

Hidroinformatika

Felkészítő kérdések a matematikai alapokról

1. Adja meg egy fix küszöbű bukóval visszaduzzasztott tározótér vízkészlet-változását leíró egyenletet és értelmezze a benne szereplő összes változót! A bukón átfolyó hozamot a $Q = ch^{3/2}$ képlettel közelítjük, h = átbukási magasság. A vízszintingadozás tartományában a tározó állandó felületű.

2. Írja fel egy tározó

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A} (Q_i - ch^{3/2})$$

folytonossági egyenletének numerikus integrálását n . időszintről az $n+1$ -ikre az Euler-féle módszerrel!

3. Hasonlítsa össze egy tározó folytonossági egyenletének integrálását (1) az Euler-féle és (2) a prediktor-korrektor módszerrel a számításigény és a pontosság szerint!
4. Hogyan győződhetünk meg róla, hogy egy tározó folytonossági egyenletének numerikus integrálásakor a választott időlépés elég rövidre lett felvéve?
5. Magyarázza meg, hogy honnan látszik az alábbi folytonossági egyenletből:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{A(h)} (Q_i(t) - ch^{3/2}),$$

hogy az egy olyan tározó térfogatára vonatkozik, amelynek a partjai lankásak a vízszintingadozás tartományában és a hozzáfolyás nem csak permanens lehet!

6. A fokozatosan változó, permanens vízmozgás felszín görbéjének differenciálegyenlete:

$$\frac{dh}{dx} = \frac{S - S_E}{1 - Fr^2}$$

Értelmezze a benne szereplő összes változót! Írja fel az egyenlet integrálását az Euler-módszerrel az i . rácsponttól a szomszédos felvizi $i-1$ -ik rácspontra!

7. Hasonlítsa össze a fokozatosan változó, permanens vízmozgás 1D egyenletének integrálását (1) az Euler-féle és (2) a prediktor-korrektor módszerrel a számításigény és a pontosság szerint!
8. Hogyan győződhetünk meg róla, hogy permanens felszín görbe numerikus megoldásában a választott rácsköz elég sűrűre lett felvéve?
9. Mit jelent az, hogy egy numerikus módszer pontossága p -edrendű? ($p=1, 2$, stb.)
10. Egy ábrán hasonlítsa össze, hogy hogyan változik egy elsőrendű ill. egy másodrendű numerikus közelítés hibája a rácsméret függvényében!

11. A fokozatosan változó permanens felszín görbe egyenletének megoldásakor (1) az Euler ill. (2) a prediktor-korrektor módszert alkalmazzuk. Egy adott Δx rácsméretnél hányszor lassabb a (2) módszer az (1)-nél? Ha $\Delta x/10$ -re sűrítjük a rácsot, hányszorosára nő a számításigény és a pontosság a két módszer esetében?

12. Amikor a permanens felszín görbe differenciálegyenletét levezetjük, miért kell kikötni azt, hogy az csak fokozatosan változó vízmozgásra érvényes? Miért nem érvényes pl. vízugrásra?

13. Egy téglalap-szelvényű csatorna árhullámának kinematikus hullámeqyenlete

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Írja fel az i . szelvényben és az n . időszintről indulva az egyenlet megoldását az alábbi véges-differencia sémákkal:

- időben haladó, térben retrográd ($c > 0$), explicit

- időben haladó, térben centrális, explicit

- időben haladó, térben retrográd ($c > 0$), implicit

Nem kell átrendezéssel egyszerűsíteni a diszkrét egyenletet. Rajzolja fel az operátorábrát is!

14. Egy téglalap-szelvényű csatorna árhullámának kinematikus hullámeqyenlete

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = 0.$$

Írja fel az i . és $i+1$ szelvényben és az n . és $n+1$ időszintek közé az egyenlet megoldását az időben és térben is centrális implicit véges-differencia sémával (=box-séma). Nem kell átrendezéssel egyszerűsíteni a diszkrét egyenletet. Rajzolja fel az operátorábrát is!

15. Hogyan nyilvánul meg hullámterjedés numerikus számításánál a numerikus diffúzió?

16. Hogyan nyilvánul meg hullámterjedés numerikus számításánál a numerikus diszperzió?

17. Miért linearizáljuk az impulzusegyenlet egyes tagjait (például az alábbi advekción tagot) az implicit centrális (box) séma megoldásban? Honnan látszik az, hogy Q szerint lineáris lett téve az alábbi megoldás:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{Q^2}{A} \right) \Big|_{i+1}^{n+0,5} \approx (A_{i+1}^{n+0,5} Q_{i+1}^n Q_{i+1}^{n+1} - A_i^{n+0,5} Q_i^n Q_i^{n+1}) / \Delta x?$$

18. Mitől explicit vagy implicit egy véges differenciaséma?

19. Írja fel azt a differenciálegyenletet, amelynek a véges differencia közelítése az alábbi:

$$\frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\Delta t} + v_i^n \frac{T_i^n - T_{i-1}^n}{\Delta x} = 0!$$

Nevezze meg a véges differenciasémát (időben ill. térben, $v \geq 0$)!

20. Vezesse le az alábbi centrális differenciasémát a második deriváltra:

$$\left. \frac{d^2 h}{dx^2} \right|_i \approx \frac{h_{i+1} - 2h_i + h_{i-1}}{\Delta x^2}$$

a $\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i+0,5}$ és $\left. \frac{dh}{dx} \right|_{i-0,5}$ indexekre felírt centrális differenciahányadosok segítségével, kihasználva, hogy $\frac{d^2 h}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dh}{dx} \right)$!

21. Miért kell egyenletrendszert megoldani minden időlépésben a St. Venant egyenletek implicit megoldásánál?

22. Amikor a St. Venant egyenletek megoldására az implicit box-sémát alkalmazzuk, akkor egy időlépésben az összes rácsszakaszt végigjárva kettővel több ismeretlent kapunk, mint ahány differenciaegyenletet. Milyen további összefüggésekkel tesszük határozottá az egyenletrendszert?

23. A számítási lépést tekintve mi az előnye egy implicit differenciasémának egy explicit differenciasémával szemben?

24. Ha a kinematikus hullámeqyenletet időben haladó, térben retrográd sémával oldjuk meg, akkor a numerikus közelítés az alábbi differenciálegyenletnek feleltethető meg:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} c \Delta x (1 - r) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (\text{m. r. t.}),$$

ahol $r = c \Delta t / \Delta x$.

Indokolja a következő állításokat:

- a séma konzisztens,
- instabil, ha $r > 1$,
- numerikusan diffúzív, ha $r < 1$,
- elsőrendű pontosságú.

25. Ha a kinematikus hullámeqyenletet időben haladó, térben centrális sémával oldjuk meg, akkor a numerikus közelítés az alábbi differenciálegyenletnek feleltethető meg:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{1}{2} c^2 \Delta t \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + O(\Delta x^2, \Delta t^2).$$

Indokolja a következő állításokat:

- a numerikus közelítés hibával jár;
- a séma konzisztens,
- instabil,
- nem konvergens.

26. A kinematikus hullámeqyenletnek egy véges differencia megoldása a következő differenciálegyenlet megoldásával egyenértékű:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = -c \left(\frac{1}{2} c \Delta t \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \Delta x^2 \frac{\partial^3 h}{\partial x^3} \right) + (\text{m. r. t.}),$$

Mekkora a közelítés hibája? Mekkora a séma időbeli és térbeli pontossági rendje?

27. A kinematikus hullámegyenletnek egy véges differencia megoldása a következő differenciálegyenlet megoldásával egyenértékű:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + c \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{1}{2} c (\Delta x - c \Delta t) \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + (\text{m. r. t.}).$$

Mekkora a közelítés hibája? Anélkül, hogy más numerikus módszerre váltanánk, hogyan csökkenthető a hiba?

28. Mutassa meg a t - x fázisdiagramon, hogy a kinematikus hullámegyenletben az (x_i, t^{n+1}) csomópont állapotát melyik pont határozza meg a t^n időszintről! Az ábrán mutassa be, hogy minek a teljesítését várjuk el egy explicit megoldás időlépésétől a Courant-féle stabilitási feltételben!

29. Vezesse le a változó keresztmetszvényű felszíni áramlások folytonossági egyenletét:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0!$$

30. Milyen fizikai tartalmat fejeznek ki a St. Venant-egyenletek? Melyek az érvényességi feltételei? Melyek az állapotváltozók?
31. Melyek azok a meghatározó erőhatások, amelyeket figyelembe veszünk a St. Venant-féle impulzusegyenletben?
32. Ismertesse a St. Venant-egyenletek peremfeltételeinek megadási módját áramló vízmozgás esetén! Hogyan köthető ez a karakterisztikák terjedési irányához?
33. Ismertesse a St. Venant-egyenletek peremfeltételeinek megadási módját rohanó vízmozgás esetén! Hogyan köthető ez a karakterisztikák terjedési irányához?
34. Vezesse le a szabadfelszínű vízmozgás 2D folytonossági egyenletét:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y} = 0!$$

35. Milyen fizikai tartalmat fejeznek ki a sekélyvízi egyenletek? Melyek az érvényesség feltételei? Melyek az állapotváltozók?
36. Melyek azok a meghatározó erőhatások, amelyeket figyelembe veszünk a sekélyvízi egyenletekben az impulzusmérlegben?
37. Adja meg a $c(x, t)$ szennyezőanyag-koncentráció

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v(x) \frac{\partial c}{\partial x} = 0$$

advekción egyenletének egy lehetséges differenciasémáját és annak operátorábráját az i . csomópontban és n . időszinten!

38. Adja meg a következő egyenlet (súrlódásmentes Burgers-egyenlet) időben haladó, térben retrográd ($v > 0$), explicit differenciasémáját és annak operátorábráját az i . csomópontban és n . időszinten:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Adja meg a fenti egyenlet permanens alakját is!

39. Adott egy magányos (elágazások nélküli) folyószakasz n db számítási szelvényből álló 1D folyómodellje. A numerikus modell az állapotváltozókat a szelvényekben értelmezi. Hány ismeretlent kell megoldani egy számítási lépésben? Összesen hány értéket kell peremfeltételben megadni?
40. Miért egyetlen változót kell megadni egy áramló vízmozgású folyóhálózat 1D modelljében a nyitott peremeken? Hogyan függ ez össze a karakterisztika-görbékkel?
41. Miért kell két változót megadni egy rohanó vízmozgású folyóhálózat 1D modelljében a befolyási peremeken? Hányat kell megadni a kifolyásnál? Hogyan függnek össze a válaszok a karakterisztika-görbékkel?
42. Mi a stabilitási feltétel a St. Venant egyenletek egy explicit véges differencia-sémájú megoldásában? Hogyan függ ez össze a karakterisztika-görbékkel?
43. Vázolja fel egy t - x fázisdiagramon, hogy a St Venant egyenletekben az (x_i, t^{n+1}) csomópont állapotát mekkora szakasz befolyásolja a t^n időszintről, mégpedig egy olyan példán, amelyben a vízmozgás rohanó.
44. Vázolja fel egy t - x fázisdiagramon, hogy a St Venant egyenletekben az (x_i, t^{n+1}) csomópont állapotát mekkora szakasz befolyásolja a t^n időszintről, mégpedig egy olyan példán, amelyben a vízmozgás áramló!
45. Ismertesse a véges differencia-módszer elvét a következő fogalmak felhasználásával: matematikai alapegyenletek, numerikus megoldás, diszkretizáció!