Geodéziai alapmunkálatok

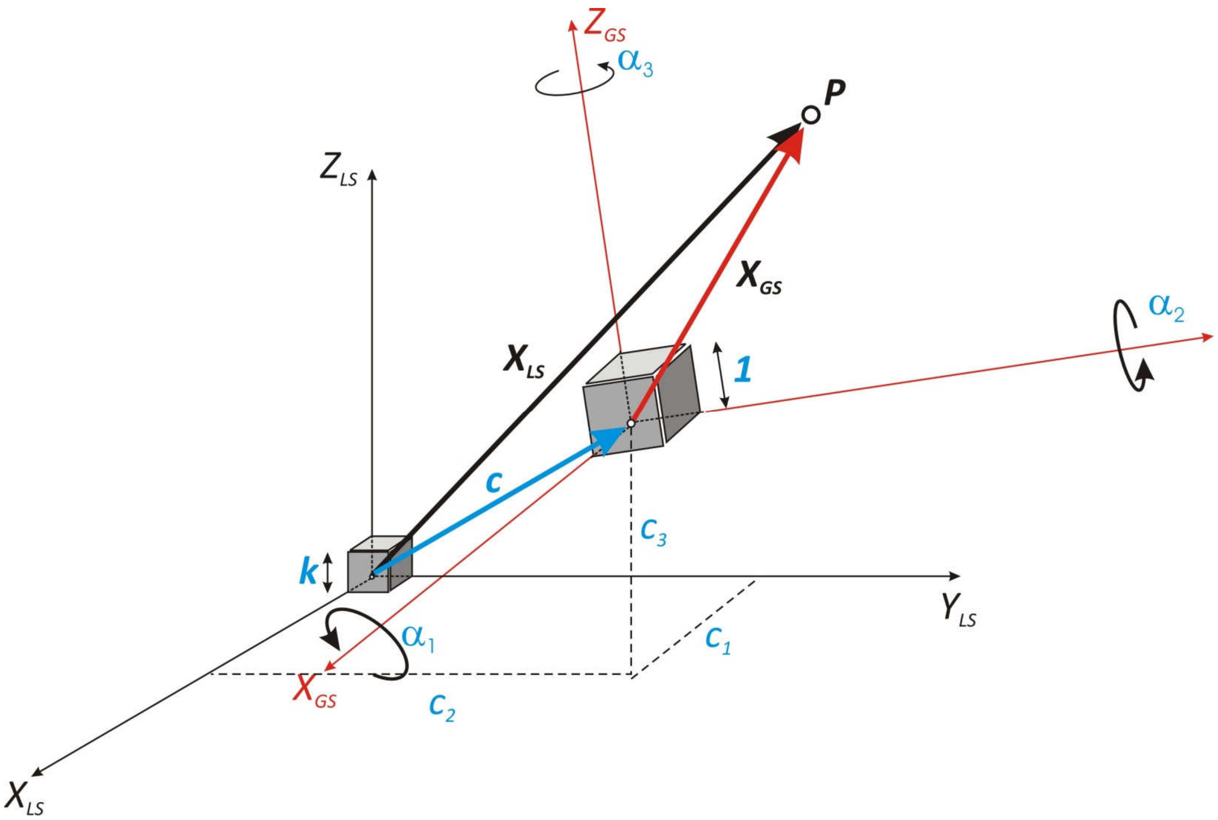
Segédlet a

Térbeli hasonlósági transzformáció paramétereinek meghatározása

című házi feladat megoldásához

A feladatban megadjuk négy EOVA vízszintes alappont EOV és WGS-84 koordinátáját, amelyekből meg kell határozni a munkaterületen használható térbeli hasonlósági transzformáció paramétereit.

A térbeli hasonlósági transzformáció geometriája:



A feladat megoldásához felhasználható adatok

Az EOV koordináták számításához szükséges alapfelületi és vetületi paraméterek:

$a_{IUGG\text{-}67}$=6 378 160,000 m
$b_{IUGG\text{-}67}$=6 356 774,516 m
R_{Gauss} = 6 379 743,001

k = 1,0031100083
n = 1,0007197049
φ_0 = 47°06'00''

Λ_0 = 19°2'54,8584''
m_0 = 0,99993
y_0 = 650 000,000 m
x_0 = 200 000,000 m
$N_{HD\text{-}72Geoid}$ = 5,0 m

A WGS-84 ellipszoid paraméterei:

$a_{WGS\text{-}84}$=6 378 137,000 m

$b_{WGS\text{-}84}$=6 356 752,314 m

$e^2_{WGS\text{-}84}$=0,006 694 379 99013

$e'^2_{WGS\text{-}84}$=0,006 738 496 74226

A számítás menete:

1. Számítsuk ki az IUGG-67 ellipszoid első és második numerikus excentricitását:

$$e_{IUGG-67} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}} \quad \text{és} \quad e'_{IUGG-67} = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$$

2. Számítsuk ki a közös pontok EOV koordinátáiból azok ellipszoidi megfelelőinek ellipszoidi földrajzi szélességét és hosszúságát a HD-72 dátumhoz tartozó IUGG-67 ellipszoidon:

   a) a gömbi koordináták számítása az új magyarországi Gauss-gömbön

   a segédföldrajzi koordináták:

$$\lambda' = \frac{y_P - y_0}{m_0 R_{Gauss}} \quad \text{és} \quad \varphi' = 2 \cdot \arctan\left(\exp\left(\frac{x - x_0}{m_0 \cdot R_{Gauss}}\right) - 90°\right)$$

   a gömbi földrajzi szélesség és hosszúság:

$$\varphi = \arcsin(\sin\varphi' \cos\varphi_0 + \cos\varphi' \sin\varphi_0 \cos\lambda'), \text{ és}$$

$$\lambda = \arcsin\left(\frac{\cos\varphi' \sin\lambda'}{\cos\varphi}\right)$$

   b) az ellipszoidi földrajzi koordináták számítása iteratív úton:

   az iteráció kezdő értéke: $\Phi_0 = 2 \cdot \arctan\left(\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{k}\right)^{\frac{1}{n}}\right) - 90°$

   Iteratív lépések (amíg $|\Phi_{i+1} - \Phi_i| < 0{,}00001''$):

$$s = \left(\frac{1 - e\sin\Phi_i}{1 + e\sin\Phi_i}\right)^{\frac{n \cdot e}{2}},$$

$$\Phi_{i+1} = 2 \cdot \arctan\left(\left(\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right)}{k \cdot s}\right)^{\frac{1}{n}}\right) - 90°,$$

   c) az ellipszoidi földrajzi hosszúság:

$$\Lambda = \Lambda_0 + \frac{\lambda}{n}$$

3. Számítsuk ki a közös pontok térbeli derékszögű koordinátáit a HD-72 dátumban:

A harántgörbületi sugár: $N = \dfrac{a_{IUGG-67}}{\sqrt{1-e^2 \sin^2 \Phi}}$.

A térbeli derékszögű koordináták pedig:

$$X_{HD72} = \left(N + H + N_{HD72Geoid}\right)\cos\Phi\cos\Lambda$$

$$Y_{HD72} = \left(N + H + N_{HD72Geoid}\right)\cos\Phi\sin\Lambda$$

$$Z_{HD72} = \left(\frac{b^2}{a^2}N + H + N_{HD72Geoid}\right)\sin\Phi$$

4. Ugyanerre a pontra számítsuk ki a WGS-84 rendszerben értelmezett térbeli derékszögű koordinátákat:

A harántgörbületi sugár: $N_{WGS-84} = \dfrac{a_{WGS-84}}{\sqrt{1-e_{WGS-84}^{\;2} \sin^2 \Phi_{WGS-84}}}$.

A térbeli derékszögű koordináták pedig:

$$X_{WGS-84} = \left(N_{WGS-84} + h_{WGS-84}\right)\cos\Phi_{WGS-84}\cos\Lambda_{WGS-84}$$

$$Y_{WGS-84} = \left(N_{WGS-84} + h_{WGS-84}\right)\cos\Phi_{WGS-84}\sin\Lambda_{WGS-84}$$

$$Z_{WGS-84} = \left(\frac{b_{WGS-84}^2}{a_{WGS-84}^2}N_{WGS-84} + h_{WGS-84}\right)\sin\Phi_{WGS-84}$$

5. Miután kiszámítottuk minden közös pont térbeli derékszögű koordinátáját, nincs más dolgunk, mint hogy a hétparaméteres transzformáció összefüggéseinek felhasználásával felírjuk a transzformáció közvetítőegyenleteit. Ezt követően kialakítjuk az alakmátrix és a tisztatagvektor elemeit, majd elvégezzük a legkisebb négyzetek szerinti kiegyenlítést.

A transzformációs egyenlet:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{HD-72} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + m \cdot \underset{3,3}{\mathbf{R}} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84},$$

ahol: $\underset{3,3}{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} 1 & -\alpha_3 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & 1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 & 1 \end{bmatrix}$.

A fenti közvetítőegyenletből az alakmátrixot és a tisztatag vektort az alábbi módon írhatjuk fel:

$$\begin{array}{c} \\ \underset{3,7}{\mathbf{A}} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} \Delta X & \Delta Y & \Delta Z & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & m_0 Z_{WGS-84} & -m_0 Y_{WGS-84} & X_{WGS-84} - \alpha_{30} Y_{WGS-84} + \alpha_{20} Z_{WGS-84} \\ 0 & 1 & 0 & -m_0 Z_{WGS-84} & 0 & m_0 X_{WGS-84} & \alpha_{30} X_{WGS-84} + Y_{WGS-84} - \alpha_{10} Z_{WGS-84} \\ 0 & 0 & 1 & m_0 Y_{WGS-84} & -m_0 X_{WGS-84} & 0 & -\alpha_{20} X_{WGS-84} + \alpha_{10} Y_{WGS-84} + Z_{WGS-84} \end{bmatrix} \end{array}$$

$$\underset{3,1}{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} X_{HD72} - X_{WGS-84} \\ Y_{HD72} - Y_{WGS-84} \\ Z_{HD72} - Z_{WGS-84} \end{bmatrix}$$

A kiegyenlítéshez a méretaránytényező előzetes értékét (m_0) egységnek, míg a többi paraméter előzetes értékét pedig zérusnak vesszük fel.

A teljes alakmátrix n×3 sorból fog állni, ahol n a közös pontok száma.

6. A kiegyenlítést egység súlyokkal hajtjuk végre a jól ismert:

$$\underset{7,1}{\mathbf{x}} = \left(\underset{7,7}{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{A}} \right)^{-1} \left(\underset{7,3n}{\mathbf{A}^{\mathbf{T}}} \; \underset{3n,1}{\mathbf{l}} \right)$$

összefüggéssel, amellyel megkapjuk a paraméterek megváltozásának vektorát. Innen a kiegyenlített értékeket a:

$$\underset{7,1}{\mathbf{X}} = \underset{7,1}{\mathbf{X}_0} + \underset{7,1}{\mathbf{x}}$$

összefüggéssel számíthatjuk.

Az LNM kiegyenlítésből kiszámíthatjuk a kiegyenlített értékek középhibáit is!

7. Ezt követően a transzformációs egyenletet felhasználva kiszámítható az adott WGS-84 térbeli derékszögű pontokból azok transzformált HD-72 koordinátái, majd innen a vetületi egyenletek segítségével kiszámíthatjuk a közös pontok transzformált EOV koordinátáit (lásd: Műholdas helymeghatározás c. tárgy házi feladata).

Azaz minden közös pontra kiszámítjuk a transzformált HD-72 koordinátákat:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{HD-72} = \begin{bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \Delta Z \end{bmatrix} + m \cdot \underset{3,3}{\mathbf{R}} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix}_{WGS-84}$$

Majd a HD-72 térbeli derékszögű koordinátákból először ellipszoid felületi koordinátákat számítunk ki:

$$p = \sqrt{X_{HD-72}^2 + Y_{HD-72}^2}$$

Az ellipszoidi földrajzi szélességet iteratív úton határozzuk meg:

$$\Phi_0 = \arctan\left(\frac{Z_{HD-72}}{p\left(1-e^2_{IUGG-67}\right)}\right)$$

Az iterációs lépések, amíg ($\left|\Phi_{i+1} - \Phi_i\right| < 0{,}00001''$):

$$N_i = \frac{a}{\sqrt{1-e^2_{IUGG-67}\sin^2\Phi_i}}$$ (harántgörbületi sugár)

$$h_i = \frac{p}{\cos\Phi_i} - N_i$$ (ellipszoid feletti magasság – IUGG-67/HD-72)

$$\Phi_{i+1} = \arctan\left(\frac{Z_{HD-72}}{p\left(1-e^2_{IUGG-67}\frac{N_i}{N_i+h_i}\right)}\right)$$ (javított ellipszoidi földrajzi szélesség

$$\Lambda = \arctan\frac{Y_{HD-72}}{X_{HD-72}}$$

A következő lépésben számítjuk a gömbi koordinátákat az új magyarországi Gauss-gömbön:

$\lambda = \left(\Lambda - \Lambda_0\right)n$, és

$$\varphi = 2\arctan\left(k\cdot\left(\tan 45° + \frac{\Phi}{2}\right)^n\left(\frac{1-e_{IUGG-67}\sin\Phi}{1+e_{IUGG-67}\sin\Phi}\right)^{\frac{ne_{IUGG-67}}{2}}\right) - 90°$$

A gömbi földrajzi koordinátákból számíthatjuk a segédföldrajzi koordinátákat:

$$\varphi' = \arcsin\left(\sin\varphi\cos\varphi_0 - \cos\varphi\sin\varphi_0\cos\lambda\right)$$
$$\lambda' = \arcsin\left(\cos\varphi\sin\lambda/\cos\varphi'\right)$$

Végezetül számítjuk az EOV koordinátákat:

$$y = m_0\cdot R_{Gauss}\cdot\frac{\lambda'}{180°}\pi$$
$$x = m_0\cdot R_{Gauss}\cdot\ln\left(\tan\left(45° + \frac{\varphi'}{2}\right)\right)$$
$$y_{EOV} = y + y_0$$
$$x_{EOV} = x + x_0$$

8. A vízszintes transzformáció középhibája az alábbi képlettel határozható meg:

$$m_H = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(v_x^2 + v_y^2\right)}{3n-7}}$$

ahol *n* a közös pontok száma, v_x és v_y pedig a maradék ellentmondások az x és y koordinátatengelyek irányában.

Beadandó eredmények:

- a meghatározott transzformációs paraméterek méter és szögmásodperc egységben;
- a meghatározott transzformációs paraméterek középhibái;
- a közös pontok maradék ellentmondásai (EOV y és x irányban);
- a vízszintes transzformáció középhibája.