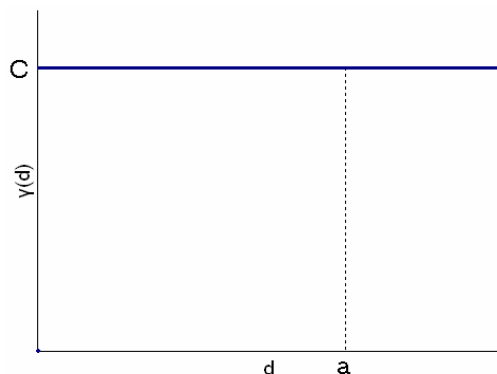
$$\gamma(d) = C \quad \text{ha } d > a$$



röghatás modell

$$\gamma(d) = 0, \quad \text{ha } d = 0$$

$$\gamma(d) = C \quad \text{ha } d \neq 0$$



Ha a röghatás C_0 értékét is figyelembe vesszük, a fenti modellek (az első három) módosíthatók ezzel az értékkel.

Nézzünk most egy egyszerű példát arra, hogyan határozhatjuk meg az elméleti variogram modell paramétereit. Például a lineáris modell esetében a variogram a

$$\gamma(d) = C_0 + S \cdot d \quad (3.59)$$

alakot veszi fel, ahol C_0 az ismeretlen röghatás és S az ismeretlen meredekség. Ha ezt a modellt szeretnénk alkalmazni, akkor a két ismeretlen elméleti modell paraméter meghatározásához két egyenletre van szükségünk.

Az elmélet szerint (Barnes, 1991) a minta varianciájának várható értéke a variogram átlagos értéke az összes lehetséges minta értékpár között; ez az első egyenlet. A második egyenletet úgy állítjuk elő, hogy egyenlővé tesszük a minta variogramot és a modellezett variogramot a legközelebbi szomszédokra. Ezek szerint tehát a két egyenlet

$$\begin{aligned} Var &= C_0 + S \cdot d_{\text{átlag}}, \\ G_{nn} &= C_0 + S \cdot d_{nn} \end{aligned} \quad (3.60)$$

ahol

d_{nn} = a legközelebbi szomszéd átlagos távolsága

$d_{\text{átlag}}$ = az átlagos mintapont távolság

G_{nn} = az legközelebbi szomszédos pontok értékei átlagos négyzetes különbségeinek a fele

Var = a minta variancia (szórás).

Megoldva ezt a két egyenletet a két ismeretlenre megkapjuk a lineáris variogram modell keresett paramétereit:

$$\begin{aligned} S &= \max \left[\frac{Var - G_{nn}}{d_{\text{átlag}} - d_{nn}}, 0 \right] \\ C_0 &= \max \left[\frac{G_{nn} d_{\text{átlag}} - Var d_{nn}}{d_{\text{átlag}} - d_{nn}}, 0 \right] \end{aligned} \quad (3.61)$$

3.5.2 Krigelés és alkalmazása szórt adatok rácsra interpolálására

A krigelés, mint már említettük voltaképpen a regionalizált z változó ismeretlen értékeinek meghatározására szolgáló súlyozott optimális becslési eljárás. Egyik népszerű alkalmazási területe rácsadatok térképének előállítására szabálytalan ponthalmazon adott értékekből. A krigelés szemre is tetszetős felületet interpolál és képes az adatainkban levő trend figyelembe vételére (ez az ún. *univerzális krigelés*).

A krigelés másik előnye az, hogy *robustusztus* eljárás, nem érzékeny túlzottan az alkalmazott variogram modellre, tehát még annak naiv megválasztása mellett is értelmes eredményeket szolgáltat. Ezenkívül képes tekintetbe venni az adatok geometriai *anizotrópiáját* (vagyis azt az esetet, amikor a különböző irányokban számított variogram hatástávolsága változik).

A krigelés legegyszerűbb formája a pontonként előállított becslés, a *pont krigelés*. Ekkor az ismeretlen értéket a krigelés az alábbi (W_i súlyokkal súlyozott) lineáris becsléssel adja meg:

$$z_e(p) = \sum_{i=1}^n W_i z(p_i). \quad (3.62)$$

A becsült $z_e(p)$ érték minden bizonnyal különbözni fog az adott pontbeli tényleges $z_a(p)$ értéktől és ez a különbség a *becslési hiba*:

$$\varepsilon = z_e(p) - z_a(p).$$

Ha nincs *drift* vagy *trend* (azaz a regionalizált változó átlaga minden pontban zérus), akkor a súlyok összege 1 (normált súlyok) és a becslés torzítatlan. A becslések szórása a tényleges értékek körül a becslési hiba variancia,

$$\sigma_z^2 = \frac{\sum_{i=1}^n [z_e(p_i) - z_a(p_i)]^2}{n}. \quad (3.63)$$

A becslés és a becslési hiba a választott súlyoktól függ. A krigelés ideális esetben olyan optimális súlyozást szolgáltat, amelyiknek a becslési hibája minimum. A minimalizációs feladatot a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel feltételes szélsőérték problémára vezethetjük vissza. Ha λ -val jelöljük a Lagrange-féle multiplikátort, akkor a krigelés az alábbi lineáris egyenletrendszer megoldását jelenti az ismeretlen $\mathbf{W}$ súlyokra:

$$\mathbf{A} \mathbf{W} = \mathbf{B}, \quad (3.64)$$

ahol

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \gamma(d_{11}) & \gamma(d_{12}) & \vdots & \gamma(d_{1n}) & 1 \\ \gamma(d_{21}) & \gamma(d_{22}) & \vdots & \gamma(d_{2n}) & 1 \\ \dots & \dots & \ddots & \dots & \dots \\ \gamma(d_{n1}) & \gamma(d_{n2}) & \vdots & \gamma(d_{nn}) & 1 \\ 1 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{és} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \gamma(d_{1p}) \\ \gamma(d_{2p}) \\ \vdots \\ \gamma(d_{np}) \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (3.65)$$

Az $\mathbf{A}$ mátrixot szokták *Krige-mátrix*nak nevezni. Az $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ mátrixokban található értékeket a félvariogramból számíthatjuk ki, vagy a megfelelő matematikai kifejezésből (variogram modell). Miután meghatároztuk az optimális $\mathbf{W}$ súlyokat, a becslést a (3.62) egyenletből állíthatjuk elő. A becslés (krigelés) varianciáját pedig a

$$\sigma_z^2 = \mathbf{W}^T \mathbf{B}$$

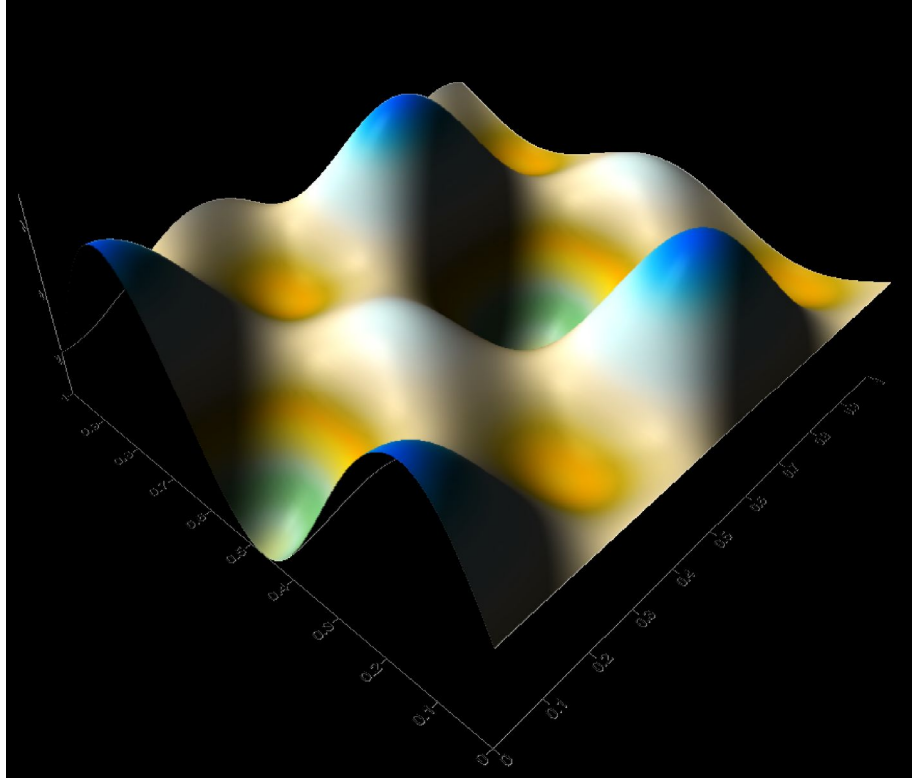
kifejezés szolgáltatja.

Mintapélda

Az alábbiakban egy gyakran felmerülő feladat, szórt pontokban adott értékek rácsra interpolálásához alkalmazzuk a krigelést. A felület ismert egyenlete legyen

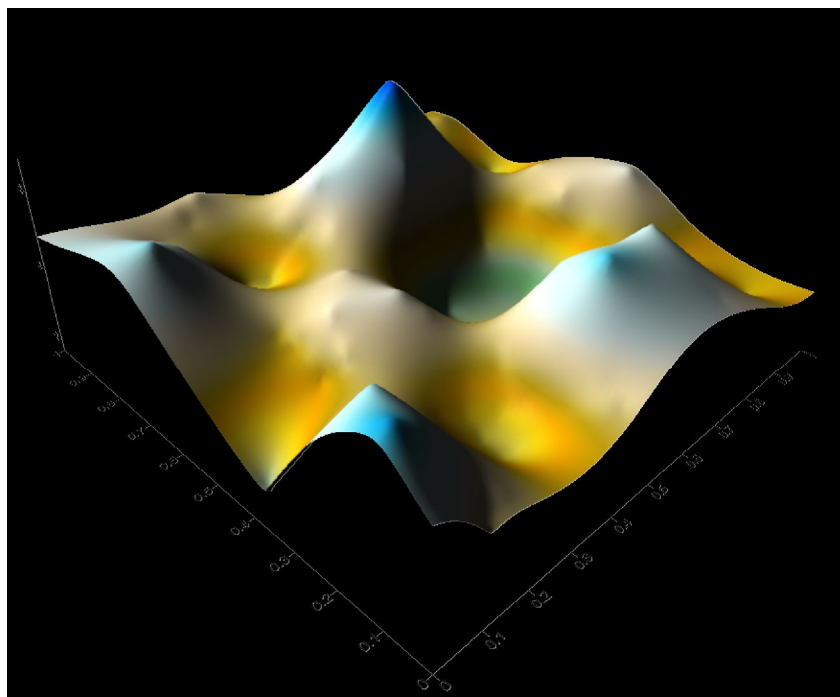
$$z(x, y) = 2 \cos(10x) \sin(10y) + \sin(10y),$$

melyet a $(0 < x < 1, 0 < y < 1)$ tartományban a következő ábrán illusztrálunk:



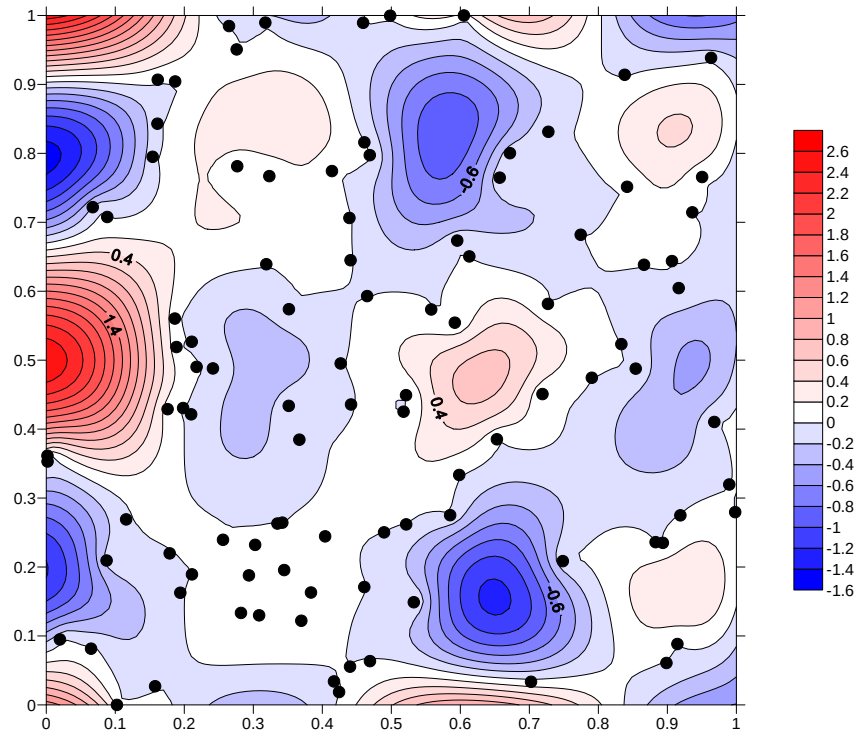
Az eredeti felület ábrája

A felületet száz véletlenszerűen választott pontban mintavételeztük a $(0 < x < 1, 0 < y < 1)$ tartományban. Ezután meghatároztuk krigeléssel, a lineáris variogram modellt felhasználva a tartományt lefedő 101×101 pontból álló rácshálózat sarokpontjaiban a becsült függvényértékeket. Az így meghatározott felületet láthatjuk a következő ábrán:



A 100 pontból krigeléssel előállított felület ábrája

A krigeléssel meghatározott felület szemmel láthatóan eltér az eredetitől. Viszont ha felrajzoljuk az eltéréseket és az interpolációhoz felhasznált szórt pontok elhelyezkedését, világosan látható, hogy a nagyobb eltérések pontosan ott találhatók, ahol nem voltak felhasznált pontok.



A krigeléssel meghatározott és az eredeti felület eltérései valamint a felhasznált 100 pont elhelyezkedése

Számszerűen is kimutatva a rácspontokban az eredeti és krigeléssel becsült értékek eltéréseit, azok a következőképpen alakulnak:

	min	max	átlag	szórás
eredeti rács	-3.000	3.000	0.160	1.160
krigelt-eredeti	-1.475	2.539	0.005	0.467
súlyozásos-eredeti	-1.971	2.593	-0.031	0.626

Látható az, hogy a pontos felület előállítás szempontjából igen lényeges az interpolációhoz felhasznált pontok hézagmentes elhelyezkedése is. A táblázat harmadik sorában az összehasonlítás kedvéért egyszerű inverz négyzetes súlyozással interpolált értékek eltéréseinek statisztikai jellemzői láthatók. Rögtön észrevehetjük, hogy ezek mind rosszabbak a krigelésnél (nem optimális becslések). A szórt adatpontokból 2D rácsra interpoláló, inverz négyzetes súlyozást felhasználó EULER függvényt pedig tanulságképpen mellékeljük.

```
function grid2Ddata(xyzp,xg,yg,nb=3)
## zi=grid2Ddata(xyzp,xg,yg,nb=3)
## Purpose: interpolate irregularly spaced data to grid
## Input: xyzp np*3 matrix of x,y,z data
##         xg 1*n vector of grid x coordinates
##         yg 1*ny vector of grid y coordinates
##         nb number of neighbors to interpolate from
## Output: zi ny*n grid of interpolated z-values

xp=xyzp[:,1]'; yp=xyzp[:,2]'; zp=xyzp[:,3]'; np=rows(xyzp);
if np<nb; error("not enough points to find neighbors!"); endif;
nx=cols(xg); ny=cols(yg); zi=zeros(ny,nx);
## size of a square where I have probability of finding nb
## datapoint, if datapoints are uniformly distributed over
## the rectangle xg*yg:
dx=sqrt(nb*(xg[nx]-xg[1])*(yg[ny]-yg[1])/np);
## even if the grid is nonuniformly spaced, the points are non evenly
## distributed, etc, this is a starting size for the shell search
for i=1 to nx;
    ix=(xp-xg[i])/dx; nmx=max(abs(ix));
    for j=1 to ny;
        iy=(yp-yg[j])/dx; nmy=max(abs(iy));
```

```

## search for nb neighbors of (xg[i],yg[j]) by looking in
## larger and larger cell neighborhoods
n nb=0; ns=0; nls=0; ..(=> first macrocell -> 1x probability)
repeat;
  if n nb<n b && n ls<max(n mx,n my);
    ns=ns+1; n ls=sqrt(ns/4);
    in b=nonzeros((abs(ix)<n ls && abs(iy)<n ls));
    n nb=length(in b);
  else;
    break;
  endif;
end;

## compute the distances between the gridpoint and all the
## candidate neighbors found in the macrocell
d2=(xp[in b]-xg[i])^2 + (yp[in b]-yg[j])^2 ;
zb=zb[in b];
## select the nb closest data points
{ds,k}=sort(d2);
zb=zb[k[1:n b]]; ds=ds[1:n b];

## the grid value is computed as a weighted mean of the values
## at the neighbor datapoints, with inverse square distance weights
if any(ds==0);
  zi[i,j]=mean(zb[ds==0]);
else;
  zi[j,i]=sum(zb/ds)/sum(1/ds);
endif;
end;
end;
return zi;
endfunction

```

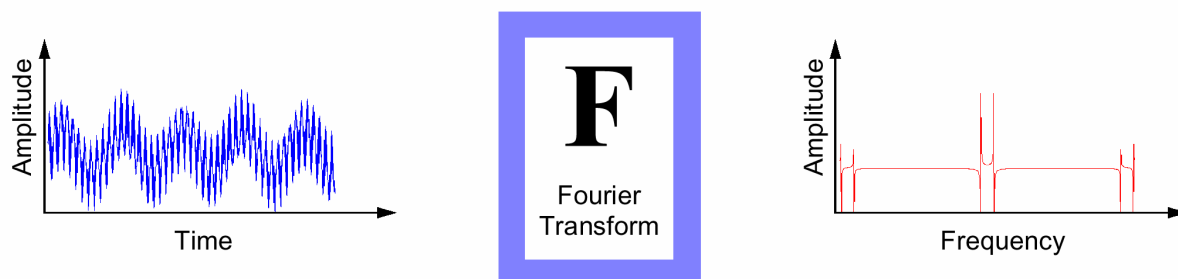
Feladat: A fenti függvényt felhasználva írjunk EULER eljárást a krigelés megvalósítására. A variogram modellezéséhez használjuk a (3.59)-(3.61) alatt felírt összefüggéseket.

4 A wavelet transzformáció és alkalmazásai

4.1 Bevezetés

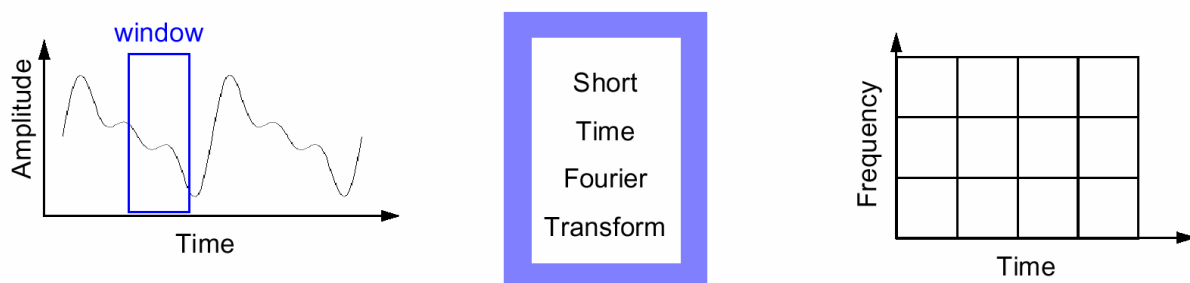
Mi a közös a következő dolgokban: emberi ujjlenyomatok, Brahms 1. Magyar tánca, az El Niño, és a GPS? Az, hogy mindegyikre alkalmaztak egy viszonylag új matematikai eljárást, a wavelet-analízist.

A wavelet-analízis a Fourier-analízisnek, azaz a jel frekvenciaösszetevőkre bontásának egyfajta kibővítése. Úgy is szemléltethetjük a Fourier-transzformációt mint a *nézőpontunk* megváltoztatását az időbeli nézőpontról a frekvencia nézőpontra. Sokféle jel esetében a Fourier-analízis rendkívül hasznos, mivel a jel frekvencia tartalma igen lényeges. Ezért a Fourier-transzformáció még ma is központi szerepet játszik a digitális jelfeldolgozásban. Viszont van egy komoly hátránya: csak ún. „globális” jellemzésre alkalmas, tehát a pl. a jelekben lévő hirtelen változások időpontjának meghatározására nem felel meg. A transzformáltból lehetetlen tehát megmondani azt, hogy *mikor* következett be egy adott esemény.



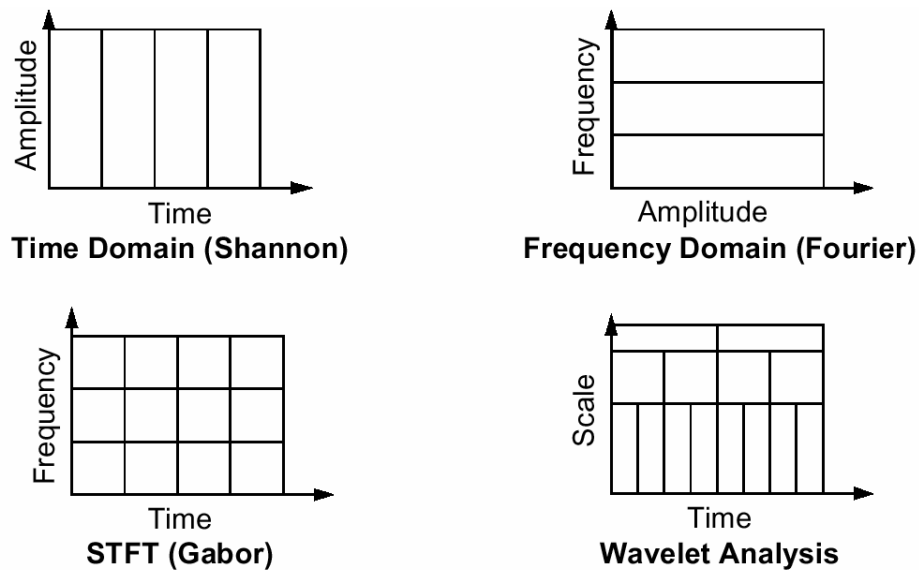
Ha a jel nem sokat módosul az idő folyamán – azaz olyan jel, amelyiket *stacionárius*nak neveznek – akkor ez a hátrány nem igazán fontos. Azonban sok, számunkra érdekes jel számos nemstacionárius vagy tranziens (átmeneti) jellegzetességet tartalmaz: drift, trend, hirtelen változások, események kezdete illetve befejeződése. Ezek a jellemzők gyakran a jel számunkra legérdekesebb részei és a Fourier-transzformáció nem alkalmas ezek kimutatására.

A probléma egyik lehetséges megoldásaként került a figyelem középpontjába a *rövid idejű (gördülő) Fourier-transzformáció* (angolul Short Time Fourier Transform, STFT), először Gábor Dénes (1946) javaslatára. Ez a Fourier-transzformáció adaptált változata, mellyel a jelnek egyszerre csak egy rövid szakaszát elemzik – ezt az eljárást a jel *ablakolásának* nevezik. Ez a jelet egy kétdimenziós idő-frekvencia diagramra képzi le.



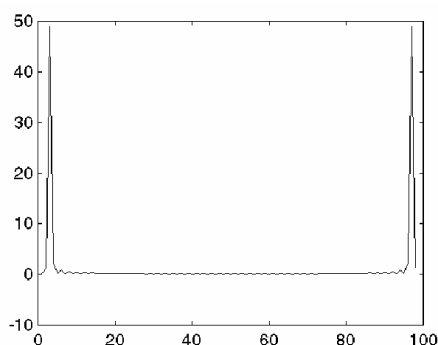
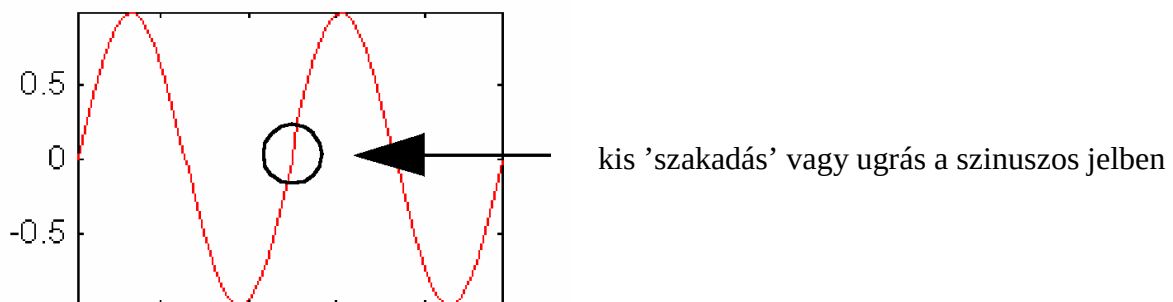
Az STFT egyfajta kompromisszumot képvisel egy jel idő- és frekvencia alapú nézőpontjai között. Mindkettőről közöl tehát információt, hogy mikor és milyen frekvenciájú jel esemény történt. Viszont csak korlátozott pontossággal képes szolgáltatni ezt az információt és a pontosság az ablak méretétől függ. Bár az STFT egyfajta hasznos kompromisszum a kétfajta (idő és frekvencia) nézőpont között, az a hátránya, hogy miután kiválasztottunk egy ablak méretet az idő változó tekintetében, ez az összes frekvenciára ugyanaz. Sokfajta jel ennél rugalmasabb megközelítést kíván – olyat, amikor változtathatjuk az ablak méretét akár az idő, akár a frekvencia pontosabb meghatározása céljából.

A következő logikus lépés tehát a wavelet-transzformáció (WT): változó méretű ablakkal történő analízis. Ekkor az ablak méretét nagyobbra vehetjük az alacsony frekvenciás rész elemzéséhez, de kisebb méretű ablakot használhatunk a magas frekvenciás információ előállításához. Az alábbi ábra összefoglalóan mutatja az idő, frekvencia, STFT és WT transzformációk 'nézőpontját', ahonnan a jelet szemléljük.

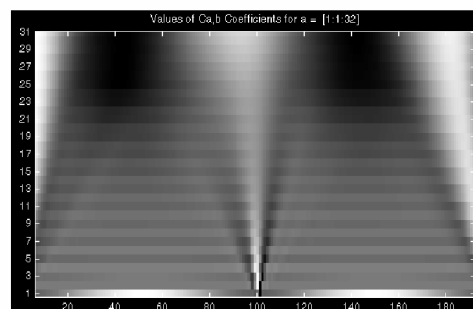


A waveletek alkalmazásának egyik fő előnye az, hogy *lokális* elemzést tesznek lehetővé – azaz egy kiterjedtebb jel kisebb részének az elemzését.

Tekintsünk most egy olyan szinuszos jelet, amelyiknek egy szemmel szinte észre sem vehető kis 'szakadása' van. A mindennapi életben ilyen jelek elég gyakran keletkeznek: például áramingadozás vagy nem tökéletes kapcsoló hatására.



Fourier transzformált



Wavelet transzformált

A jel Fourier transzformáltja semmi érdekeset nem jelez: egy egyszerű lapos spektrum két csúccsal, amelyek egyetlen szinuszhullámhoz tartoznak. Ezzel szemben a jel wavelet-transzformáltja világosan mutatja a jel kicsiny 'szakadásának' időbeni helyzetét.

A wavelet analízis képes az adatok olyan jellemzőinek a kimutatására, amelyre más eljárások nem képesek: trendek, töréspont, a magasabb deriváltak ugrása, fraktálszerkezet. Ezen túlmenően, mivel a wavelet transzformáció a hagyományos eljárásoktól teljesen eltérő

nézőpontot mutat az elemzett adatokról, a wavelet analízis segítségével gyakran jelentősen képesek vagyunk tömöríteni az adatokat azok látható lerontása nélkül.

Lássuk, hogy a bevezetőben említett területeken hogyan alkalmazták sikeresen a wavelet transzformációt!

Ujjlenyomatok helytakarékos tárolása. Egy digitalizált nagyfelbontású emberi ujjlenyomat körülbelül fél megabyte tárhelyet, egy teljes ujjlenyomat kártya pedig körülbelül 10 megabyte tárhelyet igényel. Bár ez nem tűnik túl soknak, képzeljük el 200 millió ember ujjlenyomatainak digitális tárolását. Ez 2 000 terabájnyi információ lenne! Viszont wavelet analízissel ez a tárigény legalább 15-ödére csökkenthető, nagyban megkönnyítve ezeknek az információknak a tárolását és továbbítását.

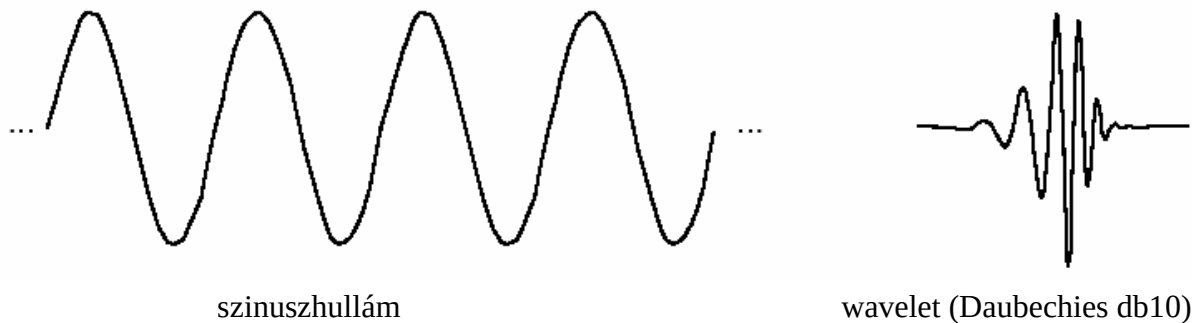
Brahms újraértékelve. A wavelet analízist felhasználták arra is, hogy helyreállítsanak egy olyan súlyosan károsodott felvételt, amelyen Brahms egyik saját szerzeményét játssza. Az 1. Magyar tánc egyik részét 1889-ben rögzítették Thomas Edison eredeti viaszbevonatú fonográfján. Az eredeti felvételt, amelyet a zaj már szinte teljesen felismerhetetlenné tett, a wavelet analízis segítségével tették használhatóvá. Így a kutatók felfedezték, hogy Brahms másképpen játszotta le még a saját nyomtatásban kiadott darabjait is. Néhány helyen például megduplázva játszotta le a nyolcad hangokat, más hangjegyekre tette át a hangsúlyt, sőt időnként még improvizált is ahelyett, ami a kottában volt leírva.

A GPS pontosságának javítása. A wavelet analízist használják a GPS pontosságának javítására is. Ezek között megemlíthetjük a GPS pszeudotávolság mérések zajmentesítését, a ciklusugrások felderítését és kiküszöbölését a GPS fázismérésekből, valamint olyan torzítások szétválasztását a nagyfrekvenciás vevő zajtól mint például a többutas terjedés. A wavelet analízis képes a deformációmérések anomáliáinak kimutatására is, továbbá a zaj és a szezonális hatások leválasztására a kéregmozgások jobb meghatározása céljából.

4.2 A folytonos wavelet transzformáció

Mi a *wavelet*? Röviden szólva egy olyan időben korlátozott tartamú hullámforma, amelynek zérus átlaga van.

Hasonlítsuk össze a waveleteket a szinuszhullámokkal, amelyek a Fourier analízis alapját képezik. A szinuszhullámok tartama nincs az időben korlátozva: mínusz végtelentől a plusz végtelenig terjednek. Ezenkívül a szinuszhullámok simák és szabályosak, a waveletek aszimmetrikusak és szabálytalanok.



A Fourier analízis egy jel különböző frekvencia összetevőkre bontását jelenti. A wavelet analízis ehhez hasonlóan egy jel olyan összetevőkre bontását jelenti, amely összetevők egy eredeti $\psi(t)$ (ún. *anya*) wavelet eltolts és átskálázott változatai.

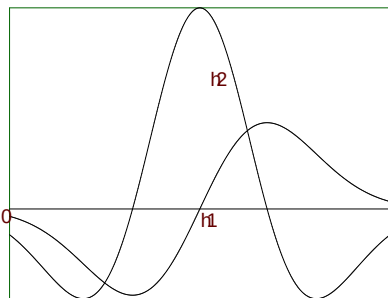
Ha csak ránézünk a szinuszhullám és a waveletek grafikonjára, már 'érezzük' azt, hogy a gyorsan változó jelek jobban elemezhetők a waveletekkel mint a szinuszhullámokkal. Azt is láthatjuk, hogy a jel lokális jellemzői jobban leírhatók waveletekkel, mivel azok időben (térben) jól lokalizált függvények.

Az *anya* waveletet mindig a feladatnak megfelelően kell választani, a szakirodalomban leggyakrabban a következő függvények használatosak:

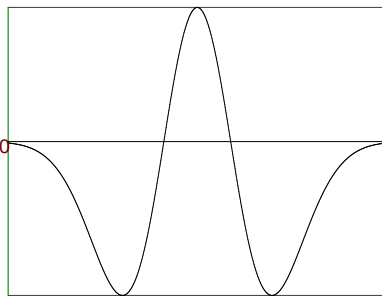
Hanusse függvények: $\psi_1(t) = te^{-t^2}$ $\psi_2(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2}$

Mexikói kalap: $\psi_2(t) = (1 - 2t^2)e^{-t^2/2}$

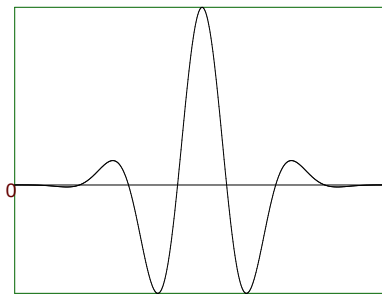
Morlet függvény: $\psi_2(t) = e^{i\omega t} e^{-t^2/2}$



Hanusse-függvények



Mexikói kalap



Morlet függvény

$\omega = 3$

Matematikailag az anya wavelet skálázása és eltolása a következőt jelenti:

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad a, b \in \mathbb{R} > 0 \quad (4.1)$$

ahol $\psi(t)$ az anya wavelet, b az eltolás, a a skála paraméter. Világos, hogy amint az a skála paraméter értéke csökken, úgy a wavelet is egyre jobban lokalizálódik a térben, egyre inkább alkalmas a magas frekvenciás jelek elemzésére.

A (folytonos) Fourier transzformáció matematikailag az $s(t)$ jelnek az ω frekvencia változó szerinti felbontását jelenti:

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot e^{-j\omega t} dt. \quad (4.2)$$

A wavelet transzformáció alapformulája pedig a következő:

$$S(b,a) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt. \quad (4.3)$$

A „működési elve” a következőképpen szemléltethető. Legyen először az a érték állandó; ekkor a képlettel számított érték a wavelet időbeli eltolásaival „kapcsolat erősségét”, hasonlóságának fokát méri. Ha az adott időpontba eltolva a waveletet ott a jelrészlet hasonlít rá, akkor nagy lesz a wavelet transzformált értéke. Legyen most a b érték (vagyis a vizsgált időpont) állandó. Ha az a értékét változtatjuk, akkor a wavelet nyújtott illetve összenyomott változataival való hasonlóságot mutatja ki a wavelet transzformált a b időpont körüli jelrészletben. Végeredményben a jelünkről kétdimenziós (b, a) leírás keletkezik. Az a értéket skálának is nevezzük, és a módszer szemléletesen egyfajta „jelmikroszkóp”-nak is felfogható. A konvolúció fogalmának a felhasználásával is megadhatjuk a wavelet transzformáció alapösszefüggését. Jelölje

$$\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right) \quad (4.4)$$

akkor a (4.3) képlet alapján és a konvolúció definíciójából közvetlenül adódik a wavelet transzformációra a következő összefüggés:

$$S(b,a) = s * \psi_a \quad (4.5)$$

ahol ' * ' a konvolúcióképzés jele.

A (4.5) összefüggés előnye, hogy megadja a wavelet transzformáció kiszámításának egy további módját:

$$S(a, b) = F^{-1} [F(s) F(\psi_a)] \quad (4.6)$$

ahol $F(\cdot)$ jelöli a Fourier transzformáció (4.2) műveletét, $F^{-1}(\cdot)$ pedig annak inverzét.

Természetesen a wavelet transzformáció is rendelkezik a Fourier transzformációnál megszokott megfordíthatósággal, invertálhatósággal:

$$s(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} S(b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{db da}{a^2} \quad (4.7)$$

ahol

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F[\psi(\omega)]|^2}{\omega} d\omega.$$

4.3 A diszkrét wavelet transzformáció

A gyakorlatban a (4.7) összefüggés integráljait diszkrét összegekkel közelítjük. Ez a diszkrét wavelet transzformáció (DWT). Daubechies (1988) vezette be a következő diszkrétizációt:

$$a = a_0^m \text{ és } b = nb_0 a_0^m \quad \text{ahol } m, n \in \mathbb{Z} \text{ és } a_0 > 1, b_0 > 0$$

adott számok.

Ekkor a diszkrét wavelet felbontás alakja a következő:

$$s(t) = \sum \sum c_{m,n} \psi_{m,n}(t) \quad (4.8)$$

ahol $\psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} t - nb_0)$, az ún. *skálázó függvény*.

Ha $a_0 = 2$, azaz a skálatényező értékei a 2 egész hatványai és ha ezen kívül még $b_0 = 1$ is fennáll, tehát az időbeli eltolás értékei egész számok, akkor az ún. *diszkrét diadikus* wavelet transzformációhoz jutunk. Ez esetben a skálázó függvény $\psi_{m,n}(t) = 2^{-m/2} \psi(2^{-m} t - n)$ és létezik olyan ortonormális bázis, amelyre

$$c_{m,n} = \int s(t) \psi_{m,n}(t) dt. \quad (4.9)$$

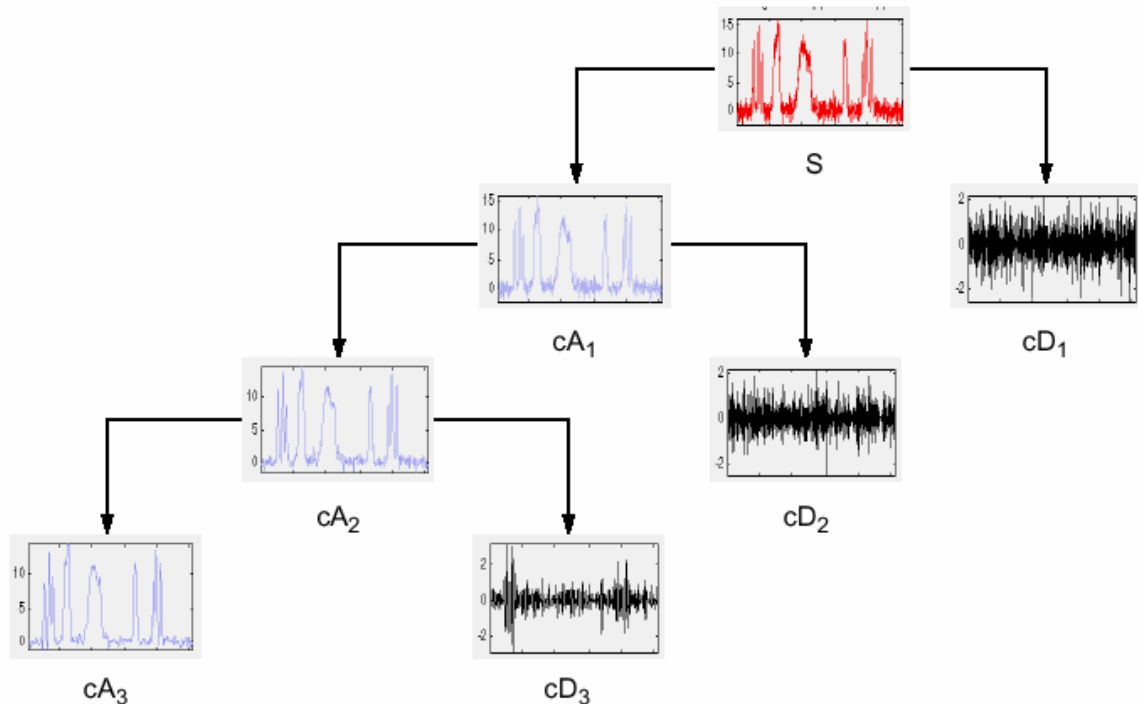
Daubechies (1988) szerkesztett egy, az előző feltételeknek megfelelő ortonormális bázist úgy, hogy nem adta meg expliciten a $\psi_{m,n}(t)$ függvényeket, hanem megadott két szűrőegyüttható sorozatot. Ezek a sorozatok az anya waveletet is és a skálázó függvényeket is egyértelműen meghatározzák:

$$A := \{a_k\}_{k=1}^{2M} \quad D := \{d_k\}_{k=1}^{2M} \quad k = 1, \dots, 2M,$$

ahol M jelentése az, hogy a $\psi(t)$ függvény M -edik momentumának eltűnését követeljük meg.

Az $\{A, D\}$ együttható sorozatokat kettős tükröz szűrőnek nevezzük, ahol az A szűrő úgy hat, mint egy integrátor (aluláteresztő szűrő), D szűrő hatása pedig olyan, mint egy differenciátor (feluláteresztő szűrő).

A DWT esetén az alapl művelet a szűrővel való lineáris konvolúciót követő 2-vel való decimáció (minden második minta elhagyása). Ezen felül a számítás hierarchikusan történik: ha egy skálával végeztünk, a következőn az előző eredményét használjuk fel. Egy skálán történő elemzés kétféle jelet ad: egy közelítő jelet és egy, a részleteket tartalmazó jelet. A következő skálán az előzőn kapott közelítő jelet bontjuk tovább. A kapott hierarchikus felbontás-sorozat miatt a módszert *többsfelbontású elemzésnek* is nevezzük (*multiresolution analysis*).



Láthatóak az eredeti S jel különböző szintekhez tartozó $cA_1, cA_2, \dots$, egyre jobban közelítő approximációi (A=average vagy approximation) és az adott szintekhez tartozó $cD_1, cD_2, \dots$ részlet (D=detail) jelek.

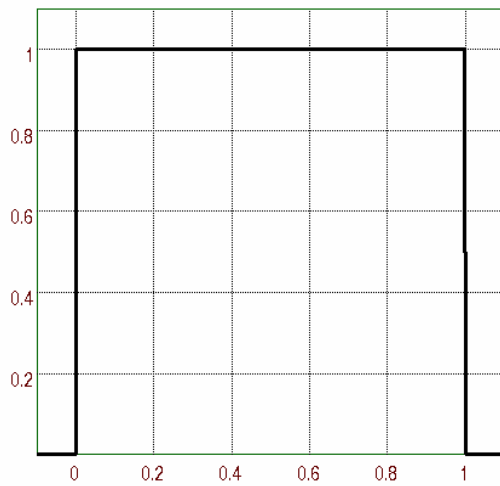
A wavelet transzformáció két *dimenziós* változatát a két dimenziós Fourier transzformációhoz hasonlóan lehet végrehajtani. Egy mátrix formában adott adatrendszer (pl. kép) 2D wavelet transzformációját úgy kapjuk, hogy először alkalmazzuk az egy dimenziós wavelet transzformációt a mátrix valamennyi sorára, azt követően pedig az eredményül kapott mátrix minden oszlopára. Minden transzformációs lépés egy ortogonális mátrixszal való szorzásnak felel meg, ezért az ortogonális mátrixok szorzásának asszociativitása miatt a végeredmény független a transzformációk végrehajtásának sorrendjétől.

A wavelet transzformáció hasznos tulajdonsága, hogy a wavelet transzformáció eredményeül kapott együtthatókat egyszerűen csonkítani lehet anélkül, hogy az eredeti adatrendszer lényeges torzulást szenvedne. A Fourier transzformációnál a helyzet éppen ellenkező.

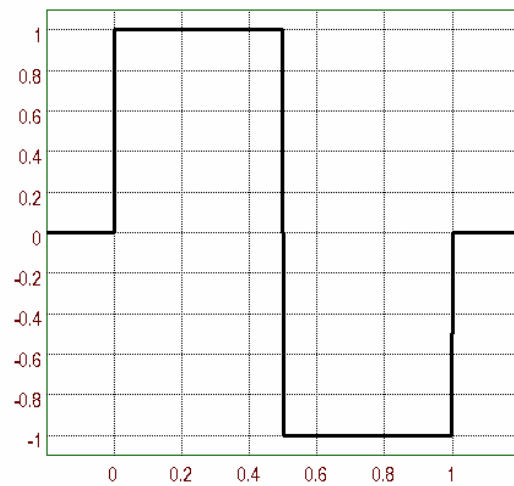
4.4 A Haar wavelet transzformáció

A fentebb mondottak illusztrálása és jobb megértése céljából most bemutatjuk a lehető legegyszerűbb wavelet, a Haar Alfréd-től (1909) származó Haar wavelettel történő DWT lépéseit. Egyben alkalmazzuk a bemutatott eljárás két dimenziós változatát képtömörítésre is.

A Haar wavelet és skálázó függvénye az alábbi ábrákon láthatók.



Haar skálázó függvény



Haar wavelet

A Haar wavelettel egy n elemű adatvektoron végzett diszkrét wavelet transzformáció algoritmusá igen egyszerű:

1. Számítsuk ki minden mintapár átlagát ($n/2$ átlag)
2. Állítsuk elő minden mintapár átlagának és azoknak a mintáknak a különbségét, amelyekből az átlagot kiszámítottuk ($n/2$ különbség)
3. Töltsük fel a tömb első felét az átlagokkal
4. Töltsük fel a tömb második felét a különbségekkel
5. Ismételjük meg az 1-4. lépéseket a tömb első felével
(A tömb elemszáma kettőnek valamelyik hatványa legyen)

Szám példa

nyolc elemű adattömb:

7 1 6 6 3 -5 4 2

átlagok:

$$(7 + 1) / 2 = 4$$

$$(6 + 6) / 2 = 6$$

$$(3 - 5) / 2 = -1$$

$$(4 + 2) / 2 = 3$$

különbségek:

$$(7 - 4) = (4 - 1) = 3$$

$$(6 - 6) = (6 - 6) = 0$$

$$(3 - (-1)) = (-1 - (-5)) = 4$$

$$(4 - 3) = (3 - 2) = 1$$

eredmény az 1. lépés után:

4 6 -1 3 3 0 4 1

...

végeredmény a 3. lépés után:

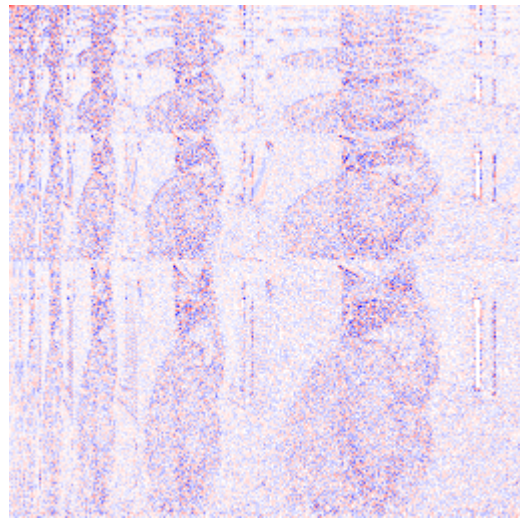
3 2 -1 -2 3 0 4 1

Képtömörítés Haar wavelettel

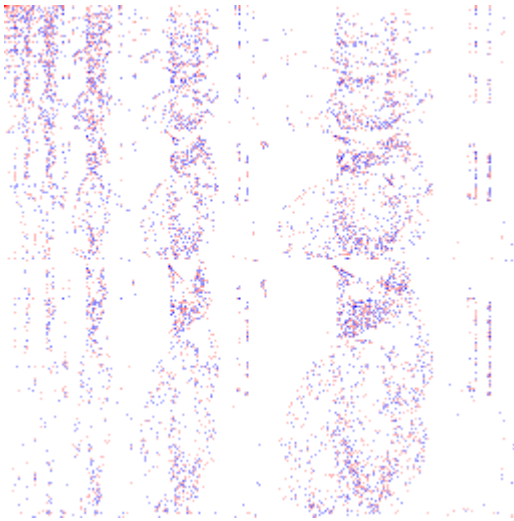
A 2D Haar DWT alkalmas veszteséges képtömörítésre. Ezt illusztrálják az alábbi ábrák:



1. eredeti kép



2. Haar DWT együtthatók



3. küszöbértéket meghaladó együtthatók



4. tömörített kép

A 10% legnagyobb amplitúdójú wavelet együtthatókat megtartva tömörített kép keletkezik. Látszik, hogy a rekonstruált kép zavaró téglalap formájú mesterséges képződményeket tartalmaz, amelyek a Haar waveletek felhasználása miatt keletkeznek. Fejlettebb waveleteket használva ezek a mesterséges képződmények sokkal kevésbé zavaróak vagy szinte nem is láthatók.

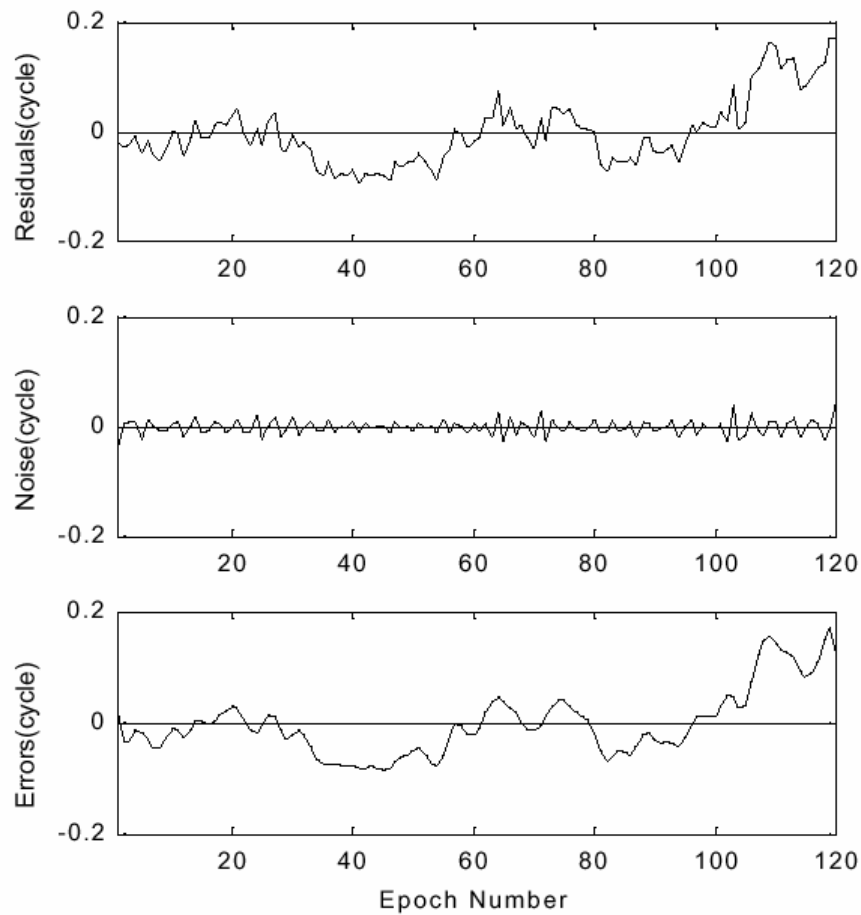
Feladat

Írjunk eljárást a fenti képtömörítési algoritmus megvalósítására.

4.5 A wavelet transzformáció alkalmazása idősorok elemzésére

A wavelet transzformáció alkalmazására kiváló példa az idősorok analízise. A wavelet analízis segítségével egy idősoron belüli változások jól nyomon követhetők. A geodéziában ilyen adatsorok lehetnek a GPS mérési eredmények (pl. redukált kódtávolságok, kettős különbségek), deformáció monitoring eredmények, stb.

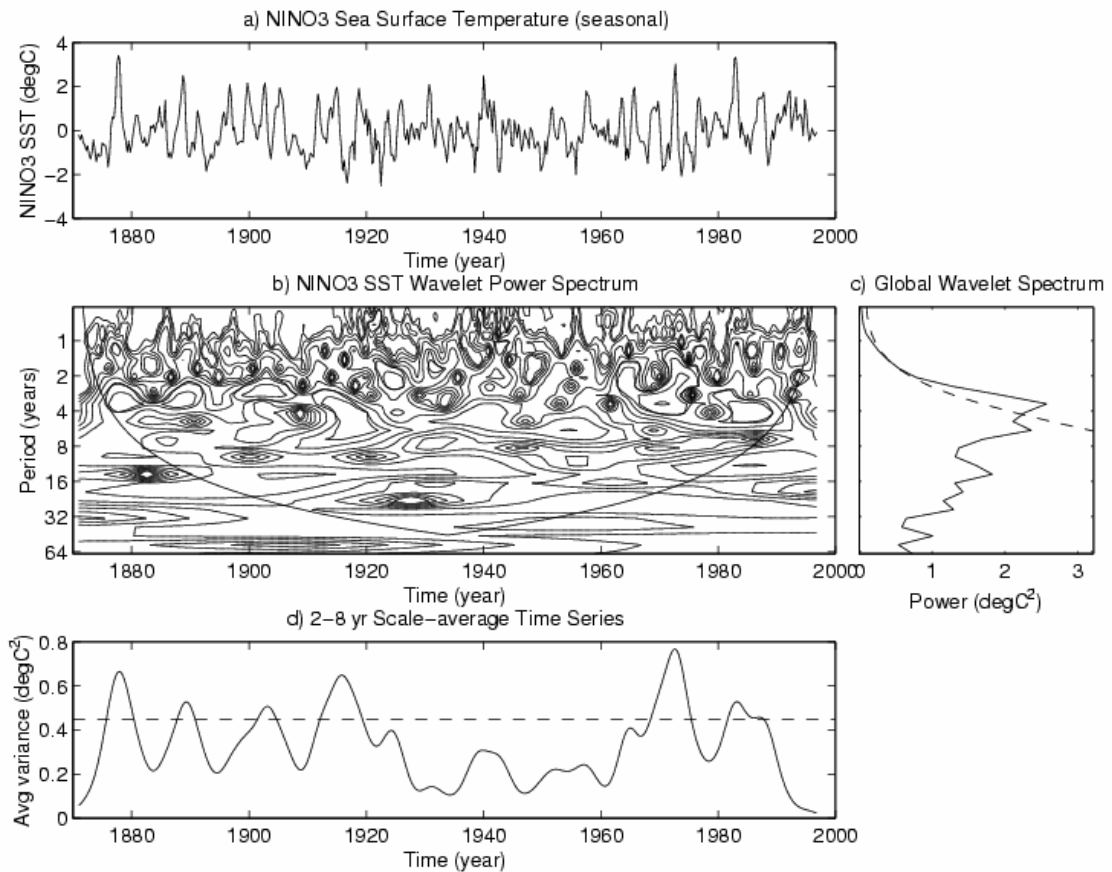
A GPS mérések wavelet analízisére példaként említjük a Satirapod et. al (2001) által végzett vizsgálatokat a kettős különbségek elemzésére. A wavelet analízis eredményeként leválasztották a zaj komponenst és megkapták a szabályos komponens értékét, amivel a GPS mérések korrigálhatók. Az eredmények megmutatták, hogy javult a fázis-többértelműség feloldása és a becsült bázisvonal összetevők pontossága.



GPS ciklushibák szabályos részének detektálása waveletek segítségével. Felül: eredeti kettős különbség maradékok. Középen: detektált zaj összetevő. Lent: szabályos rész

Végül egy óceán- és légkörkutatóban ismertté vált példát mutatunk be C. Torrence és G.P. Compo (1998) nyomán.

Ez az idősor a Niño3 tengerfelszín hőmérséklet anomália (SST), amely az El Niño – Southern Oscillation Index (ENSO) mértékeként szolgál. A Niño3 SST index az évszakos átlagos SST a közép Csendes-óceán fölött. Az adatok 1871-1997 között álltak rendelkezésre és az alábbi ábrán láthatók, a wavelet transzformáció eredményeivel együtt.



a) A wavelet analízishez használt Niño SST adatsor. b) az a) idősor wavelet spektruma a Morlet wavelet alkalmazásával. Az ábra bal oldali tengelye a Fourier periódust tartalmazza év egységben, az alsó tengelyen az idő található. c) a globális wavelet spektrum, amely egy közel 4 éves átlagos El Niño periodicitást jelez. A szaggatott vonal a 95%-os konfidenciaszintet mutatja. d) skála-átlagolt wavelet spektrum a legjelentősebb 2-8 éves periódusokra. A szaggatott vonal itt is a 95%-os konfidenciaszintet mutatja. Jól látható az 1920-1960 közötti alacsony ENSO variancia.

5 Idősorok analízise

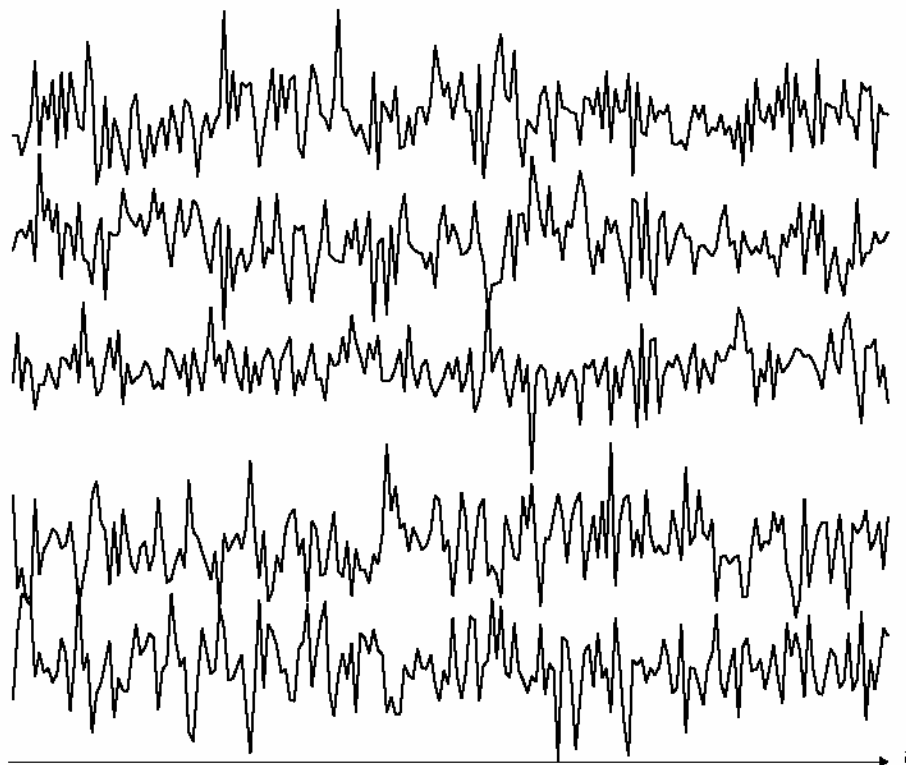
5.1 Sztochasztikus folyamatok, idősorok, stacionaritás

A geodézia utóbbi évtizedekben bekövetkezett fejlődése következtében új mérés feldolgozási feladatok jelentkeztek. Az új feladatok közös jellemzője, hogy az azokban előforduló mérési eredmények a véletlenül kívül egy vagy több folyamatosan változó fizikai mennyiségtől is függenek. Példaként említhetjük a következő feladatokat, ahol zárójelben azt a mennyiséget tüntettük fel, amelyektől való függést a mérési eredmények feldolgozásakor a leginkább figyelembe veszik:

- GPS-szel végzett helymeghatározás (idő)
- nehézségi gyorsulás mérés (hely)
- mérnöki szerkezetek mozgásvizsgálata (idő)
- digitális képfeldolgozás (hely)

Mivel azok a mennyiségek, amelyektől a mérési eredmények függenek, folyamatosan változnak, magukat a mérési eredményeket is folyamatosan változónak tekinthetjük. Az ilyen mérési eredményeket matematikailag *sztochasztikus folyamattal* jellemezhetjük.

Ha a sztochasztikus folyamatot jellemző $x(\omega, t)$ függvény ω változóját rögzítjük, és t befutja a T halmazt (értelmezési tartomány), akkor egy valós függvényt kapunk, amelyet a sztochasztikus folyamat *realizációjának* nevezünk. Egy realizáció a folyamat egy konkrét lefutását jellemzi. Ha a t időváltozó és diszkrét $t = n\Delta t$ időpontokhoz tartoznak a méréseink, akkor az $x_1, x_2, \dots, x_n$ sorozatot *idősornak* is szokás nevezni. A diszkrét n index jelöli azt az időpontot, amelyre a mérésünk vonatkozik, valamely kezdő időponthoz képest; ez esetben nyilvánvalóan egyenletes Δt időközönként történt a mintavételezés. Nyilvánvalóan hasonlóan kezelhetjük azt az esetet, amikor nem az idő, hanem a hely függvényében történik a mintavételezés. Ideális esetben gyakran feltételezzük azt, hogy az idősor végtelen kiterjedésű, akár mindkét irányban.



Egy sztochasztikus folyamat öt különböző realizációja

Még diszkrét időváltozó esetében is egy általános sztochasztikus folyamat rendkívül összetett dolog. A teljes jellemzéséhez meg kell adnunk minden x_n elemének az összes többi elemével

vett együttes valószínűség eloszlás függvényét. A legegyszerűbb eset a Gauss-féle modell. Ha N adatunk van, akkor az együttes valószínűség eloszlás függvénye jellemzéséhez ez esetben $\frac{1}{2}N(N+3)$ paraméterre van szükségünk, vagyis valószínűleg sokkal többre, mint ahány mérési eredménnyel rendelkezünk. Például ha egy 50 elemű rövid idősorunk van, akkor 1325 paraméter lenne szükséges; egy ésszerűen hosszú 2000 elemű adatsor esetében több mint 2 millió a paraméterek száma. Ez a helyzet a legegyszerűbb, Gauss-féle modell esetében, és akkor még nem beszéltünk a folytonos időváltozó esetéről.

Mivel a teljesen általános sztochasztikus folyamat túl általános ahhoz, hogy használható legyen, ezért szokásos a sztochasztikus folyamatok egy sokkal korlátozottabb csoportjával foglalkozni: a *stacionárius folyamatokkal*. Ennek az elképzelésnek az a lényege, hogy míg a mérések természetesen az idő függvényében változnak, az *alapul szolgáló statisztikai jellemzésük idő invariáns*. Ezen a szigorú feltételen egy kicsit enyhíthetünk, de a továbbiakban kizárólag ilyen teljesen stacionárius folyamatokkal fogunk foglalkozni. Ennek az az eredménye, hogy a szükséges paraméterek számát kezelhető mértékűre lehet csökkenteni. Például egy stacionárius folyamat átlaga,

$$E\{x_n\} = \bar{x} \quad (5.1)$$

n -től vagy t -től nem függő állandó. Gyakran feltesszük, hogy a folyamat átlaga zérus, mivel triviális dolog később ismét hozzáadni az átlagot az adatokhoz, ha szükséges. Természetesen sok mérési sorozat nem úgy néz ki, hogy az átlag konstans – lehet az adatoknak valamilyen *trendje*. A stacionaritás annyira hasznos tulajdonság, hogy gyakran egy nyilvánvalóan nemstacionárius sorozatot stacionáriussá teszünk egy egyenes vagy trend illesztéssel, vagy azzal, hogy a sorozat elemeinek különbségeit képezzük:

$$y_n = x_{n+1} - x_n \quad (5.2)$$

Idézzük fel egyetlen valószínűségi változóra a variancia definícióját

$$\sigma_x^2 = \text{var}[x_n] = E\{(x_n - \bar{x})^2\}. \quad (5.3)$$

Ha a folyamat stacionárius, akkor ez az érték is független n -től (vagy t -től). Továbbá, az idősorban levő bármely két valószínűségi változó közti kovariancia sem lehet függvénye annak, hogy hol járunk éppen a sorozaton belül, ezért

$$\text{cov}[x_m, x_n] = E\{(x_m - \bar{x})(x_n - \bar{x})\} = R_x(m - n), \quad (5.4)$$

vagyis az R_x a két pont közötti intervallum függvénye. Az R_x függvény az *autokovariancia*. Folytonos t változójú sztochasztikus folyamatokra ez a következő lesz:

$$\text{cov}[x(t), x(t + \tau)] = R_x(\tau), \quad (5.5)$$

ahol τ a *késleltetés* (eltolás). Definíció szerint $R_x(0) = \sigma_x^2$. Azt is vegyük észre, hogy $s = t - \tau$ -t behelyettesítve (5.5)-be az eredmény ugyanaz lesz, tehát független attól, hogy melyik időpontot választjuk ki. Ebből következően $R_x(-\tau) = R_x(\tau)$, ami jelzi azt, hogy az autokovariancia függvény páros függvénye a késleltetésnek.

Fontos megérteni azt, hogy pusztán csak azért, mert a sztochasztikus folyamatot valószínűségi változók alkotják, még nem teljesen előrejelezhetetlen. Idézzük fel két valószínűségi változó korrelációs együtthatóját:

$$r_{xy} = \frac{\text{cov}[x, y]}{\sqrt{\text{var}[x]\text{var}[y]}}. \quad (5.6)$$

Ezek után (5.5)-ből megkapjuk a sorozat bármely két pontja közötti korrelációs együtthatót folytonos esetben:

$$r(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{\sigma_x^2}. \quad (5.7)$$

A diszkrét esetben hasonló eredményre jutunk. Ezt a függvényt nevezzük *autokorreláció* függvénynek. Következésképpen, ha csak az autokovariancia függvény nem zérus valamely τ késleltetésre, előrejelezhetünk valamilyen $x(t + \tau)$ értéket a folyamatról a t -beli értékből kiindulva, mivel korreláltak.

Az eddigiekben csak a folyamat átlagát és az $(x(t_1) - x)(x(t_2) - x)$ szorzatok átlagait számítottuk. Az ilyen átlagokat a folyamat *momentumainak* nevezzük. Másodrendű momentumok csak a variancia és az autokovariancia függvény. Magasabbrendű momentumok szintén definiálhatók ehhez hasonlóan, viszont ha a folyamat Gauss-féle eloszlásfüggvénnyel rendelkezik, akkor a folyamatról minden információt tartalmaznak a másodrendű momentumok és a magasabbrendűek ezekből számíthatók. Még ha a folyamat nem is Gauss-féle, akkor is sokat megtudunk róla annak másodrendű momentumaiból, ezért a magasabbrendű momentumokat ritkán vizsgálják meg.

5.2 Fehérzaj és színezett zaj

Most nézzünk néhány konkrét példát stacionárius sztochasztikus folyamatokra. A legegyszerűbb (habár mesterséges) példa a *fehérzaj*. Ez definíció szerint egy olyan sztochasztikus folyamat, amelyben a valószínűségi változó bármely pontban független bármely másik ponttól. Szokásos azt is feltételezni, hogy a zaj átlagértéke zérus. A diszkrét esetben

$$R_W(n) = \sigma_0^2 \delta_{n0}, \quad (5.8)$$

ahol δ_{jk} a Kronecker-féle delta szimbólum. Ennélfogva ez esetben a sztochasztikus folyamat oly mértékben előrejelezhetetlen, hogy semmit nem tudunk mondani a következő értékekről az előző értékek ismeretében. Az eredmények mégsem teljesen előrejelezhetetlenek, mivel az ismert σ_0^2 variancia miatt mondhatunk valamit az értékek várható nagyságáról.

A folytonos változójú sztochasztikus folyamatok esetében kiderül az, hogy a fehérzaj szinguláris, mivel a variancia bármely pontban végtelen kell, hogy legyen:

$$R_W(\tau) = s^2 \delta(\tau). \quad (5.9)$$

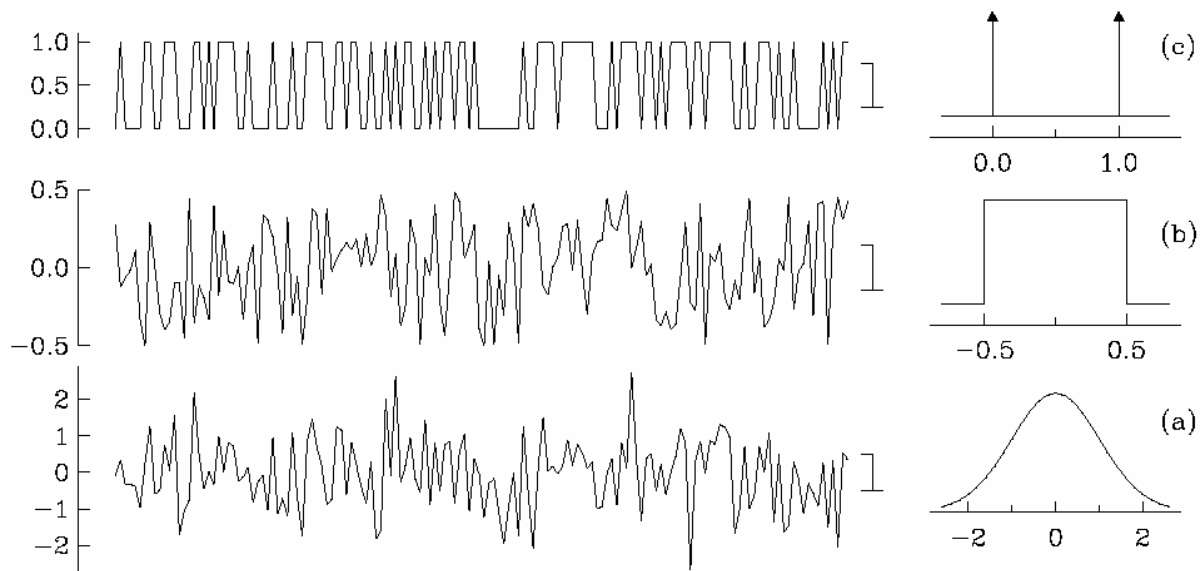
Ezek a definíciók azonban **nem** határozzák meg teljesen a sztochasztikus folyamatot. Bármely n (vagy t) időpontban x valamilyen valószínűség eloszlással rendelkező valószínűségi változó. Ez a valószínűség eloszlás függvény ugyanaz lesz minden t értékre, de eddig még nem határoztuk meg. Természetesen a leggyakrabban választás a normál (Gauss-féle) eloszlás, tehát

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma_0 \sqrt{2\pi}} e^{-1/2(x/\sigma_0)^2} \quad (5.10)$$

a valószínűség sűrűség függvény. A függetlenség miatt az együttes valószínűség eloszlás függvény a következő lesz:

$$\psi(x_1, x_2, x_3, \dots) = \psi(x_1) \cdot \psi(x_2) \cdot \psi(x_3) \cdot \dots \quad (5.11)$$

Ez természetesen normál eloszlású (Gauss-féle) fehérzaj, a következő ábra (a) részén található.



Háromféle fehérzaj

Bármely más eloszlásfüggvényt felvehetünk x_n -re; tételezzünk fel egyenletes eloszlást:

$$\Phi(x) = b^{-1} \text{box}(x/b) \quad (5.12)$$

ahol most a variancia $\text{var}[x] = b^2/12$. Ez egy másikatípusú fehérzaj és a fenti ábra (b) részén látható. Az együttes eloszlásfüggvényt ismét csak (5.11) adja a $\Phi(x)$ alkalmas megválasztásával.

Egy további véletlen fehérzaj sorozat az ábra (c) részén található ún. *véletlen távírójel*. Ez a jel ugrásszerűen változik két érték, mondjuk 0 és 1 között:

$$\Phi(x) = 1/2[\delta(x) + \delta(x-1)]. \quad (5.13)$$

Itt az átlagérték nem nulla, hanem fél, a variancia pedig egynegyed. A véletlen távírójelet azért használják például szeizmométerek vagy más műszerek kalibrációjához, mivel igen könnyű elektronikusan előállítani.

Ez a háromféle fehérzaj a szem számára világosan különbözik egymástól. Viszont figyelemre méltó az, ha ezeket ugyanakkora varianciára normalizáljuk és hanggá alakítjuk, akkor ugyanolyannak hangzanak – világos, hogy a fülünk nem rendelkezik túl jó valószínűség sűrűség függvény megkülönböztetéssel.

További egész sereg különböző sztochasztikus folyamatot kaphatunk a fehérzaj különböző szűrésével. Ezeket *színezett zajnak* is nevezik. Ha fehérzajt szűrünk, a központi határeloszlás tétele értelmében az eredmény közel normál (Gauss-féle) eloszlású lesz. Sokféle fizikai folyamatot ilyen eljárás eredményének tekinthetünk. Ennélfogva gyakran feltételezünk normál eloszlást egy jelben, és ilyeneket egészen gyakran tapasztalunk a méréseinkben is, bár nem minden esetben.

5.3 A folytonos Fourier-transzformáció (CFT)

A folytonos Fourier-transzformáció (CFT) és inverze az alábbi műveletek elvégzését jelenti az $f(t)$ függvényen és $F(\omega)$ transzformáltján:

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F\{f(t)\} \\ f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = F^{-1}\{F(\omega)\} \end{aligned} \quad (5.14)$$

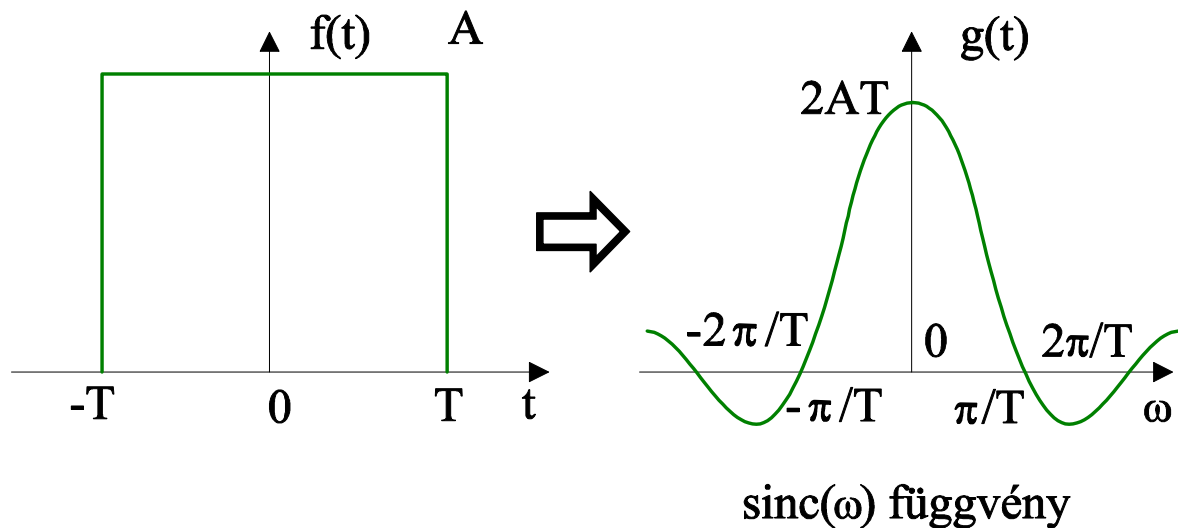
A Fourier transzformáció vesz egy valós függvényt és abból egy másik komplex értékű függvényt állít elő. Tehát az egyváltozós $F(\omega)$ transzformált függvénynek van valós és képzetes része. Úgy képzelhetjük el a transzformációt mint egy lineáris leképezést: bemegy egy függvény és kijön egy másik (komplex) függvény.

Mit jelent ez a transzformáció? A Fourier transzformáció (FT) egy komplex amplitúdó spektrumot állít elő, amelyik megmutatja, hogy mekkora amplitúdójú szinusz és koszinusz hullámok vannak a jelben minden egyes ω (kör)frekvencián. Ha a független változó nem idő-hanem térváltozó, akkor frekvencia helyett a *hullámszám* helyesebb elnevezés.

Ha az ω körfrekvencia helyett a ν frekvenciát használjuk, akkor az (5.14) transzformáció párt egy kicsit másképpen kell felírni:

$$\begin{aligned} F(\nu) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-2\pi i \nu t} dt = F\{f(t)\} \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu = F^{-1}\{F(\nu)\} \end{aligned} \quad (5.15)$$

A matematikusok az (5.14), a fizikusok inkább az (5.15)-öt részesítik előnyben.



Egy Fourier-transzformált pár

A FT fontos tulajdonságai közé tartozik a linearitás, azaz

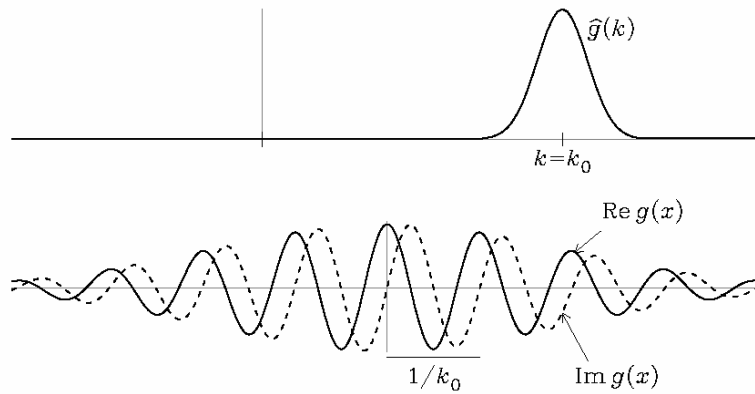
$$F\{af(t) + bg(t)\} = aF\{f(t)\} + bF\{g(t)\}, \quad (5.16)$$

ami szavakban megfogalmazva azt jelenti, hogy két függvény lineáris kombinációjának FT-je a függvények transzformáltjainak lineáris kombinációja.

További tulajdonsága a FT-nak az eltolás (fázis változás)

$$F\{f(t - t_0)\} = F\{f(t)\} e^{-2\pi i \nu t_0} \quad (5.17)$$

Az alábbi ábrán illusztráljuk az (5.17) eltolás tételét egy Gauss-féle eltolt haranggörbe inverz Fourier-transzformáltján:



Eltolt Gauss-görbe (inverz) Fourier transzformáltja

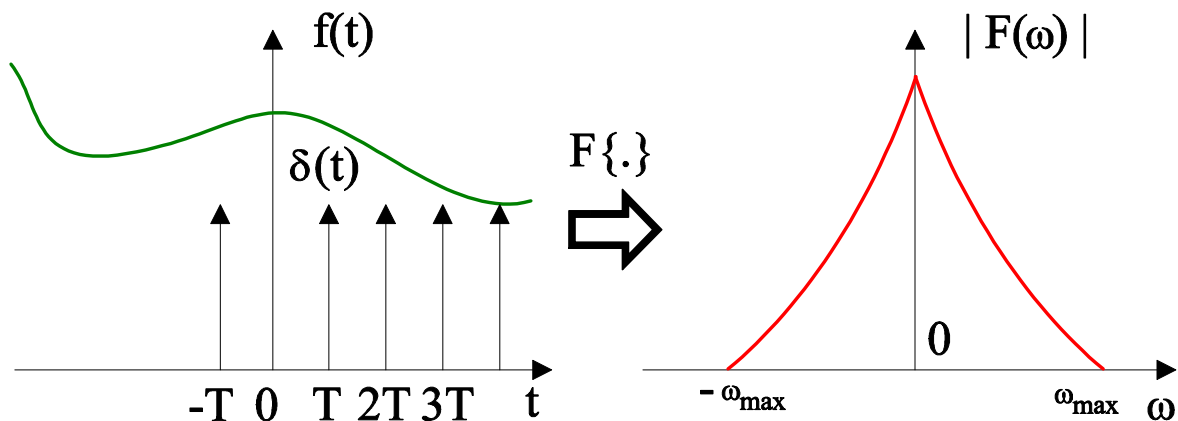
További hasznos tulajdonság a FT konvolúciótétele

$$F\{f(t) * g(t)\} = F\{f(t)\} F\{g(t)\} = F(v) G(v) \quad (5.18)$$

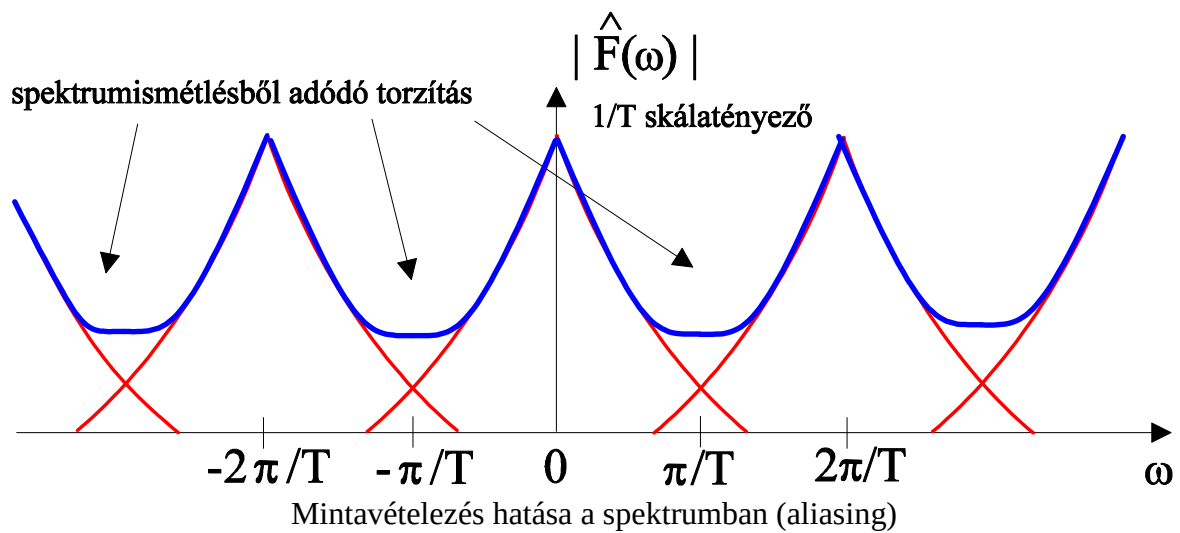
Szvakban megfogalmazva, a konvolúció FT-je a tényező függvények FT-inek direkt szorzata.

5.4 A diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)

A mintavételezés hatása impulzussorozattal való szorzásnak felel meg. Tehát a mintavételezett függvény Fourier-transzformáltja (az 'inverz' konvolúció tétel szerint) az eredeti folytonos függvénynek az impulzussorozat Fourier-transzformáltjával vett konvolúciója lesz.



Az impulzussorozat Fourier-transzformáltja maga is egy impulzussorozat, ezért az ezzel vett konvolúció azt jelenti, hogy a folytonos függvény transzformáltjainak (átskálázott) másolatait a mintavételezési (kör)frekvenciának megfelelő közönként egymás mellé helyezzük és összeadjuk.



Akkor nincsen spektrumismétlésből adódó torzítás (aliasing), ha

$$\omega_{\max} \leq \pi / T \quad (5.19)$$

másképpen

$$T_{\min} = \pi / \omega_{\max} . \quad (5.20)$$

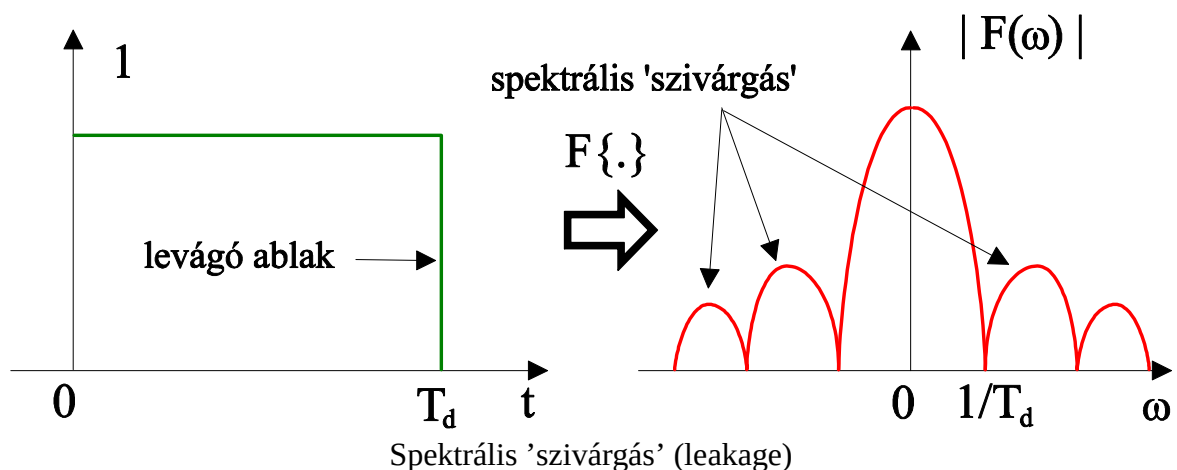
Ez az ún *Nyquist intervallum*, a neki megfelelő mintavételezési (kör)frekvencia pedig az $\omega_N = 2\pi / T_{\min}$.

Mintavételezési tétel

A mintavételezési frekvencia legalább kétszerese legyen a jelben előforduló legnagyobb frekvenciának. Ekkor $F(\omega)$ másolatai elkülönülnek, nincs spektrumismétlésből fakadó torzítás (aliasing) és elég a másolatokból egyet foglalkozni (ha azt T -vel átskálázzuk).

Véges jelsorozatok

A mintáink térben korlátozott kiterjedésűek – ez egy levágó ablak alkalmazásának felel meg.



Ennek következménye az ábrán látható spektrális 'szivárgás', ami zavaró felharmonikusok megjelenését jelenti a transzformált jelben.

N db. mintát veszünk mind az $-$ ből mind $-$ ből (mintavételezés).

$$\{f_n\}_{n=0}^{N-1} \quad \text{illetve} \quad \{F_k\}_{k=0}^{N-1}$$

Ekkor a *diszkrét Fourier transzformált pár (DFT)*:

$$\begin{aligned} F_k &= \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink\Delta\omega T} & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ f_n &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink\Delta\omega T} & n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \tag{5.21}$$

Ez N^2 db. komplex szorzást és $N(N-1)$ db. komplex összeadást igényel.

5.5 A diszkrét Fourier transzformáció számítógépes megvalósítása

A diszkrét Fourier transzformációt (DFT-t) megvalósító legtöbb szoftverben a DFT-t nem az (5.21) képlettel adják meg, hanem az alábbi összefüggésekkel:

$$\begin{aligned} F_k^c &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-i2\pi \frac{nk}{N}} & k &= 0, 1, \dots, N-1 \\ f_n^c &= \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{i2\pi \frac{nk}{N}} & n &= 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned} \quad (5.21)$$

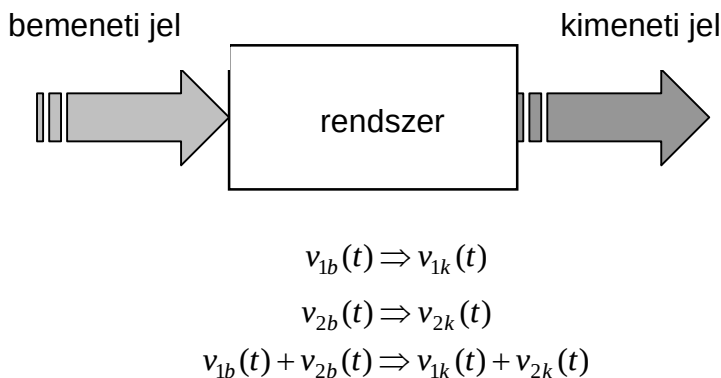
Ez a felírás azt jelenti, hogy a $T = \Delta t$ időintervallumot egységnek veszik és minden olyan paramétert, amelyik tőle függ, elhagynak. Ezenkívül az ω körfrekvencia helyett az f valódi frekvenciát használják, ezért jelentkezik a 2π szorzó. Az egységnek vett időintervallum miatt bizonyos esetekben a számítógéppel előállított transzformáltat még át kell skálázni T_0 -al, az alapintervallum hosszával. Hasonlóképpen kell eljárni a diszkrét konvolúció és korreláció számításánál is.

Egy másik figyelembe veendő pont a koordináta rendszer origójának kérdése. Általában ugyanis a számítógépes szoftverek a bal oldalról vett első pontot tekintik a koordináta rendszer kezdőpontjának mind az idő-, mind a frekvencia tartományban. Abban az esetben, ha nem ez a helyzet, például az adatsor közepét tekintjük az origónak, akkor a Fourier transzformáció (5.17)-es eltolási tételének megfelelő diszkrét változatát kell alkalmazni a számított spektrum korrekciója céljából.

Végül a spektrumismétlésből eredő további torzítás elkerülése érdekében arra is ügyelnünk kell, hogy a (periódikusnak tekintett) mintasorozat végén ne történjék mintavételezés. Mivel a DFT definíció szerint periódikus, a mintasorozat hiányzó végét tekintjük a következő mintasorozat elejének.

5.6 Digitális szűrők

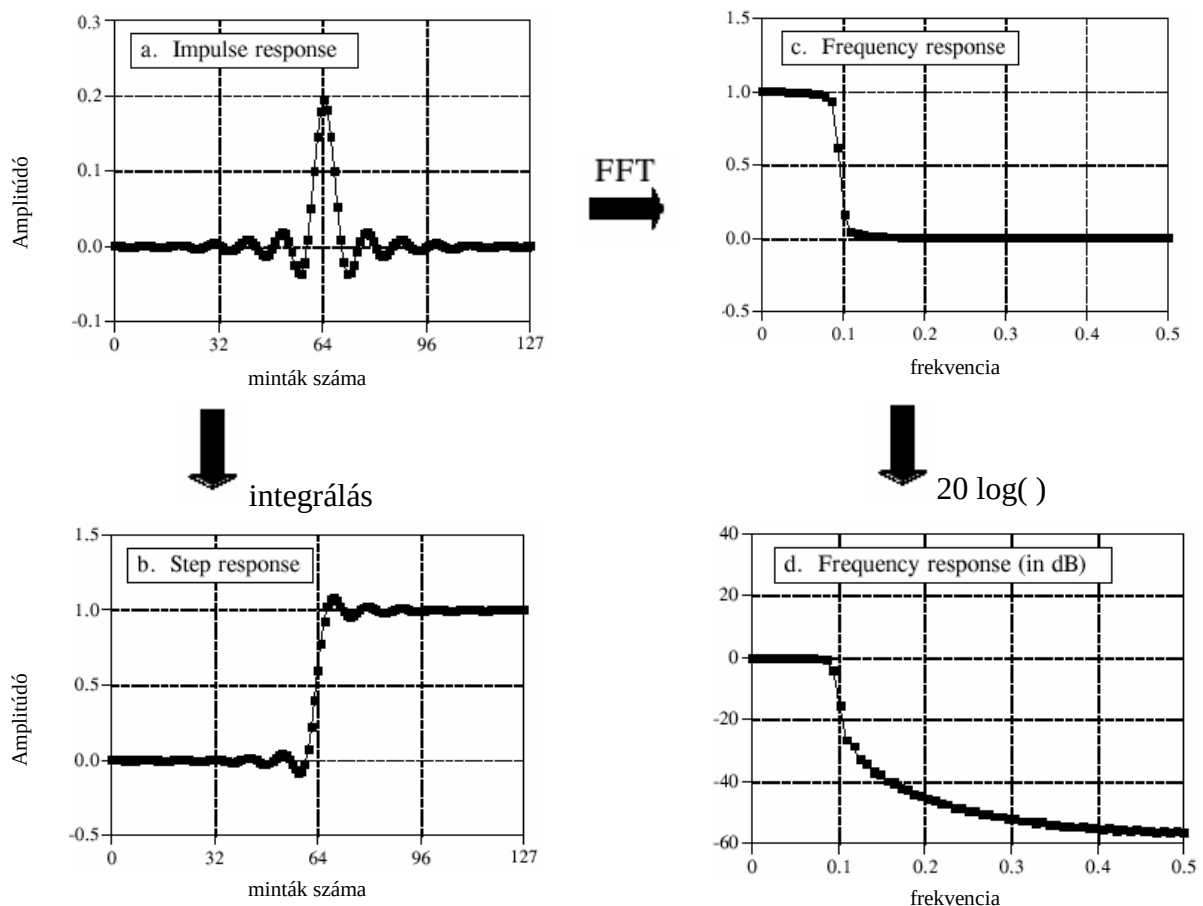
Egy szűrő voltaképpen egy lineáris rendszer. A lineáris rendszer bemeneti jelből, rendszerből, kimeneti jelből álló sémáját látjuk az alábbi ábrán. azokat a rendszereket tekintjük lineárisaknak, amelyekre érvényes a szuperpozíció, vagyis amelyeknél két bemeneti jel összege olyan kimenőjelet hoz létre, mely az egyes bemenőjelekhez tartozó kimenőjelek összege. Triviális esetként: n -szer akkora bemeneti jel n -szer akkora kimeneti jelet eredményez. Ezt fejezik ki az alábbi, könnyen átlátható összefüggések is (b - a bementre, k - a kimenetre utal):



A digitális szűrők a jelfeldolgozás, idősor analízis nagyon fontos részét alkotják. A digitális szűrőket két általános célra használják: (1) az egymással kombinált jelek *szétválasztására*, és (2) azoknak a jeleknek a *helyreállítására*, amelyek valamilyen módon torzulást szenvedtek. A

jelek szétválasztása akkor szükséges, amikor a jelet zavarok, interferencia, zaj vagy más jelek szennyezték be. A jelek helyreállítására pedig jeltorzulás esetében lehet szükség. Példaként hozhatjuk fel egy híd GPS-szel végzett mozgásvizsgálati méréseit. Ebben az esetben például szeretnénk a hídon áthaladó gépjárműforgalom által okozott mozgásokat és a híd hőmérsékletének változásából adódó deformációkat szétválasztani, és ezeket a jeleket külön-külön elemezni. Egy másik példa lehet egy fókuszálatlan, vagy éppen elmozdult kamerával készített életlen kép „kiélesítése”. Mindezek a feladatok megoldhatók digitális szűrők alkalmazásával.

Minden lineáris szűrő rendelkezik *impulzus*, *lépcsős* és *frekvencia* átviteli függvényvel. Ezeket szokták a szűrő impulzus- illetve frekvenciaválaszának is nevezni. Ezek ugyanúgy teljes információt adnak a lineáris szűrőről csak különböző formában.



Egy digitális szűrő legegyszerűbb megvalósítása az, hogy a bemenő jelet és az impulzus átviteli függvényt egymással konvolváljuk. Ha az impulzus átviteli függvényt ilyen speciális módon használjuk, akkor a szűrő *magfüggvényének* is szokták nevezni.

A digitális szűrők előállításának van egy másik módja is, amit *rekurzió*nak hívnak. Amikor a szűrőt konvolúcióval valósítják meg, akkor a kimeneti jelsorozat mindegyik elemét úgy számítják ki, hogy *súlyozzák* a bemeneti jelsorozat elemeit és összeadják őket. A rekurzív szűrők ennek az eljárásnak a kibővítését jelentik: a *bemeneti* jelsorozat elemein túl a *kimeneti* jelsorozat már kiszámított elemeit is felhasználják. A magfüggvény helyett ekkor a szűrő *rekurziós együtthatóit* adják meg. Fontos megemlíteni azt, hogy minden lineáris szűrő rendelkezik impulzusválasszal, még akkor is, ha nem annak révén valósítják meg a szűrőt. Például egy rekurzív szűrő impulzusválasztát is megkaphatjuk úgy, hogy egy impulzust küldünk a szűrőre és megnézzük azt, hogy mi jön ki.

A rekurzív szűrők impulzus átviteli függvényei exponenciálisan csökkenő amplitúdójú szinuszhullámokból állnak. Elvben ez *végtelen hosszúvá* teszi az ilyen szűrők impulzus átviteli függvényeit. E miatt a tulajdonság miatt a rekurzív szűrőket nevezik *végtelen impulzusválaszú* (Infinite Impulse Response), azaz **IIR** szűrőknek. Ezzel összehasonlítva a

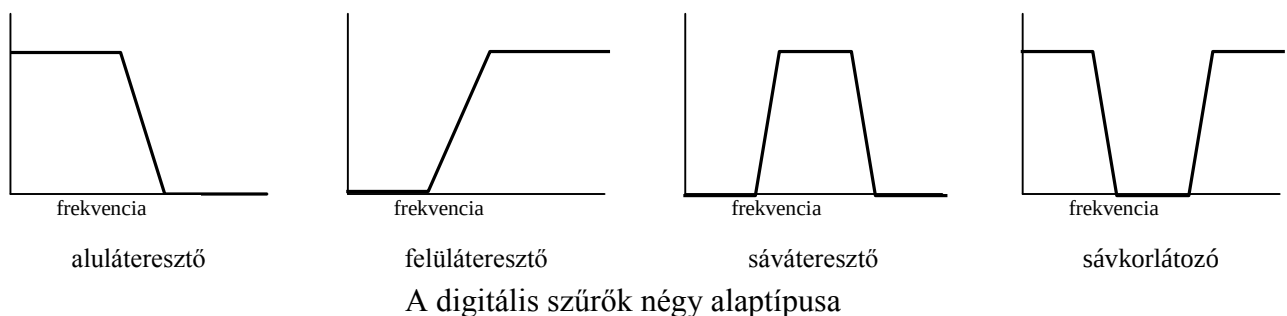
konvolúciós szűrőket *véges impulzusválaszú* (Finite Impulse Response), azaz **FIR** szűrőknek hívják.

Mint tudjuk egy rendszer kimenete a bemenő impulzusjelre az *impulzusválasz*. Hasonló módon a *lépcsős válasz* az a kimenet, amit a rendszer egy bemenő egységugrás függvényre (lépcsős függvény) ad válaszként. Mivel a lépcsős függvény az impulzusugrás integrálja, a lépcsős válaszfüggvény az impulzusválasz integrálja. A fentiek kétféle módszert adnak a lépcsős válasz meghatározására: (1) adjunk lépcsős függvényt a rendszer bemenetére és nézzük meg, hogy mi jön ki, vagy (2) integráljuk az impulzusválaszt. A matematikai korrektség kedvéért: *integrálást* alkalmazunk a folytonos jeleknél, de *diszkrét integrálást*, azaz mozgó összegzést a diszkrét jelek esetében.

A szűrő frekvencia átviteli függvényét az impulzusválasz DFT-jét kiszámítva kaphatjuk meg. A frekvencia átviteli függvényt (válaszfüggvényt) akár lineáris, akár logaritmikus tengellyel (decibelben) ábrázolhatjuk. A *bel* azt jelenti, hogy a teljesítmény tízszeres szorzó szerint változott meg. Például 3 bel teljesítmény növekedés $10 \times 10 \times 10 = 1000$ -szeres növekedést jelent a teljesítményben. A *decibel* (dB) a bel tizedrésze. Éppen ezért a -20dB, -10dB, 0dB, 10dB, 20dB értékek a következő teljesítmény arányokat jelentik: 0.01, 0.1, 1, 10 és 100.

A dolog hátulütője az, hogy általában a jel *amplitúdójával*, nem pedig a *teljesítményével* dolgozunk. Mivel az amplitúdó a teljesítmény négyzetgyökével arányos, ezért például az amplitúdóban 20dB csak tízszeres teljesítménynövekedést jelent (azaz itt 10dB), nem százszorost. Gyakran találkozhatunk még a -3dB jelöléssel is, ami a jel amplitúdójának 0,707-szeresére csökkenését jelzi, azaz a teljesítmény felére csökkent.

A szűrők frekvencia átviteli karakterisztikája szempontjából a digitális szűrők négyféle alapvető típusát különböztethetjük meg: *aluláteresztő*, *felüláteresztő*, *sáváteresztő* és *sávkorlátozó* szűrőket.



Mozgóátlag (MA, azaz FIR) szűrők

A mozgóátlag (Moving Average, MA) szűrők a legáltalánosabbak a digitális jelfeldolgozásban, mivel a legkönnyebben megérthető és használható szűrők. Egyszerűsége ellenére, a MA szűrők egy általánosan előforduló feladatra *optimálisak*: a véletlen zaj redukálására úgy, hogy közben megmarad a szűrő éles lépcsős válasza. Ez azért fontos, mivel ahhoz, hogy meg tudjuk különböztetni az idősorban az egymás melletti eseményeket, a lépcsős válaszfüggvény szélességének kisebbnek kell lennie mint az események közötti időtartam. Ez azt a követelményt diktálja, hogy a lépcsős átviteli függvénynek olyan *gyorsnak* kell lennie, amennyire az csak lehetséges. Ez a legideálisabb szűrő az információt az *időben* tartalmazó jelek számára. Az időbeli információt tartalmazó jelek esetében az időtartományban írjuk le az információt: mikor történt valami, illetve mi volt annak az amplitúdója. Ez az információ a jelben megérthető anélkül, hogy a jel más időpontokban felvett értékeivel foglalkoznunk kellene.

Ezzel szemben a mozgó átlag (MA) szűrő a legrosszabb választás az információt a *frekvencia* tartományban hordozó jelek számára, mivel alig képes az egyik frekvenciasávot a másiktól elválasztani. A frekvencia kódolt jelre példaként egy mechanikai rendszer rezgéseit említhetnénk. Erről a legtöbb információt sokszor a sajátrezgéseinek a frekvenciája adja. Ez

esetben egyetlen minta az idősorban önmagában számunkra semmilyen lényeges információt nem hordoz. Az információ tárolása sokkal közvetettebb: az idősor (jel) sok pontjában együttesen van elrejtve, azok egymáshoz való kapcsolatai révén.

Amint azt a neve is mutatja, a mozgó átlag szűrő a bemenő jel bizonyos számú pontjának az átlagolásával működik, és így állítja elő a kimeneti jel egymás utáni értékeit. Egyenlettel felírva

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j] \quad i = 0, 1, \dots, \quad (5.22)$$

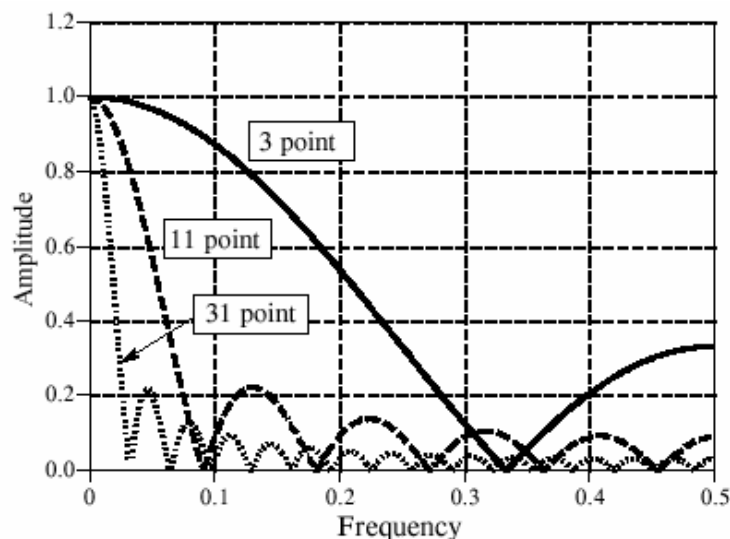
ahol $x[]$ a bemeneti, $y[]$ a kimeneti jel és M a mozgó átlagoláshoz felhasznált pontok száma. Ez az egyenlet csak a számítási ponthoz képest az egyik oldalon fekvő pontokat használja a bemenő jelből az átlag számításához. Alternatívaként olyan MA szűrőt is alkalmazhatunk, amelyik szimmetrikus, vagyis a bemenő jelnek a számítandó ponthoz képest mindkét oldalon levő értékeket felhasználja az átlag képzéséhez.

Vegyük észre, hogy az (5.22) mozgóátlag valójában egy nagyon egyszerű magfüggvénnyel számított diszkrét konvolúció. Például egy öt pontból álló szűrő esetében a szűrő magja (magfüggvénye: $\dots 0, 0, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 0, 0 \dots$). Azaz a mozgó átlag szűrő magfüggvénye egy egységnyi területű négyszögimpulzus.

Vizsgáljuk meg most a mozgó átlag szűrő impulzus átviteli függvényét. Ez matematikailag a négyszögimpulzus Fourier transzformáltja, azaz a sinc függvény abszolút értéke:

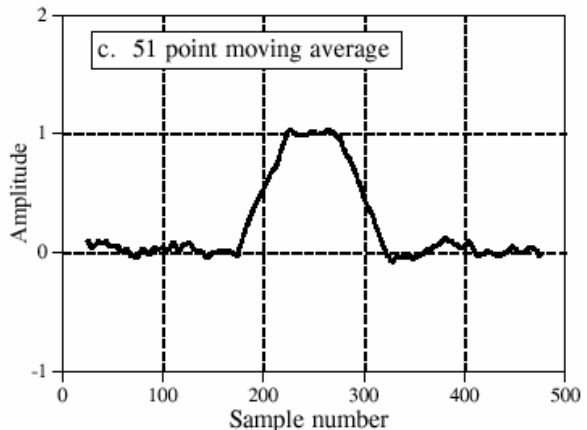
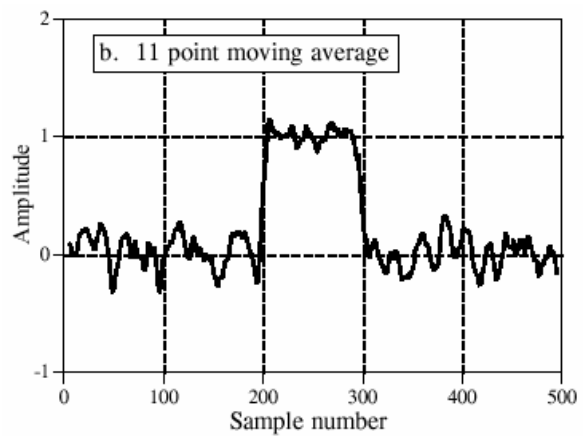
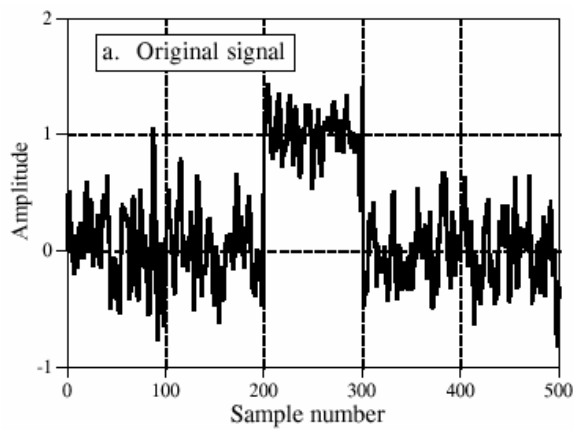
$$H[f] = \frac{\sin(\pi f M)}{M \sin(\pi f)} \quad (5.23)$$

Az f dimenziótlan frekvencia a Nyquist-tétel szerint 0 és 0.5 között változhat, ahogy az ábrán is látszik.



A mozgóátlag szűrők frekvencia átviteli függvénye. A MA-szűrők nagyon gyenge minőségű aluláteresztő szűrők, lassú levágással és gyenge elnyomási csillapítással.

A mozgóátlag szűrők ezzel szemben ideálisak a zajos idősorban „eltemetett” különböző jelek detektálására, így például az alábbi ábrán egy négyszögimpulzus kimutatására.



Egy példa a mozgóátlag (MA) szűrővel végzett zajsűrésre és jeldetektálásra. Az (a) ábrán egy négyszögimpulzus van eltemetve a zajban. Ezt a jelet egy 11 ill. 51 pontos MA szűrés után láthatjuk a (b) ill. (c) ábrán.

Amint azt az ábrán is láthatjuk, ahogy az átlagoláshoz használt pontok száma csökken, úgy csökken a zaj is; viszont az élek kevésbé lesznek élesek. A mozgóátlag szűrők *optimális* megoldást adnak erre a problémára, egy adott felfutási meredekség mellett a lehető legkisebb zajjal rendelkeznek.

A mozgóátlag szűrés rendkívüli előnye az, hogy egy olyan *rekurzív algoritmussal* végezhető, ami nagyon gyors. Hogy megértsük ezt az algoritmust, vegyünk egy $x[]$ input jelet és küldjük egy 7 pontos mozgó átlag szűrő bemenetére, hogy megkapjuk az $y[]$ kimenő jelet. Most nézzük meg azt, hogyan számítjuk ki két egymás melletti kimeneti jel értékét, mondjuk $y[50]$ -et és $y[51]$ -et:

$$y[50] = x[47] + x[48] + x[49] + x[50] + x[51] + x[52] + x[53]$$

$$y[51] = x[48] + x[49] + x[50] + x[51] + x[52] + x[53] + x[54]$$

Ez majdnem ugyanaz a két számítás; az $x[48]$ -től $x[53]$ -ig terjedő pontokat hozzá kell adni $y[50]$ -hez és $y[51]$ -hez is. Ha már $y[50]$ -et kiszámoltuk, $y[51]$ számításának a leghatékonyabb módja

$$y[51] = y[50] + x[54] - x[47].$$

Ha már megvan $y[51]$, akkor $y[52]$ -t $y[51]$ -ből ki tudjuk számítani, és így tovább. Tehát az első pont kiszámítása után a továbbiakat pontonként egy-egy összeadással és kivonással előállíthatjuk. Egyenlet formájában

$$y[i] = y[i-1] + x[i+p] - x[i-q],$$

ahol $p = (M - 1)/2$ és $q = p + 1$.

Figyeljük meg azt is, hogy ebben az egyenletben kétféle adatot használunk a számításban: a bemenet pontjait és a kimenet előzőleg kiszámolt pontjait. Ezt hívják *rekurzív* egyenletnek.

Rekurzív (AR, azaz IIR) szűrők

A rekurzív szűrők hatásosak hosszú impulzusválasz függvény előállítására anélkül, hogy hosszú konvolúciót kellene kiszámolni. Rendkívül gyorsak, viszont jellemzőikben és rugalmasságban elmaradnak más digitális szűrőktől. A rekurzív (AutoRegressive, AR) szűrőket más néven végtelen impulzusválasszal rendelkező (IIR) szűrőknek is hívják, mivel csökkenő exponenciális függvényekből állítható elő az impulzus átviteli függvényük. Ez megkülönbözteti őket a konvolúciós (más néven FIR) szűrőktől.

A rekurzív szűrést az alábbi általános összefüggés (a *rekurziós egyenlet*) szolgáltatja:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + a_3x[n-3] + \dots + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] + b_3y[n-3] + \dots \quad (5.24)$$

ahol az $a_1, a_2, \dots, b_1, b_2, \dots$ a szűrő (*rekurziós*) *együtthatók*. Figyeljük meg jól, hogy nincs b_0 együttható, mivel ez az éppen számítandó pontnak felel meg.

A rekurziós szűrők azért hasznosak, mert megkerülik a hosszú konvolúciót. Például amikor egy impulzusfüggvény áthalad a szűrőn, a kimenet tipikusan egy szinuszhullám lesz, amelyik exponenciálisan csökkenő. Lényegében az IIR szűrők a bemenő jelet konvolválják egy nagyon hosszú szűrő magfüggvénnyel, bár ehhez csak néhány együtthatóra van szükség.

A szűrő együtthatói és a szűrő impulzus átviteli függvénye közti matematikai kapcsolatot a **z-transzformáció** teremti meg. Például a z-transzformáció lehetőséget nyújt a rekurziós együtthatók és a frekvencia válasz közti átszámításra, sorba ill. párhuzamosan kapcsolt szűrők egyetlen szűrővé történő összekapcsolására, analóg szűrőket utánozó digitális szűrők tervezésére, stb.

Ugyanakkor egyszerű esetekben a z-transzformáció nélkül is tudunk rekurziós (IIR) szűrőket tervezni. Ilyenek például az ún. *egypólusú rekurzív szűrők*.

Az egypólusú *aluláteresztő* rekurzív szűrők összesen két együtthatóval rendelkeznek: a_0 és b_1 . Az egypólusú *felüláteresztő* rekurzív szűrők pedig hárommal: a_0, a_1 és b_1 . Ezeknek az egyszerű FIR szűrőknek a jellemzőit az x paraméter határozza meg, ami fizikailag az egyes minták közötti csökkenési ráta. Figyeljük meg, hogy ha x nagyobb egynél, akkor a szűrő instabil lesz. Az x paraméter értéke pedig a következő összefüggések szerint van kapcsolatban a szűrő együtthatókkal. Aluláteresztő szűrő esetében

$$a_0 = 1 - x$$

$$b_1 = x,$$

illetve felüláteresztő szűrő esetében

$$a_0 = (1 + x)/2$$

$$a_1 = -(1 + x)/2$$

$$b_1 = x.$$

Az x paraméter a szűrő d időállandójával is kapcsolatban van, a következő összefüggés szerint:

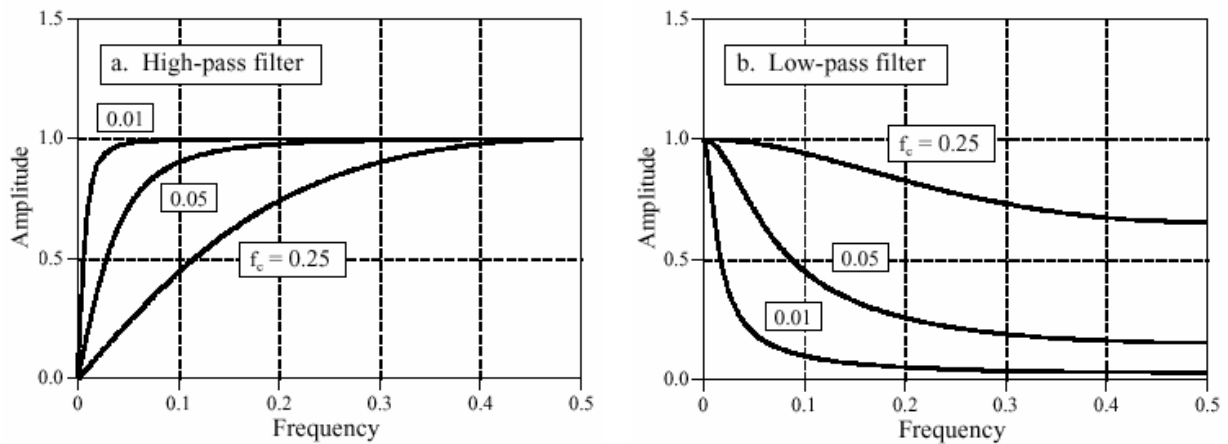
$$x = e^{-1/d}.$$

Ezen kívül rögzített kapcsolat van x és a -3dB -hez tartozó f_C *levágási frekvencia* között:

$$x = e^{-2\pi f_C}.$$

Ezzel már három összefüggésünk is van az „a” és „b” együtthatók meghatározására: (1) az időállandóból, (2) a levágási frekvenciából, illetve (3) x közvetlen megadásával.

A következő ábrák ezt a két egyszerű IIR szűrőt, annak frekvencia átviteli függvényeit mutatják különböző dimenziótlan f_c levágási frekvencia értékekre.



Egypólusú rekurziós szűrők frekvencia átviteli függvényei. A bal oldali ábrán (a) a felüláteresztő, a jobb oldalin (b) az aluláteresztő szűrő található.

A z-transzformáció

A rekurzív szűrők (5.24) összefüggését hatásosan lehet programozni. Viszont sokszor arra van szükség, hogy a bemeneti és kimeneti jel közötti matematikai kapcsolatot adjuk meg. Ahogy a folyamatos rendszereket *differenciálegyenletek* írják le, éppen így a rekurzív diszkrét rendszerek e szerint a *differencia* egyenlet szerint működnek. Ebből az összefüggésből levezethető a rendszer összes jellemzője: impulzusválasz, lépcsős válasz, frekvencia válasz, stb. Ehhez meg kell ismerkednünk azzal a matematikai technikával, amit z-transzformációnak neveznek.

Egy $x[n]$ sorozat *z-transzformáltja* matematikailag a következő összefüggéssel adható meg:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad (5.25)$$

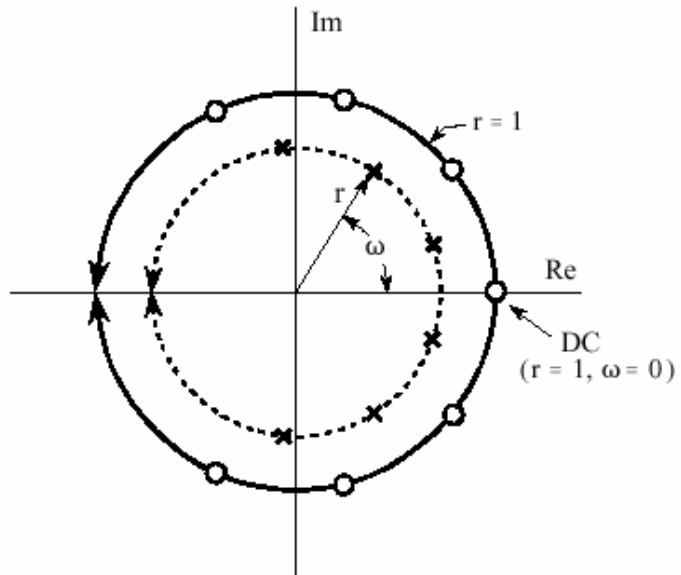
A z komplex változó és meghatározza a z -tartományt, amelyet például két poláris változóval, r -rel és ω -val írhatunk le a

$$z = r e^{-j\omega}$$

összefüggés szerint.

z – sík

A z-sík poláris koordinátákkal jellemezhető, r -rel és ω -val. Az origótól mért távolság r , az ω szög pedig a vízszintes tengely pozitív ágától mért szög. A pólusokat 'x', a zérusokat 'o' jelzi. A rekurzív rendszer instabil, ha a pólusai az $r = 1$ egységkörön kívülre esnek.



Azzal kezdjük, hogy az (5.24)-es egyenlet mindkét oldalának z-transzformáltját vesszük, azaz megvizsgáljuk, hogyan néz ki az egyenlet a z-síkon. Némi számítás után az összefüggést az $Y[z] / X[z]$ alakba írhatjuk át, azaz a kimeneti és bemeneti jelek z-transzformáltjainak a hányadosaként. Ezt nevezzük a *rendszer átviteli függvényének*, és $H[z]$ -vel jelöljük. Polinom alakban

$$H[z] = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \dots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \dots} \quad (5.26)$$

Látszik, hogy ha ismertek az IIR szűrő rekurziós együtthatói, akkor ebből közvetlenül felírható a rendszer átviteli függvénye. Ha már ismerjük az együtthatók számát, a negatív hatványkitevők eltüntethetők a számláló és nevező z-nek megfelelően magas ugyanazon hatványával való beszorzás révén.

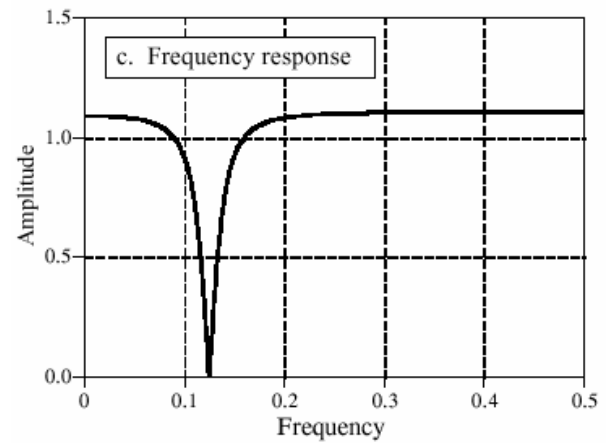
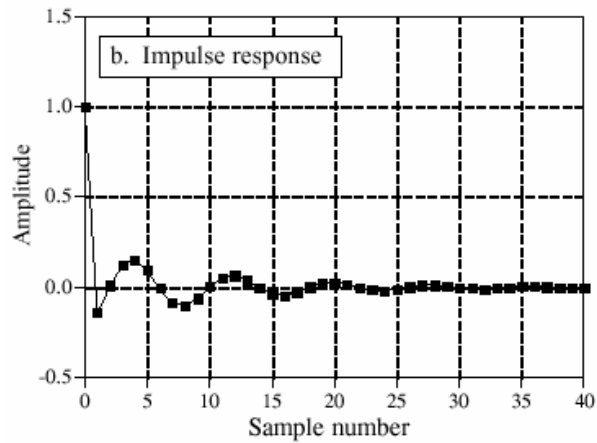
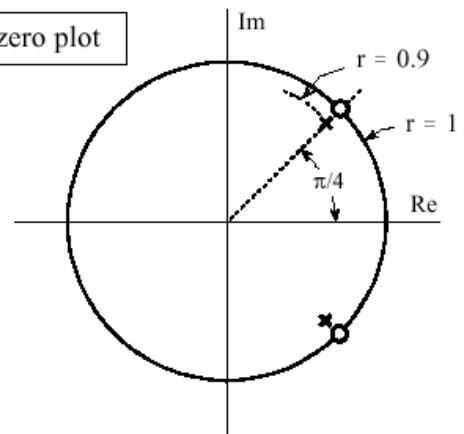
A z-síkon az átviteli függvény fontos jellemzői a *pólusok* és *zérusok*. Ez adja az átviteli függvénynek a második általános alakját:

$$H[z] = \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \dots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \dots} \quad (5.27)$$

Mindegyik $(p_1, p_2, p_3, \dots)$ pólus és $(z_1, z_2, z_3, \dots)$ zérus komplex szám. Általában a digitális IIR szűrő tervezése ezekből a pólusokból és zérusokból indul ki és végül előállítják a megfelelő rekurziós együtthatókat. Például az alábbi ábrán látható pólus-zérus ábrának megfelelő IIR szűrő impulzus és frekvencia válasza.

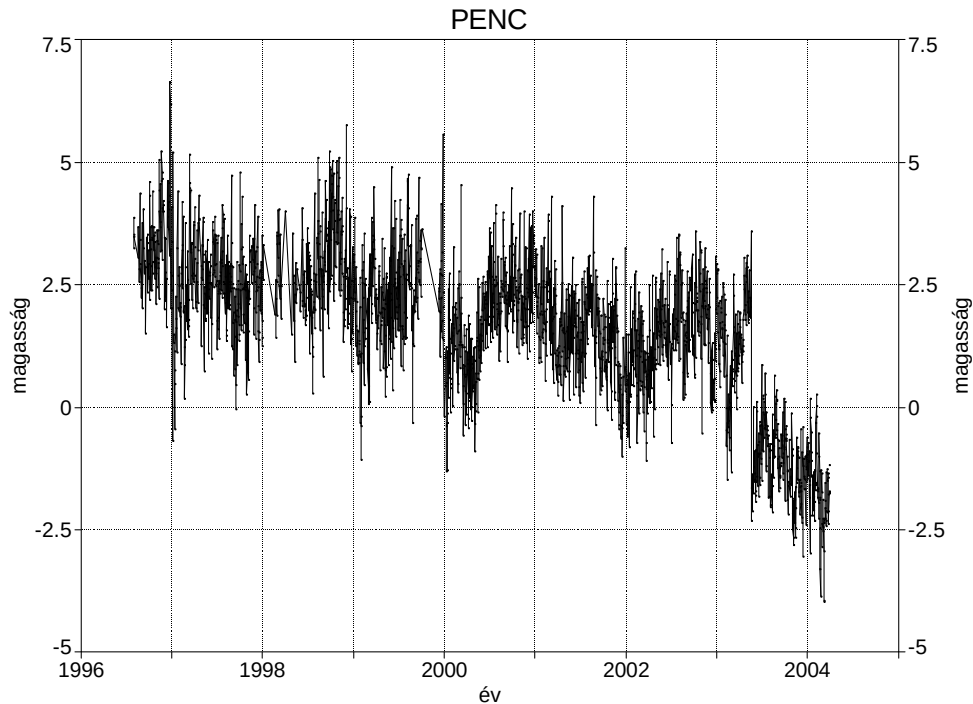
Példa a pólus-zérus ábrával történő IIR szűrő tervezésre. A tervezés a z-síkban két-két pólus és zérushely megtervezésével kezdődik (a). Ezután a szűrő impulzus válasz (b) és frekvencia válasz (c) függvényét már könnyen előállíthatjuk.

a. Pole-zero plot



5.7 Sztochasztikus folyamatok spektrálanalízise

A természetben előforduló idősorok többé-kevésbé véletlenszerű sajátosságokat is tartalmaznak (lásd az alábbi ábrát).



Penci KGO permanens GPS állomás magassági koordinátájának idősora (cm)

Ezért ésszerű igény merül fel arra, hogy különböző frekvenciájú komponensekre bontsuk az adott sztochasztikus folyamatot, vagyis vegyük a Fourier transzformáltját. Az előzőekben mondottak alapján kizárólag (kvázi)stacionárius sztochasztikus folyamatokkal fogunk foglalkozni. Ezek elméletileg ideális véletlen jellegű függvények, melyek a teljes időtartományra kiterjednek és invariánsak az időbeli eltolás tekintetében. Egy valós változótól függő (az időben folytonosan változó) jel esetében a klasszikus Fourier transzformált:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt. \quad (5.28)$$

Ha idősorral rendelkezünk (diszkrét időpontjaink vannak), akkor a $(-1/2, 1/2)$ intervallumon az alábbi spektrumunk van:

$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi i f n}, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2 \quad (5.29)$$

amelyből az idősort az alábbi módon állíthatjuk vissza:

$$x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2\pi i f n} df \quad (5.30)$$

Alkalmazhatjuk ezek közül bármelyiket egy sztochasztikus folyamatra? Nem, mivel az (5.28) integrál vagy az (5.29) összeg nem konvergens, ugyanis egy sztochasztikus folyamat amplitúdója vagy az energiája nem csökken, ahogy t vagy n növekszik. Ezen kívül, ha az $x(t)$ helyébe az (5.28)-ban egy sztochasztikus folyamatot teszünk, akkor pusztán egy másik véletlen függvényt fogunk kapni. A célunk viszont az, hogy $x(t)$ -t egy olyan függvénnyel jellemezzük, amelyik éppen úgy jellemzi a sztochasztikus folyamatot a frekvencia

tartományban mint az autokorreláció függvény jellemzi az időtartományban. Szemléletes módon megfogalmazva a következőt szeretnénk. Tegyük fel, hogy azt szeretnénk megtudni, hogy az adott stacionárius folyamat milyen változékonyságot mutat az f_0 frekvencián. Ekkor megtervezhetnénk (megépíthetnénk) egy keskenysávú sáváteresztő Φ_{f_0} szűrőt, amelyik csak egy szűk $(f_0 - \frac{1}{2}df, f_0 + \frac{1}{2}df)$ frekvencia sávban engedi át a jelet. Ha most ennek a szűrőnek a bemenetére visszük az $x(t)$ jelet, akkor a kimenetén egy olyan sztochasztikus folyamat jelenik meg, amelynek a frekvencia tartalma igen korlátozott. Ennek a jelnek most csak a nagyságát mérjük meg (ez nem a jel amplitúdója, hanem a varianciája); azt várjuk, hogy a variancia arányos lesz a sáváteresztő szűrő df sáv szélességével. Ezután definiáljuk az alábbi S_x mennyiséget:

$$S_x(f_0)df = \text{var}(\Phi_{f_0} * x) \quad (5.31)$$

vagyis a szűrő kimenetén megjelenő sztochasztikus folyamat varianciája: egy pozitív érték szorozva df -fel; ez az f_0 frekvencia függvényében más és más lesz, és arányos lesz az $x(t)$ varianciájával azon a frekvencián. Ezt a varianciát nevezzük az $x(t)$ jelnek az adott frekvencián vett *energiájának*, tehát S_x $x(t)$ -nek az *energiaspektruma*, másnéven *teljesítménysűrűség spektruma*. Ez a definíció egyformán működik mind folytonos, mind diszkrét változó esetében.

A következőkben egy stacionárius folyamat *teljesítménysűrűség spektrumának* (Power Spectral Density, a továbbiakban: PSD) két másik definícióját adjuk meg, az egyiket Fourier transzformáció segítségével. Minden esetben feltételezzük azt, hogy az $x(t)$ sztochasztikus folyamat zérus átlagú. Az első definíció szerint a PSD az alábbi határértékként írható fel:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_T(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \right\}, \quad (5.32)$$

ahol

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}.$$

A fenti (5.32)-es egyenlet az ún. *kétoldali* PSD-t definiálja, mivel f -et $-\infty$ -től $+\infty$ -ig változtathatjuk. Ha x valós, ami a leggyakoribb eset, akkor a Fourier transzformáció tulajdonságaiból láthatjuk azt, hogy $S_x(f)$ az f -nek páros függvénye, ezért csak az $f \geq 0$ -ra kell megadnunk az értékeit. Ilyenkor szokásos az *egyoldali* PSD-ről beszélni, amit $2S_x(f)$ definiál az $f \geq 0$ -ra.

Az (5.32) definícióból világos, hogy a PSD valamiféle másodrendű momentum egy adott f -re. Már láttunk egy másodrendű momentumot, az (5.5) autokovarianciát. Vajon van valamilyen kapcsolat a kettő között? Igen van; lényegében a PSD és az autokovariancia *pontosan ugyanazt az információt tartalmazzák*. Ténylegesen $S_x(f)$ az $R_x(t)$ Fourier transzformáltja:

$$S_x(f) = F\{R_x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-2\pi i f t} dt, \quad (5.33)$$

és ez jelzi, hogy az autokovariancia nem lehet egyszerűen egy tetszőleges függvény, hanem csak olyan, amelyiknek pozitív a Fourier transzformáltja. Néha az (5.33)-as összefüggést tekintik a PSD definíciójának. Ebből a PSD további hasznos tulajdonságai vezethetők le. Például (5.33) inverz transzformáltját véve:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{2\pi i f t} df . \quad (5.34)$$

Idézzük vissza az R_x definíciójából, hogy

$$R_x(0) = E\{x(t) x(t)\} = \text{var}(x) = \sigma_x^2 ,$$

mivel x zérus átlagú sztochasztikus folyamat. Ennek megfelelően (5.33)-ba $t = 0$ -t helyettesítve a következő fontos eredmény adódik:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df .$$

Szavakban: a PSD alatti terület a jel varianciája. Ez az oka annak, hogy megkészszerztük S_x -et, amikor az egyoldali PSD-t definiáltuk (hogy megmaradjon a jel varianciája).

Vegyük a legegyszerűbb példát, a fehérzajt. Folytonos jel esetén a fehérzaj autokovariancia függvénye a Dirac-féle delta függvény (disztribúció) számszorosa, $s^2 \delta(t)$. Ekkor a PSD

$$S_W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_W(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \delta(t) e^{-2\pi i f t} dt = s^2 ,$$

amelyik a frekvenciától független állandó. A fehérzaj energiája minden frekvencián állandó (innen származik az elnevezése is). A fehérzaj esetén tehát a folyamat varianciája, ami a PSD alatti terület, végtelen! Ebből következik, hogy a folytonos fehérzaj fizikai értelemben fikció, mert fizikailag realizálható folyamat nem rendelkezhet végtelen energiával. Vegyük észre azt is, hogy a különböző típusú fehérzajok (5.2 szakasz) mind ugyanolyan frekvencia tartalommal rendelkeznek, vagyis konstans spektrummal. A PSD egyszerűen egy másodrendű mennyiség, ezért nem függ a stacionárius folyamat egyéb jellemzőitől, mint például az eloszlásfüggvény konkrét alakjától.

Most foglalkozzunk azzal, hogy mi történik a PSD-vel, ha a jelet szűréssel módosítjuk. Folytonos esetben a konvolúciós szűrés egyenlete szerint a szűrt $y(t)$ jel:

$$y(t) = g(t) * x(t)$$

ahol $g(t)$ a szűrő impulzus átviteli függvénye (magfüggvénye). Ha ismerjük $S_x(f)$ -et, akkor számíthatjuk $S_y(f)$ -t, az alábbi összefüggés szerint:

$$S_y(f) = |G(f)|^2 S_x(f) . \quad (5.35)$$

Ez a fontos eredmény a konvolúció tétel alkalmazása a sztochasztikus folyamat szűrése esetében: ha egy determinisztikus jelet szűrünk, az eredményül kapott függvény Fourier transzformáltja a szűrő frekvencia átviteli függvényével van szorozva. Most viszont az új spektrumot a szűrő frekvencia átviteli függvénye *abszolút értékének a négyzetével* kell szorozni. Ez az eredmény továbbá szilárd elméleti alapra helyezi azt az elgondolást, amit az (5.31)-es összefüggésben foglalmaztunk meg.

Diszkrét sztochasztikus folyamatok (idősorok) PSD-je

A folytonos stacionárius sztochasztikus folyamatok esetében levezetett minden eredmény értelemszerűen átvihető a diszkrét esetre. A diszkrét idősor PSD-jének definíciója (5.32) analógiájára diszkrét Fourier transzformációk határértékeként írható fel:

$$S_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} E \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2 \right\}. \quad (5.36)$$

Alternatív definíció az autokovariancia függvény segítségével:

$$S_x(f) = \sum_{n=-N}^N R_x(n) e^{-2\pi i f n}, \quad -1/2 \leq f \leq 1/2. \quad (5.37)$$

Természetesen megkaphatjuk az autokovariancia függvényt a PSD-ből:

$$R_x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) e^{2\pi i f n} df. \quad (5.38)$$

Ha (5.35)-be $n = 0$ -t helyettesítünk, a következő eredmény adódik:

$$\sigma_x^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) df.$$

Konvolúciós szűrés esetén egy diszkrét idősor energiaspektruma

$$S_y(f) = |G(f)|^2 S_x(f), \quad (5.39)$$

ahol

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-2\pi i f n}. \quad (5.40)$$

A spektrum (PSD) becslése az adatok alapján

Ha elfogadjuk azt a feltevést, hogy az adott idősorunkat jól modellezhetjük stacionárius sztochasztikus folyamatként, akkor olyan eljárásokra van szükségünk, amelyekkel ésszerű, megbízható becslést tudunk adni a szóban forgó folyamat PSD-jére illetve autokovariancia függvényére. A spektrumbecslésnek óriási szakirodalma van. Ennek az az oka, hogy ez a feladat egyfajta külön hozzáértést kívánó „mesterség”, és nincs határozottan „legjobb” módszer. Mindezek mögött az húzódik meg, hogy a spektrumbecslés egyfajta rosszul kondicionált inverz feladat. Ugyanis szükségképpen csak véges számú ismert adatunk van, viszont végső soron egy olyan függvényt akarunk meghatározni, amely több ismeretlentől függ – hasonlóan ahhoz, amikor egy olyan egyenletrendszert szeretnénk megoldani, amelyben több ismeretlen található mint ahány egyenlet van. A matematikai részleteket mellőzve elmondhatjuk, hogy a diszkrét Fourier transzformációhoz hasonlóan a sztochasztikus folyamatból sem végtelen, hanem csak N db. mintával rendelkezünk. Ennek a csonkításnak következménye az lesz, hogy a valódi spektrum helyett egy olyan spektrumot kapunk, amely a valódi spektrum és egy ún. Dirichlet-féle magfüggvény konvolúciója. A spektrumbecslés feladata kijavítani ezt a spektrum „elkenést”. Az egzakt dekonvolúció (kijavítás) viszont lehetetlen, mivel a csonkítás során információvesztés történt. Minden amit tehetünk az, hogy egy viszonylag jó közelítő megoldást állítunk elő regularizációval. A megfelelő közelítést adó eljárás megtalálása azonban valóban jó hozzáértést és tapasztalatot kíván.

A diszkrét $\{x_n\}$ idősort gyakran $\Delta t = 1$ intervallummal mintavételezzük és ez N db. egymás utáni mintát jelent egyetlen realizációból. Továbbá fel kell tételeznünk azt, hogy a folyamat *ergodikus*. Ez mit jelent? Elméletileg feltételezzük, hogy a folyamatnak annyi realizációját tudjuk előállítani, ahányra csak szükségünk van, és amikor átlagolunk, például az $E\{ \}$ várható érték számításánál, akkor a különböző egymástól független realizációk átlagát vesszük. Ezzel szemben a legtöbb gyakorlati esetben pusztán *egyetlen* realizációval rendelkezünk, az elemzendő idősorral. Ez esetben nincs más lehetőségünk, mint a realizációk szerinti átlag helyett *időbeli* átlagot számítani. Egy *ergodikus* folyamat esetében igaz az, hogy a végtelen időtartományra vett átlag megegyezik a realizációk szerinti átlaggal. Sejthetjük azt, hogy egy folyamat akkor ergodikus, ha az autokovariancia függvénye elég gyorsan lecsökken, vagyis az egymástól távol levő adatok egymástól lényegében függetlenek. Diszkrét folyamatok esetében az ergodicitáshoz elég az alábbi feltétel teljesülése:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n)^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f)^2 df < \infty,$$

ami azt jelenti, hogy a spektrum korlátos.

A spektrum periodogram becslése

Az (5.36) összefüggésben a realizációk feletti átlag helyett az idő szerinti átlagot beírva és egyszerűen elhagyva a határérték számítását, megkapjuk az N pontból álló diszkrét idősor PSD-jének (teljesítménysűrűség spektrumának) *periodogram* becslését:

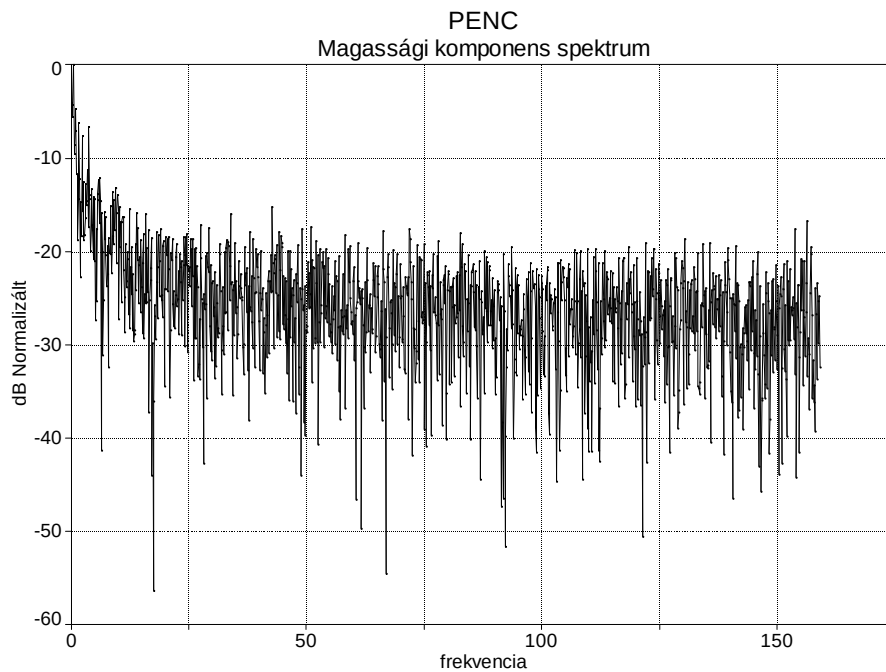
$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2. \quad (5.41)$$

Vegyük észre, hogy az adatsort átszámoltuk zérus kezdő indexszel, mert ez a DFT esetén szokásos megállapodás.

A spektrum periodogram becslése torzítatlan, ami azt jelenti, hogy várható értéke a valódi spektrum értékét adja. Viszont a becslés *inkonzisztens*, ami azt jelenti, hogy

$$\text{var}[\hat{S}_x(f)] = S_x(f)^2,$$

tehát a becslés szórása $S_x(f)^2$, azaz megegyezik magával a becsléssel, bármekkora legyen is az adatok N száma! Ez azt jelenti, hogy a spektrum PSD becslése rendkívül zajos. Mi ennek az oka? Az, hogy a periodogram $1/2N$ független becslést ad N ismert érték alapján; a becslésenkénti szabadsági fok tehát kettő. Ez a helyzet nem javul N növekedésével, így a variancia semmivel nem csökken – nincs több adatból történő átlagolás, ahogy N -et növeljük.



Magassági komponens spektrumának periodogramja (PENC, KGO)

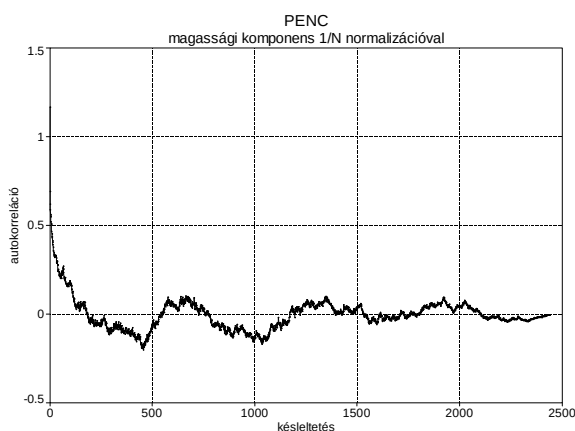
A spektrum becslése megadható az (5.37) definíció segítségével is, ha előállítjuk az autokovariancia függvény becslését. Ezt egyszerűen kétféle módon tehetjük meg az adatokból. Az egyik az autokovariancia függvény torzítatlan becslése,

$$\hat{R}_x(n) = \frac{1}{N-n} \sum_{k=1}^{N-n} x_k x_{k+n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1 \quad (5.42)$$

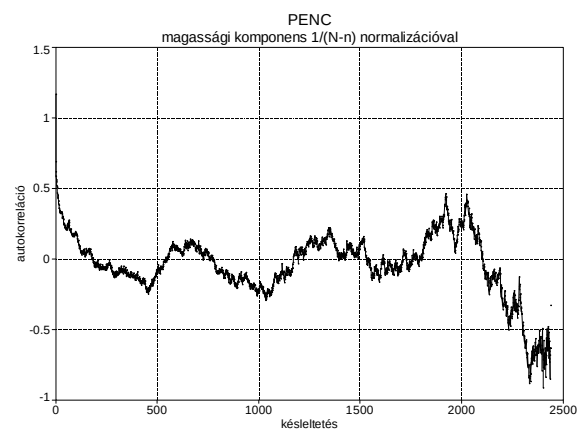
a másik a csak aszimptotikusan torzítatlan alábbi becslés:

$$\hat{R}_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-n} x_k x_{k+n} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1. \quad (5.43)$$

Az (5.42) becslés problémája a növekvő n -re egyre növekvő variancia, ahogy az ábrán is látható. A periodogram úgy is felfogható, mint az (5.43) becslés Fourier transzformáltja. Viszont mindkét autokovariancia becslés meglehetősen nagy torzítással rendelkezik

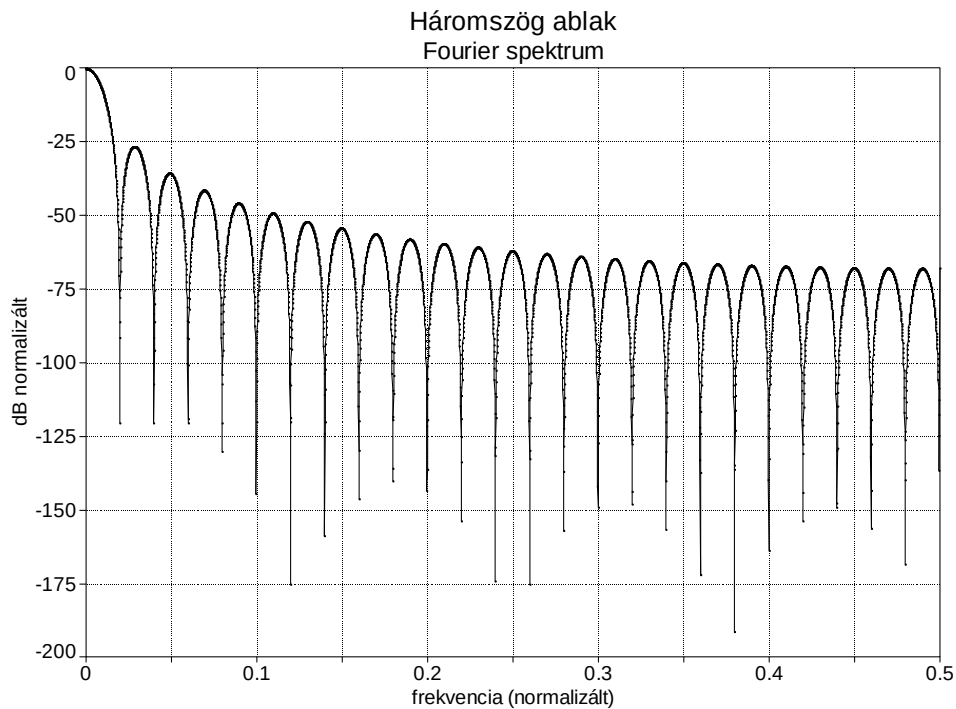


Autokovariancia becslése $1/N$ normalizációval



Autokovariancia becslése $1/(N-n)$ normalizációval

Az (5.41) periodogram becslés másik komoly hibája a spektrum torzítás (spektrális szivárgás). Ez a torzítás a valódi spektrum és egy háromszög (Bartlett) ablak spektrumának (ami egy sinc^2 függvény) a konvolúcióját jelenti.



Háromszög ablak (Bartlett) Fourier spektruma

Ez a spektrális szivárgás azt okozza, hogy a jel energiájának egy része átvándorol a spektrum alacsonyabb energiájú helyeire. Különösen olyan jelek esetében, amelyek dinamikája nagy, ez a jelenség akár teljesen meghamisíthatja a spektrumot! Tehát a spektrumbecslés esetén törekedni kell olyan módszer alkalmazására, amelynek a spektrális szivárgásból eredő torzítása kicsi. Ilyen módszerekről később még részletesebben is szót ejtünk.

A spektrumbecslés paraméteres módszerei

A spektrumbecslés paraméteres módszereinek az alapgondolata a stacionárius folyamatok szűrésének elvéből származik. Idézzük fel, hogy ha $x(t) = g(t) * y(t)$, akkor

$$S_x(f) = |G(f)|^2 S_y(f).$$

Tételezzük fel, hogy valamilyen módon sikerült úgy megválasztani a $g(t)$ szűrőt, hogy amikor $y(t)$ fehérzaj, akkor a szűrő kimenete a kívánt $x(t)$ sztochasztikus folyamat; ekkor

$$S_x(f) = c |G(f)|^2.$$

ahol c valamilyen állandó. Az elgondolást a gyakorlatban általában úgy valósítják meg, hogy $g(t)$ szűrőt véges AR (rekurzív) szűrőként definiálják k szűrő együtthatóval:

$$x_n = y_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \dots + a_k x_{n-k},$$

ahol y_n fehérzaj. Ezeket az egyenleteket végigsorozva x_j -vel és a várható értéket véve, előállíthatjuk az ún. *Yule-Walker* egyenleteket az ismeretlen a_j együtthatókra az autokovariancia becslések függvényében. Hátránya a módszernek, hogy nehéz meghatározási hibát rendelni a spektrum becsléséhez, valamint kérdéses k megfelelő megválasztása is, hiszen a kapott eredmény k függvényében meglehetősen drasztikusan megváltozhat. Léteznek a rekurzív szűrő együtthatók meghatározásának alternatív módszerei is, mint például *Burg módszere*, illetve a *maximális entrópia* módszere (MESE).

A Yule-Walker megközelítésnek mindazáltal van egy hasznos alkalmazási területe. Amint azt már említettük, a periodogramon alapuló becslések torzítottak lesznek, ha a spektrum

dinamikája nagy. Gyakran egy viszonylag rövid AR (IIR) szűrővel (pl. $k < 5$) a spektrum dinamikája drámai módon lecsökkenthető. Ezután a szűrt jel biztonságosan kezelhető és a végén a szűrő hatását el tudjuk távolítani. Ezt az eljárást a jel *előfehérítésének* (prewhitening) nevezik.

A spektrumbecslés nemparaméteres eljárásai. Multitaper módszer

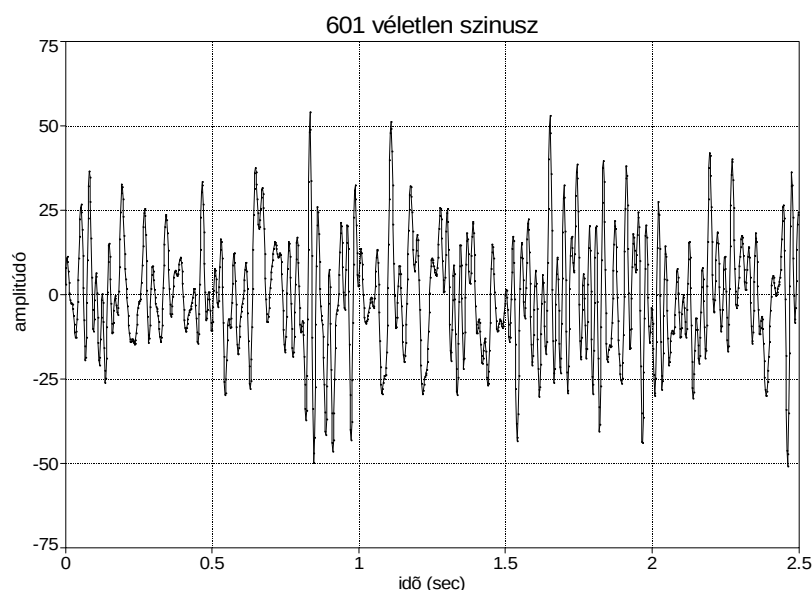
A spektrumbecslési variancia csökkentéséhez valamilyen átlagolásra van szükség. A legtermészetesebbnek tűnő eljárás az egymás szomszédságába eső spektrum becslések átlagolása. A periodogram erénye az, hogy a becsült spektrum értékek mind korrelálatlanok fehérzaj esetén, és ez a megállapítás közelítőleg igaz marad más sima spektrumokra is. Ennek megfelelően K egymás utáni spektrum értéket egységnyi súllyal átlagolva a varianciát K -ad részére csökkenthetjük:

$$\text{var}[\hat{S}_x(f)_K] = \frac{S_x(f)^2}{K}.$$

Az átlagolás a spektrum simításával jár. A *spektrális felbontás* ilyen *csökkenése* elkerülhetetlen veszteség; egyensúlyt kell tartanunk a között a két kíváncsi között, hogy minél jobb felbontású PSD-t határozzunk meg azzal, hogy a becslés statisztikailag minél megbízhatóbb legyen.

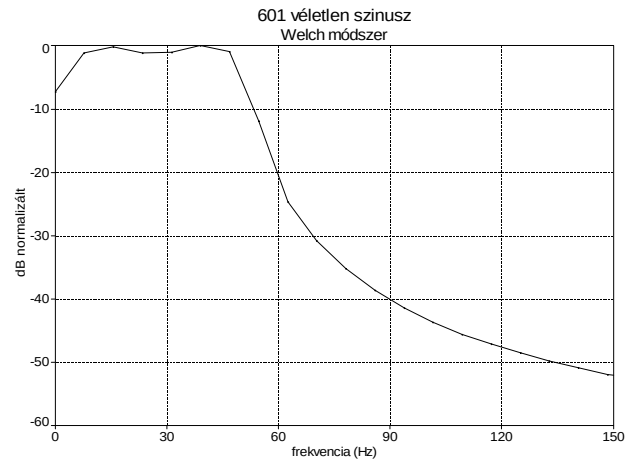
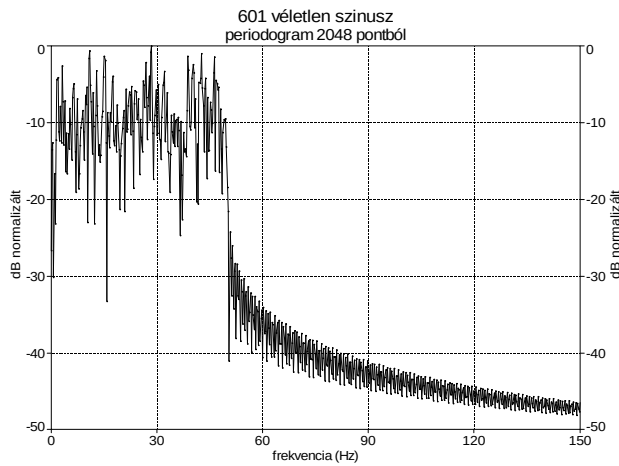
Egy másik átlagolási eljárás, amelyet még mindig széles körben alkalmaznak, a *Welch módszer* vagy más néven *szekció átlagolás*. Ebben az eljárásban az eredeti idősort K db. egyenlő hosszúságú, egymást (általában 50%-ban) átfedő szekcióra bontják és mindegyikből egy-egy spektrumot számítanak ki. Ha a szekciók elég hosszúak, ezek az adatsorok egymástól közel függetlenek, és így a PSD egy-egy független becslését adják, melyeket átlagolnak. A torzítás csökkentése érdekében mindegyik szekciót megfelelő függvényvel ablakolják (tapering).

Az átlagolás hatásának bemutatására nézzük a következő jelet, amelyet 600 db, 50 Hz-nél kisebb véletlen frekvenciájú és fázisú szinuszhullámból állítottunk elő, illetve egy különálló 62 Hz-es szinuszhullámból, amelynek amplitúdója –75 dB.



601 véletlen szinuszhullám összegeként előállított jel

A szekció átlagolás hatását az alábbi ábrák szemléltetik. Az ábráról világosan látszik, hogy bár az átlagolt spektrum sokkal simább, de nem mutatja az 50 Hz fölötti levágást a jelben, éppúgy mint a periodogram becslés sem jelzi azt, hogy nincs a jelben 50 Hz fölötti frekvencia összetevő. Ez a spektrális szivárgás hatásának tulajdonítható.



Átlagolás nélküli és Welch-féle szekció átlagolással meghatározott spektrumok. A bal oldali ábrán (a) a periodogram becslés, a jobb oldalin (b) 64 db, egymást 50%-ban átfedő szekció átlaga látható.

A spektrális szivárgás hatását oly módon lehet csökkenteni, hogy az adatokat egy $w(n)$ súlyfüggvénnyel beszorozzuk és az eredeti periodogram becslést a következővel helyettesítjük:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N w(n) x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2. \quad (5.44)$$

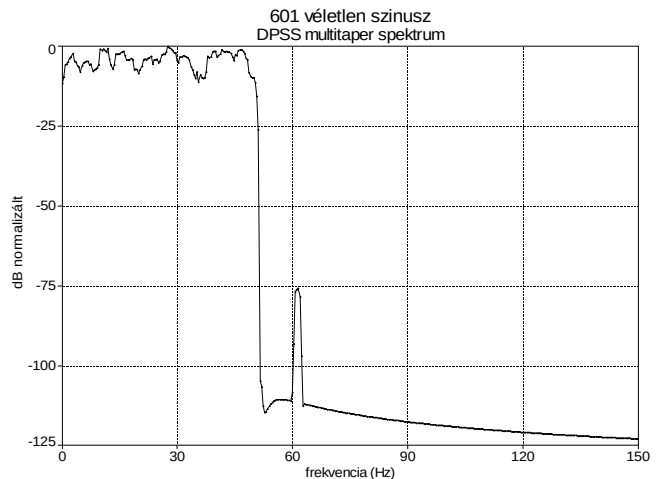
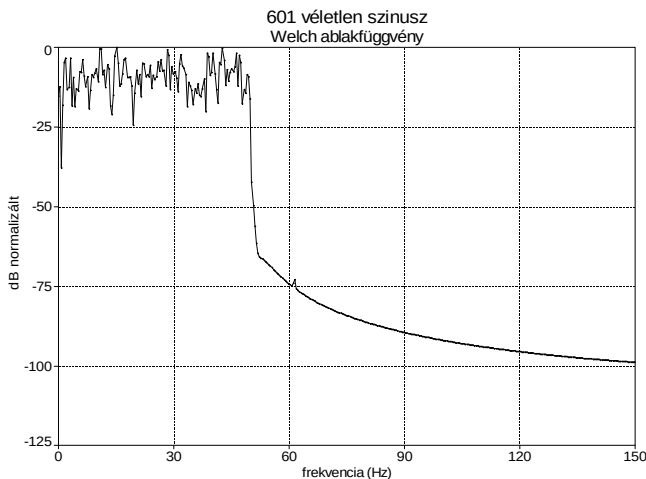
Ez esetben a becslésünk várható értéke a következő lesz:

$$E\{\hat{S}_x(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f') W(f'-f) df', \quad (5.45)$$

ahol a frekvencia tartományban a konvolváló függvény közelítőleg

$$W(f) = \frac{1}{N} |F\{w(n)\}|^2,$$

vagyis a súlyfüggvény Fourier transzformáltjának négyzete. A periodogram esetében a konvolváló függvény a sinc²-tel arányos. Ha tehát szeretnénk a spektrális szivárgásból eredő torzítást csökkenteni, akkor az $n = 0$ -nál és $n = N - 1$ -nél simább átmenettel rendelkező függvényt kell választanunk. Például a Welch-féle ablak esetében az ábrán látható eredményt kapjuk.



Welch-féle ablakfüggvénnyel meghatározott spektrum (bal oldalt). Látszik, hogy jelentősen javult az 50 Hz-nél tapasztalható frekvencia levágás. Az adaptív DPSS multitaper módszerrel kapott spektrum az ábra jobb oldalán látható. Szinte tökéletes (-110 dB) az 50 Hz-nél látható levágás és a becslés varianciája is sokkal jobb. Ezenkívül világosan látható a -75 dB-es gyenge szinuszjel

Az ablakfüggvényekkel szemben alkalmazott jogos kritika, hogy túl kis súlyt adnak az idősor kezdetén és végén levő adatoknak, gyakorlatilag „kidobják” azokat. Ezen javítanak az ortogonális több ablakfüggvényt alkalmazó modern eljárások (multitapering).

Ezeknek az eljárásoknak az alapgondolata egyszerű: ablakoljuk az adatokat különböző, egymásra ortogonális súlyfüggvényekkel és azután az egyes súly (ablak) függvényekkel kapott spektrumokat átlagoljuk.

A gyakorlatban kétféle ortogonális függvénycsaládot szoktak alkalmazni: a *Slepian-féle* vagy *nyújtott szferoidikus* függvényeket (Discrete Prolate Spheroidal Sequence, DPSS), illetve a Riedel és Sidorenko (1995) által javasolt minimális torzítású *szinuszos* ablakfüggvényeket. Ez utóbbiak esetében a súlyfüggvények igen egyszerűek:

$$v_k(N;n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1}, \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (5.46)$$

és a megfelelő multitaper spektrumbecslés a következő:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(N;n) x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k}, \quad (5.47)$$

ahol $\mu_k = 1 - k^2 / K^2$ megfelelő (parabolikus) súlyok.

Befejezésül megemlítjük, hogy számos modern matematikai segédeszköz (például a MATLAB Signal Processing Toolbox) is tartalmazza a multitaper módszer alkalmazásához szükséges eljárásokat.