

## 2. STATIKAI ALAPOK

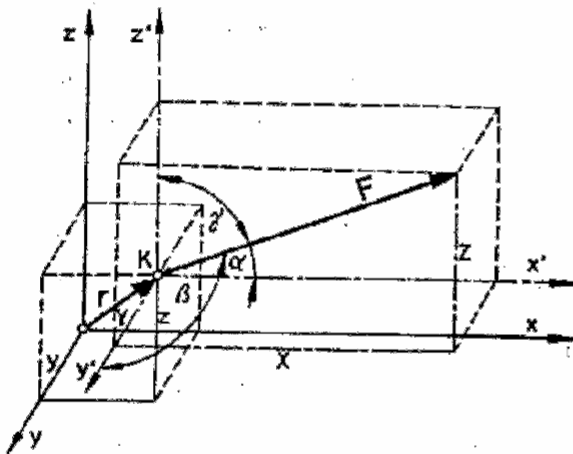
### 2.1. Alapfogalmak, alaptételek

A mechanika a mozgásokkal és erőkkel foglalkozó tudomány. Kinematika a testek mozgásait írja le, függetlenül az erőktől, amelyek azokat létrehozzák. Kinetika az erők és az általuk létesített mozgások közti összefüggéseket vizsgálja. Statika a nyugalomba lévő testekre ható erők közötti összefüggésekkel foglalkozik.

Mechanikai alapfogalmak a tér, az idő, az anyag, ill. az anyagból álló test és az erő. A hossz mérés egysége a méter [m], az időmérése a másodperc [s], a tömeg egysége a gramm [g]. Az erő tapasztalati fogalom, egysége newton  $1 \text{ N} = 1 \text{ m} \cdot \text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$ .

#### 2.1.1. Az erő analitikus jellemzői

Az erő kötött vektor, jellemzői a nagyság, az irány, az értelem és a támadáspont.



$$r = (r_x, r_y, r_z)$$

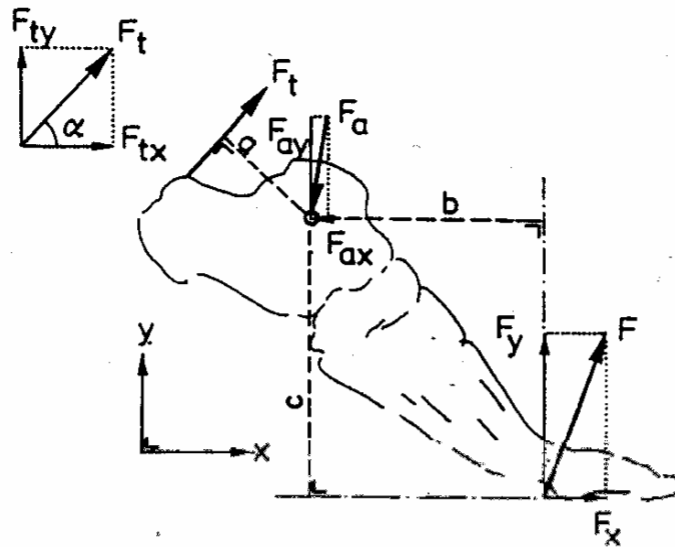
$$F = (F_x, F_y, F_z)$$

Az egy ponton támadó erő az ún. koncentrált erő. Az erők a valóságban valamely felületen oszlanak meg - felületi erők -, vagy a test teljes térfogatára, tömegére hatnak - térfogati erők.

A külső erőket más testek hatása idézi elő, a belső erők a test egyik részének a másik részre való hatása következtében jönnek létre. A külső erők két csoportja az ún. aktív erők, mint amilyenek a terhek, a testek saját súlyereje, a szél nyomása stb., illetve reakcióerők (passzív erők), amelyek a testek egymással való kapcsolataiban, támaszkodási felületeken jönnek létre.

Több erő együttese az erőcsoport vagy erőrendszer. Ha az erők hatásvonalai egy síkban fekszenek, akkor síkbeli erőrendszerről, ellenkező esetben térbeli erőrendszerről beszélünk. Az azonos irányú erőkkel álló erőrendszert párhuzamos erőrendszernek nevezzük. Ha az erők hatásvonalai egy pontban metsződnek, ezek a közös metszéspontú erők, ellenkező esetben általános vagy szétszórt erők.

Ha a test a reá ható külső erők következtében alakját és méreteit bizonyos hatások között változtatja, szilárd testről beszélünk. A merev test - idealizált, absztrakt fogalom - alaktartó, azaz két tetszőleges pontjának távolsága mindig állandó.



### 2.1.2. Egyensúly egyenértékűség

Egyensúlyban van a test, ha a rá ható erőhatások következtében nyugalomban marad, illetve megtartja eredeti mozgásállapotát.

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = 0$$

Azt az erőt, amely a merev testen egymagában ugyanazt a mechanikai hatást kelti, mint az adott erőrendszer, eredőnek nevezzük.

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = R$$

Két erőrendszert akkor nevezük **egyenértékűnek**, ha ugyanazon merev testen támadnak és ugyanazon közös eredővel helyettesíthetők.

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = R \quad (P_1, P_2, \dots, P_n) = R$$

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = (P_1, P_2, \dots, P_n)$$

### 2.1.3. Alaptételek

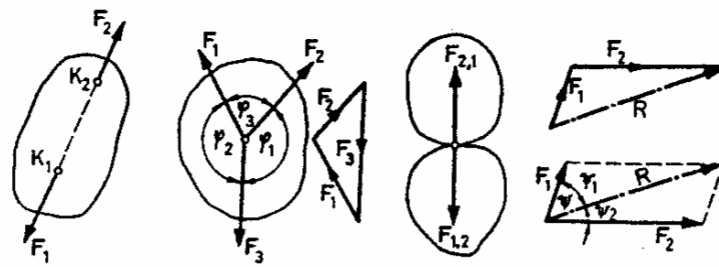
A merev testre ható két, közös támadáspontú erő eredője egy olyan harmadik erő, amelynek támadáspontja az összetevők közös támadáspontja, vektora pedig a két erő vektorának vektorösszege.

A merev testre ható erőt (statikai hatása szempontjából) eltolhatjuk az egyenesén, azaz támadáspontját az erő állásának megfelelő és e ponton átmenő egyenes bármely más pontjába áthelyezhetjük.

A merev test mozgásállapotát nem befolyásolja, ha a ráható erőrendszert egy egyensúlyi erőrendszerrel egyesítjük.

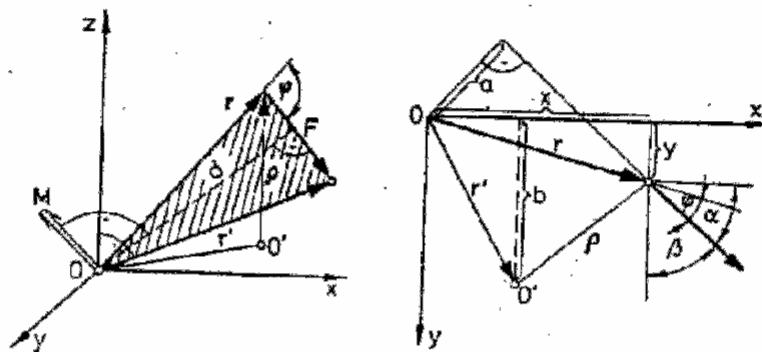
Az eredő keresésekor az erők egyesítésének sorrendje és a csoportosításuk a mechanikai hatás szempontjából közömbös.

A fentiekkel összhangban két erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a két erő közös hatásvonalú, egyenlő nagyságú és ellentett értelmű. Három erő akkor és csakis akkor van egyensúlyban, ha a három erő közös támadáspontú és vektoraikból vektorháromszöget lehet szerkeszteni. A vektorok tetszőleges sorrendben, nyílfolytonosan követik egymást és e három erő egy síkban fekszik. Két test által egymásra kifejtett erőhatások párosával egyenlő nagyok, egy egyenesbe esők és ellentett értelműek (Newton féle akció-reakció törvény)



$$\begin{aligned} (F_1, F_2) &= 0 \\ (F_1, F_2, F_3) &= 0 \\ F_{1,2} &= -F_{2,1} \\ (F_1, F_2) &= R \end{aligned}$$

2.1.4. Az erő statikai nyomatéka



Az erő 0 pontra vonatkozó statikai nyomatékán az alábbi vektorszorzatot értjük

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

A nyomaték nagysága

$$M = \pm Fr \sin \varphi = \pm F \cdot d$$

A vektorszorzat determinánsa:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

alapján  $\mathbf{M} = \mathbf{i} M_x + \mathbf{j} M_y + \mathbf{k} M_z$ , a nyomatékvektor vetületei

$$M_x = F_z y - F_y z, \quad M_y = F_x z - F_z x, \quad M_z = F_y x - F_x y$$

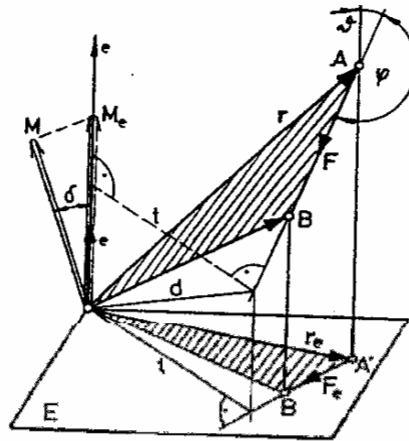
Ha az erő pl az [xy] síkban fekszik

$$\mathbf{M} = \mathbf{k} M_z \quad \text{és} \quad M_z = M = F_y x - F_x y$$

Az e jelű e egységvektorral jellemzett tengelyre vonatkozó nyomaték

$$M_z = \pm M \cos \delta = \pm F d \cos \delta = \pm F_t t = F t \sin \theta$$

ahol  $t$  az  $e$  és  $F$  egyenesek normák transzverzálisa.



A tengelyre vonatkozó nyomaték mint  $r$ ,  $F$ ,  $e$  vektorok vegyes szorzata is felírható

$$M_e = M_e = (r \times F) \cdot e.$$

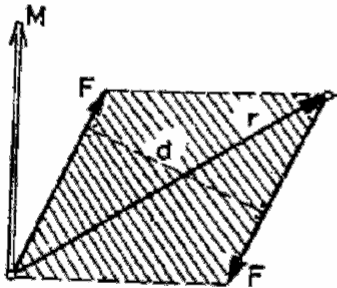
### 2.1.5. Erőpár

Az erőpár két egyenlő nagy, ellenkező értelmű, nem egy egyenesbe eső párhuzamos erőből álló erőrendszer. Az erőpár szabad vektor

$$M = r \times F$$

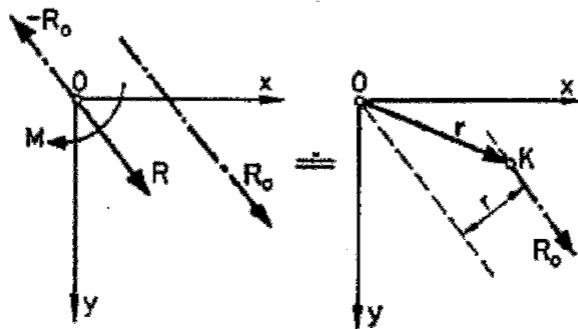
Az erőpár statikai nyomatéka a sík bármely pontjára ugyanaz

$$M = \pm Fd.$$



### 2.1.6. Az erő és erőpár összetétele, az erő redukálása

Az erő és reá merőleges vektorú  $M$  erőpár helyettesíthető egyetlen, eltolt hatásvonalon működő eredő erővel,



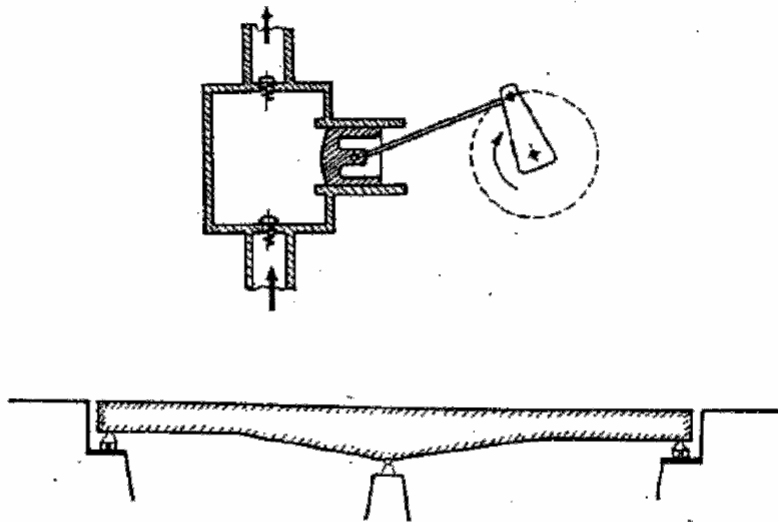


$$r = \frac{|M|}{R}, \quad (R, M) = R_0$$

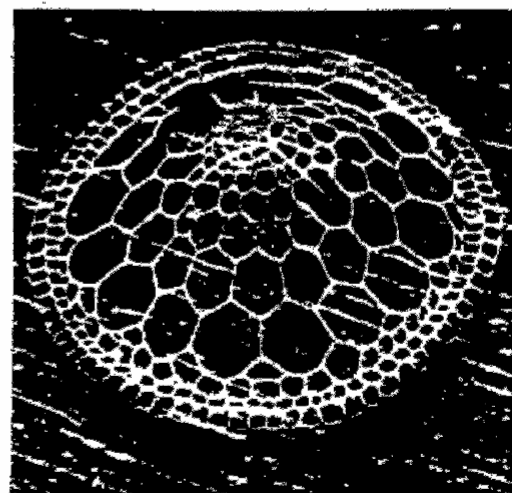
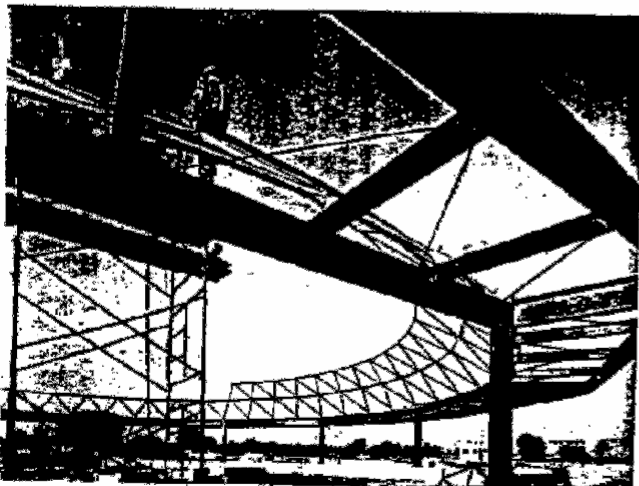
Az erőpontra való redukálása az előbbi inverz feladata, azaz az adott K ponton támadó  $R_0$  erő helyettesíthető tetszőleges és az erőtől  $v$  távolságban fekvő 0 ponton felvett  $R$  erővel és  $M$  erőpárral.

### 2.1.7. Szerkezetek és kényszerek

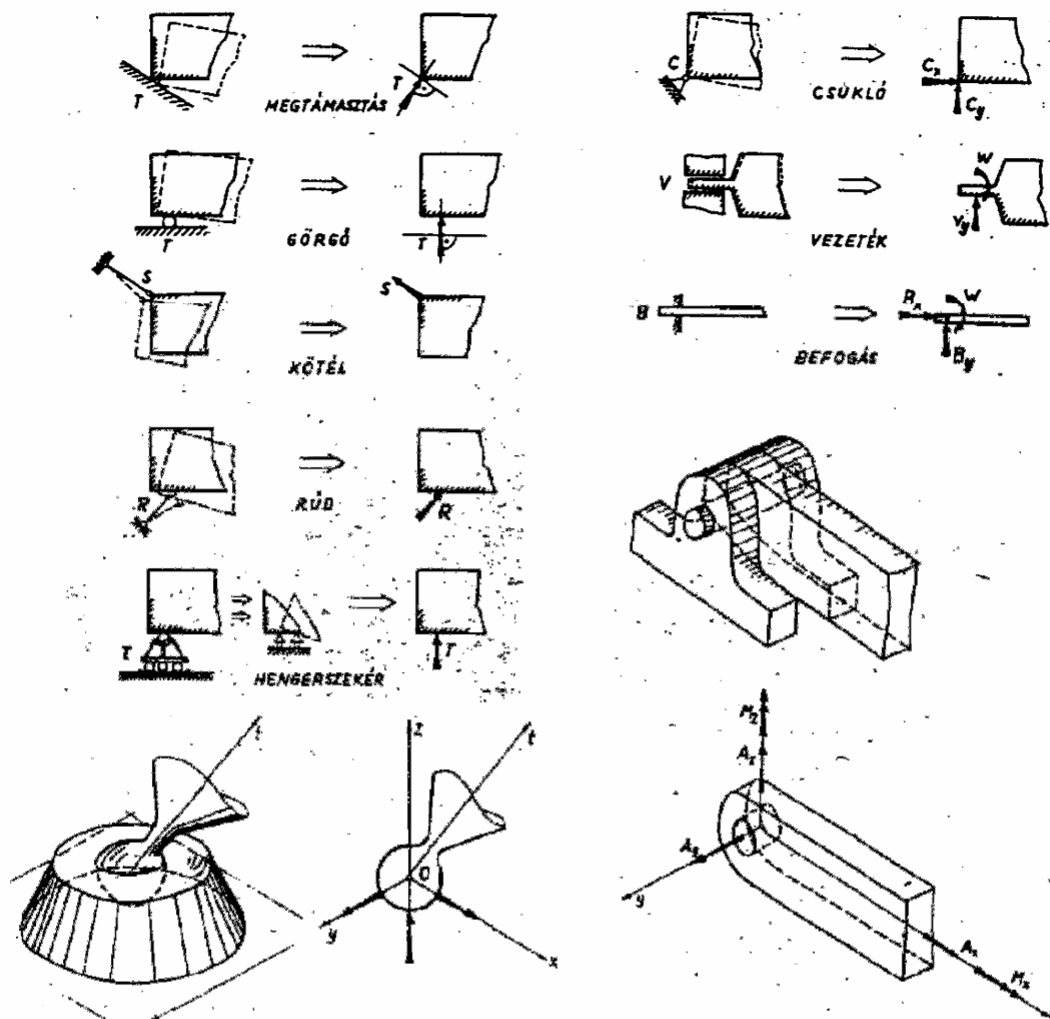
Az egy vagy több testből álló, kényszerekkel összekapcsolt, illetve a földhöz vagy egyéb mozdulatlanak tekintett aljzathoz kötött alakzatokat **szerkezeteknek** nevezzük. A főképpen mozgások megvalósítására alkalmas szerkezeteket **mechanizmusoknak**, a főképpen teherhordásra szolgáló szerkezeteket pedig **tartóknak** hívjuk.



2/7



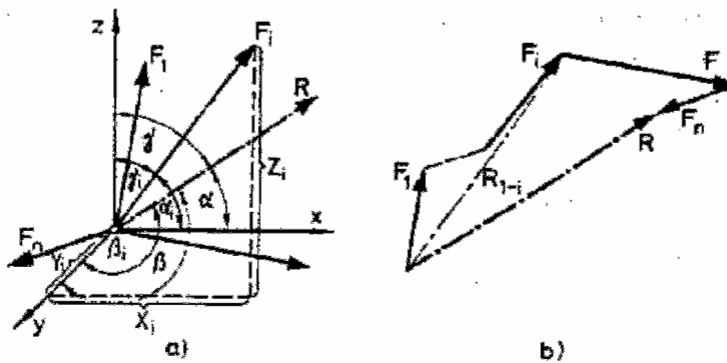
A testeket egymáshoz kapcsoló kényszerek, amelyek az összekötött szerkezeti elemek egymáshoz képesti elmozdulását részben vagy egészben megakadályozzák.



## 2.2. Közös metszéspontú erők

### 2.2.1. Közös metszéspontú erők eredője, egyensúlya

A merev testre ható közös metszéspontú erők eredője a közös metszésponton átmenő  $R$  eredő



$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = R$$

A megoldást grafikusan az ún. vektortétel adja:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{R}, \quad \text{ill. } \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}.$$

Az analitikus megoldást a vetülettétel adja:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= \sum F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha = R_x, \\ \sum F_{iy} &= \sum F_i \cos \beta_i = R \cos \beta = R_y, \\ \sum F_{iz} &= \sum F_i \cos \gamma_i = R \cos \gamma = R_z, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}. \end{aligned}$$

Síkbeli erőrendszer esetén, pl. [xy] síkban:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} &= \sum F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha = R_x, \\ \sum F_{iy} &= \sum F_i \cos \beta_i = R \cos \beta = R_y, \\ R &= \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \end{aligned}$$

Közös metszéspontú egyensúlyi erőrendszer esetében az erőrendszer eredője zérus erő

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n) = \mathbf{R} = 0$$

Vektortétel:

$$\sum \mathbf{F}_i = 0.$$

Vetülettétel:

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum F_{iz} = 0.$$

### 2.2.2 Erőpárok összetétele és egyensúlya

Az erőpárok mint nyomatékvektorok ( $\mathbf{M}_i$ ) önmagukkal párhuzamosan tetszőleges pontba áthelyezhetők és itt úgy kezelhetők, mint közös metszéspontú erők.

$$(\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \dots, \mathbf{M}_n) = \mathbf{M}$$

Vektortétel:

$$\sum \mathbf{M}_i = \mathbf{M}.$$

Vetülettétel:

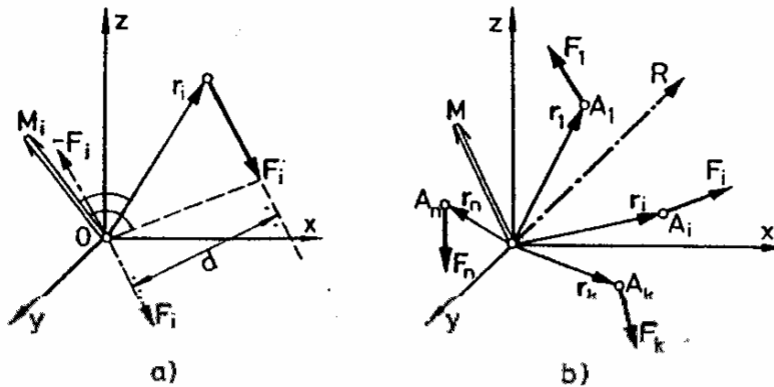
$$\begin{aligned} \sum M_{ix} &= M_x = M \cos \lambda, \\ \sum M_{iy} &= M_y = M \cos \mu, \\ \sum M_{iz} &= M_z = M \cos \nu, \\ M &= \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}. \end{aligned}$$

Egyensúly esetén:

$$\sum \mathbf{M}_i = 0, \quad \text{illetve } \sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0, \quad \sum M_{iz} = 0.$$

## 2.3. Szétszórt erők

### 2.3.1. Szétszórt térbeli erők összetétele



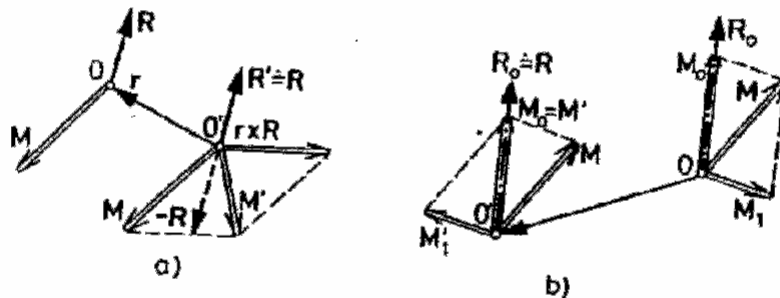
Az  $F_1, F_2, \dots, F_n$  általános térbeli erőrendszer erőit külön-külön áthelyezve a tér egy tetszőleges  $O$  pontjába, minden  $F_i$  erő egy-egy  $F_i, M_i$  az  $O$  ponton átmenő társvektorrendszerre redukálható. A közös metszéspontú  $F_i$  erővektorok vektortétel alapján egyetlen  $R$  eredővektorra tehetők össze, azaz

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) = (R, M), \text{ ahol}$$

$$\sum F_i = R, \quad \sum M_i = \sum r_i \times F_i = M.$$

Ha a redukálást a tér más-más pontjaira végezzük el, akkor az  $M$  vektor más és más pl.  $M'$  lesz, ugyanakkor

$$RM = RM'$$



Az  $M$  társvektort bontjuk fel az  $M_0$  és reá merőleges  $M_1$  komponensekre. Ekkor

$$RM = R(M_0 + M_1) = RM_0,$$

mivel  $RM_1 = 0$  a két merőleges vektor miatt. Az  $M_1$  vektor az  $R$  vektort párhuzamosan az  $O'$  pontba tolja el így végül is az  $R, M$  társvektorok az  $O'$  pontban  $R_0, M_0$  különleges társvektorrendszerre, erőcsavarrá redukálhatók, az eredő egyenes az ún. **centrális tengely**, melynek vektoregyenlete.

$$M - r \times R = pR \text{ és } p = \frac{RM}{R^2}.$$

Az erőrendszer eredője erőcsavar ha:

$$R \neq 0, \quad M \neq 0, \quad \text{és } RM \neq 0.$$

Az eredő erő ha:

$$R \neq 0 \quad \text{de } RM = 0.$$

Az eredő erőpárral egyenértékű ha:

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} \neq 0.$$

Az erőrendszer egyensúlyban van ha:

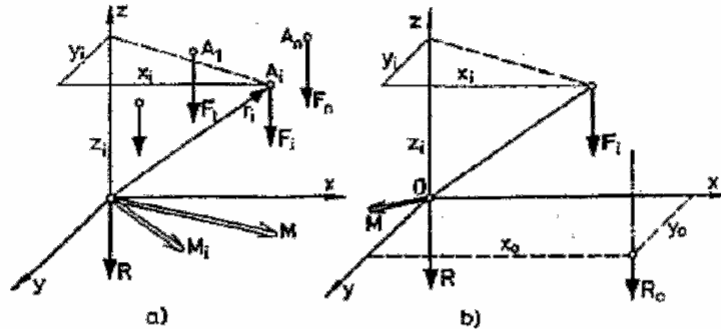
$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} = 0,$$

azaz

$$\sum \mathbf{F}_i = 0 \quad \sum \mathbf{M}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) = 0$$

### 2.3.2 Párhuzamos térbeli erők

Ebben az esetben a társvektorok erőcsavart nem alkothatnak



Az eredő erő esetén:

$$\mathbf{R} \neq 0 \quad \text{azaz} \quad \sum \mathbf{F}_i = \mathbf{R}, \quad \sum \mathbf{M}_i = \sum (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i).$$

Az eredő erőpár esetén:

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} \neq 0.$$

Egyensúly esetén:

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} = 0.$$

### 2.3.3 Szétszórt síkbeli erők

Az analitikus megoldás alapját a vetülettétel és nyomatéktétel adja

Eredő esetén:

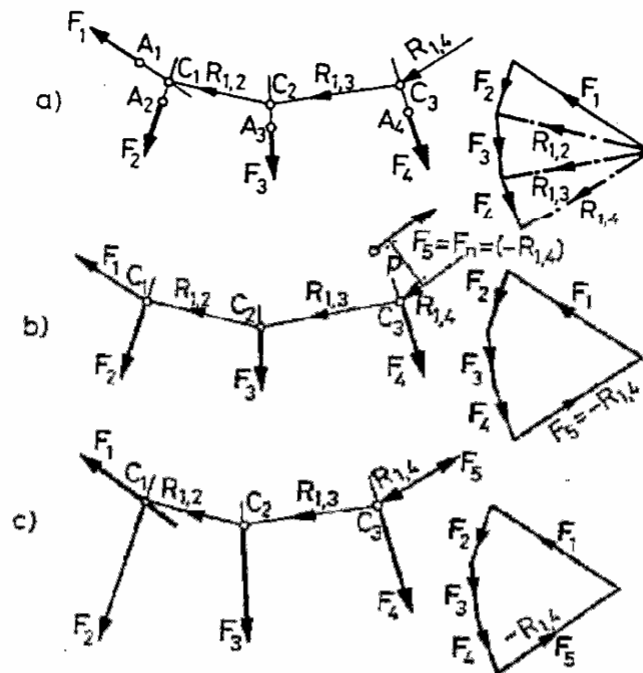
$$\begin{aligned} \mathbf{R} &\neq 0, \\ \sum F_{ix} &= R \cos \alpha = R_x, \\ \sum F_{iy} &= R \sin \alpha = R_y, \\ \sum M_i &= M = R \cdot r, \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}. \end{aligned}$$

Eredő erőpár esetén:

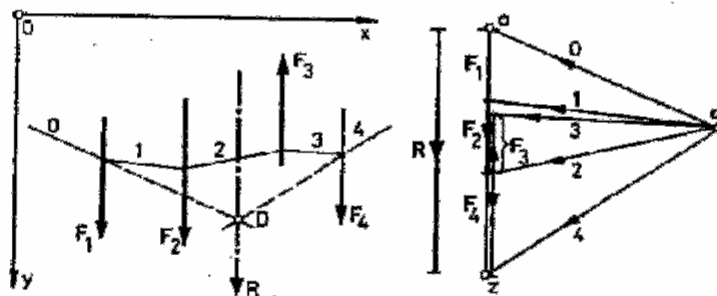
$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= 0, \quad \mathbf{M} \neq 0, \\ \sum F_{ix} &= 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i = M. \end{aligned}$$

Egyensúly esetén:

$$\mathbf{R} = 0, \quad \mathbf{M} = 0, \\ \sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_i = 0.$$



2.3.4. Párhuzamos síkbeli erők



Eredő erő esetén:

$$\sum F_i \neq 0 = R, \quad \sum M_i = \sum F_i x_i = M = R \cdot x, \\ x_R = \frac{\sum F_i x_i}{\sum F_i}$$

Eredő erőpár esetén:

$$\sum F_i = 0, \quad \text{de } M \neq 0, \quad M = \sum F_i x_i$$

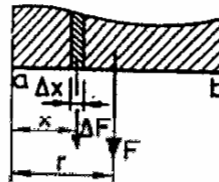
Egyensúly esetén:

$$\sum F_i = 0, \quad M = \sum M_i = \sum F_i x_i = 0.$$

2.3.5. Síkbeli megoszló erők

Ha minden határon túl csökkentjük a párhuzamos erők nagyságát ( $\Delta F$ ) és egymástóli távolságát ( $\Delta x$ ) - az eredőjük megtartása mellett - azok számát pedig növeljük, akkor jutunk a határátmenetre való áttéréssel a párhuzamos megoszló teher, a megoszló erő fogalmához:

$$p(x) = \lim \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$



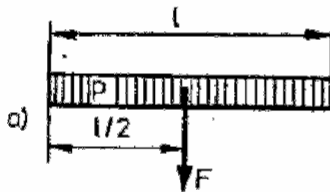
Ha  $p(x)$  fajlagos erő mint  $x$  hely függvénye legalábbis szakaszosan integrálható, erre a szakaszra nézve

$$F = \int_a^b p(x) dx$$

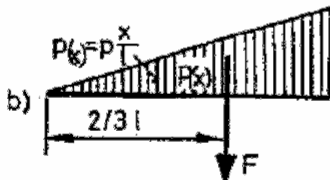
az eredő helye pedig

$$r = \frac{\int p(x)x dx}{\int p(x) dx}$$

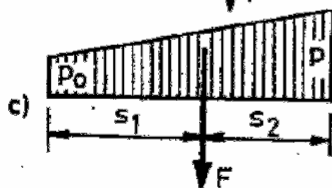
Néhány gyakorlati esetben:



$$p(x) = \text{állandó} \quad F = p\ell$$

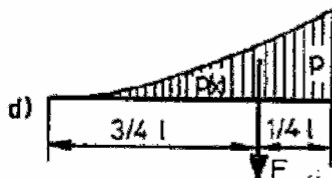


$$p(x) = p \frac{x}{\ell} \quad F = \frac{1}{2} p\ell$$

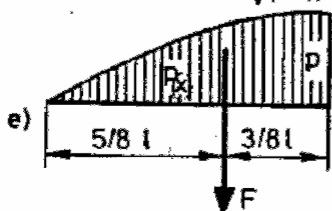


$$s_1 = \frac{1}{3} \frac{p_0 + 2p}{p_0 + p} \quad s_2 = \frac{1}{3} \frac{2p_0 + p}{p_0 + p}$$

$$F = \frac{1}{2} (p_0 + p)\ell$$



$$p(x) = p \left( \frac{x}{\ell} \right)^2 \quad F = \frac{1}{3} p\ell$$

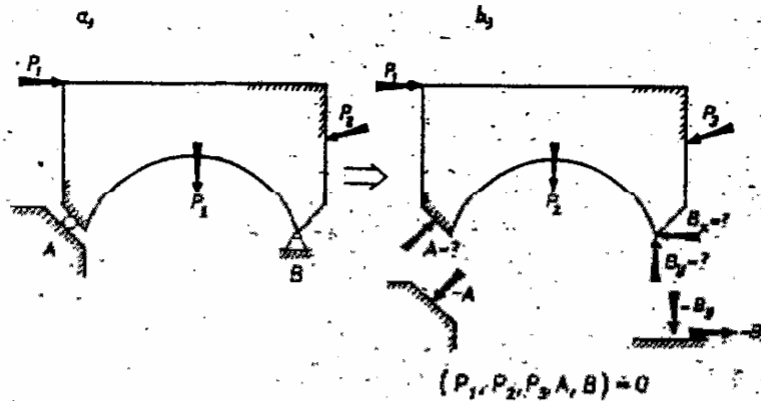


$$p(x) = \frac{p}{l} \left( 2 - \frac{x}{\ell} \right), \quad F = \frac{2}{3} p\ell$$

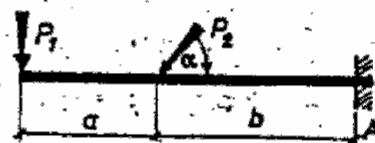
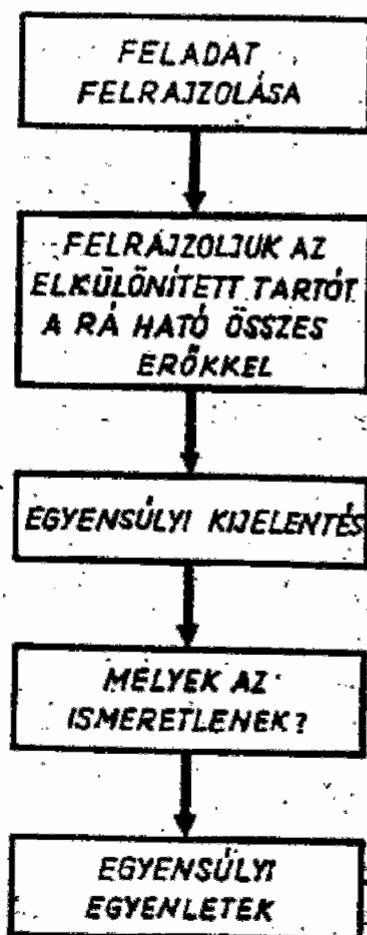
## 2.4. Síkbeli szerkezetek

## 2.4.1. Egy merev testből álló szerkezet egyensúlya

A vizsgálatainkat az ún. elkülönítés elve alapján végezzük. E szerint a síkbeli testet (tárcsát) képzeletben elválasztjuk a kényszereitől és azt az aktív és passzív erőkkel egyaránt terhelt merev testnek tekintjük



A szerkezetnek egyensúlyban kell lennie, így a felírt egyensúlyi egyenletek segítségével az ismeretlen reakció-erők számíthatók.



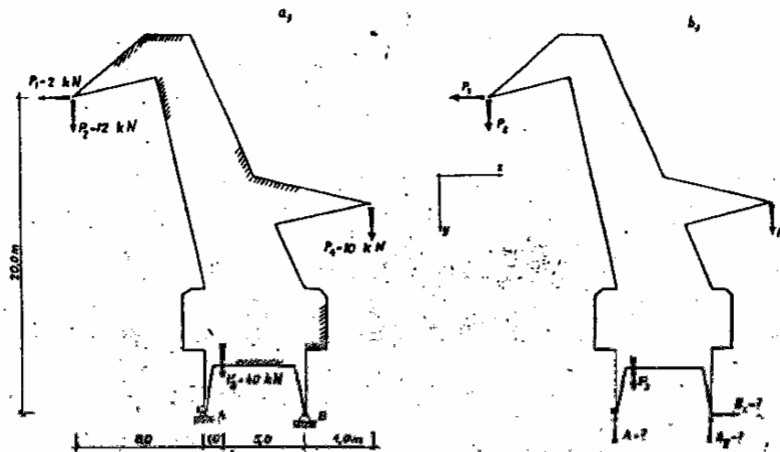
$$(P_1, P_2, A_x, A_y, W_A) = 0$$

$$A_x = ? \quad A_y = ? \quad W_A = ?$$

$$\begin{aligned} \sum P_{i,x} = 0 & \quad \sum P_{i,y} = 0 & \quad \sum M_i^{(A)} = 0 \\ A_x = \dots & \quad A_y = \dots & \quad W_A = \dots \end{aligned}$$



## Általános erőrendszerrel terhelt kéttámaszú tartó (bakdaru)



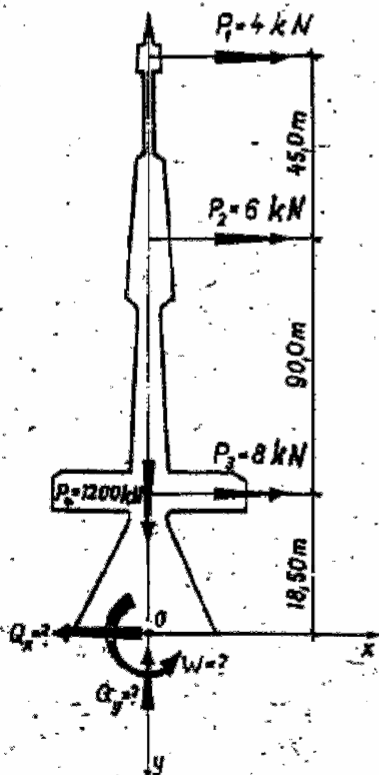
$$(P_1, P_2, P_3, P_4, A, B) = 0$$

$$\sum M_i^{(B)} = -2 \cdot 20 - 12 \cdot 14 - 40 \cdot 5 + 10 \cdot 4 + A \cdot 6 = 0 \rightarrow A = \underline{61,33 \text{ kN}(\uparrow)}$$

$$\sum F_x = -2 + B_x = 0 \rightarrow B_x = \underline{2 \text{ kN}(\rightarrow)}$$

$$\sum F_y = 12 + 40 + 10 - 61,33 - B_y = 0 \rightarrow B_y = \underline{0,67 \text{ kN}(\uparrow)}$$

## Alul befogott tartó (TV torony)



$$(P_1, P_2, P_3, P_4, Q_x, Q_y, W) = 0$$

$$\sum F_x = 4 + 6 + 8 - Q_x = 0$$

$$Q_x = \underline{18 \text{ kN}(\leftarrow)}$$

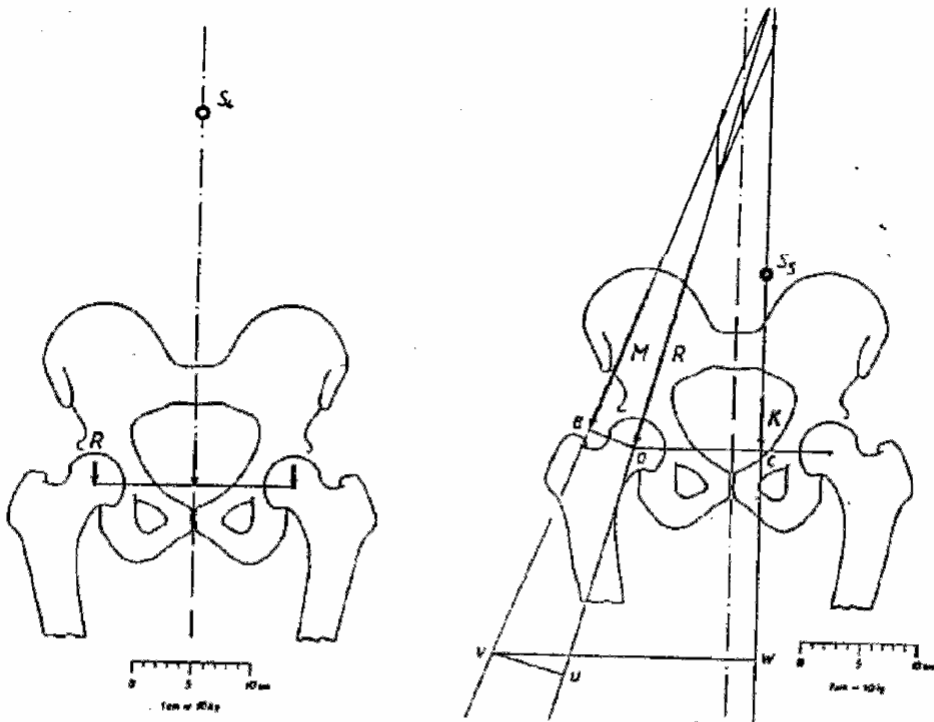
$$\sum F_y = 1200 - Q_y = 0$$

$$Q_y = \underline{1200 \text{ kN}(\uparrow)}$$

$$\sum M_i^{(0)} = 4 \cdot 153,5 + 6 \cdot 108,5 + 8 \cdot 18,5 - W = 0$$

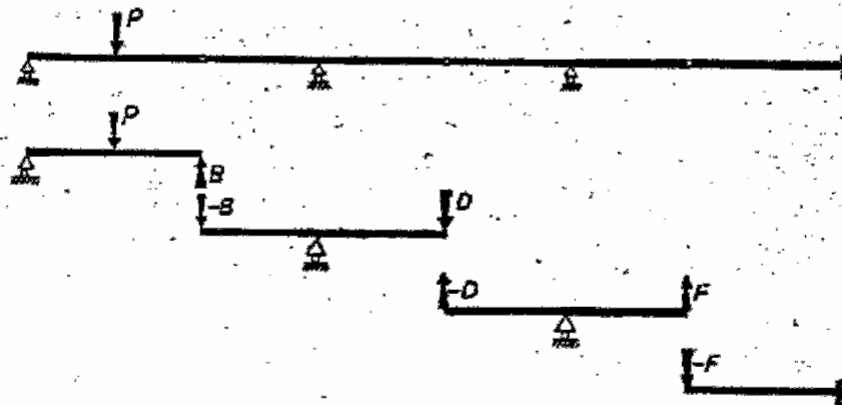
$$W = \underline{1413 \text{ kNm}(\rightarrow)}$$

A femurfejre ható erők ha a támasz szimmetrikus (két lábon állás), illetve a járás közbeni olyan pillanatban, ha egy lábon támaszkodik a test. Az előbbi esetben a femurt a testsúly fele, míg utóbbi esetben jelentős izomerők mellett a testsúly többszöröse terheli.



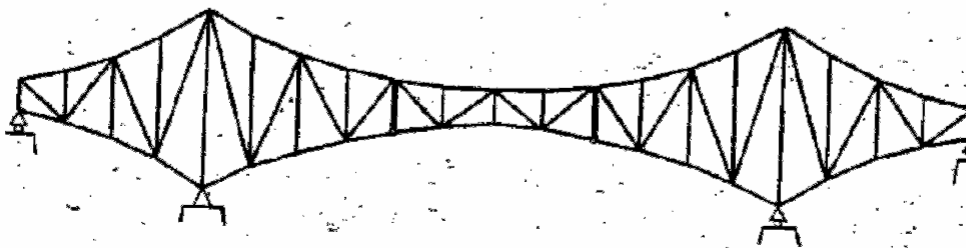
### 2.4.2 Összetett szerkezetek

Az elkülönítés elve alkalmazásával, testenkénti egyensúlyi egyenletek felírásával juthatunk a megoldáshoz.

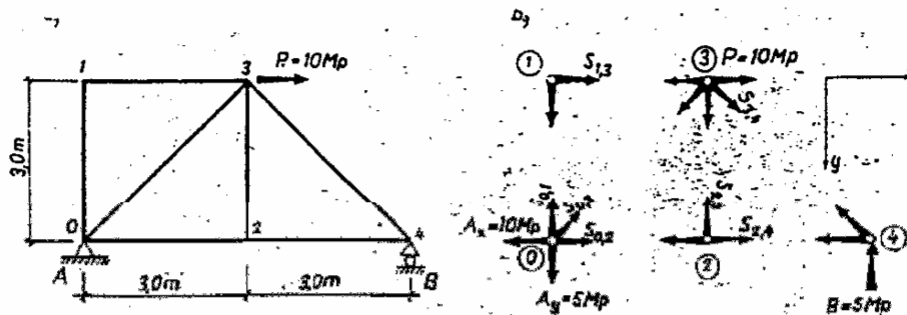


### 2.4.3 Rácsos tartók

Az olyan összetett szerkezeteket, amelyeknek elemeit csakis a testek két-két végén elhelyezett csuklók kapcsolják mind egymáshoz, mind az aljathoz, rácsos tartóknak nevezzük.



A rácsos tartók külső erőit a csuklókon működőnek tekintjük, így egy-egy szerkezeti elemét mindig csak a két csuklóerő terheli, így hatásvonaluk megegyezik a rúd tengelyével. A rácsos tartó nem más mint egy különleges elrendezésű összetett szerkezet. Az elkülönítés elve alkalmazásával az egyes csomópontokat közös metszéspontú erők terhelik, így a két-két vetületi egyenlet felírásával az ismeretlen rúderők számíthatók



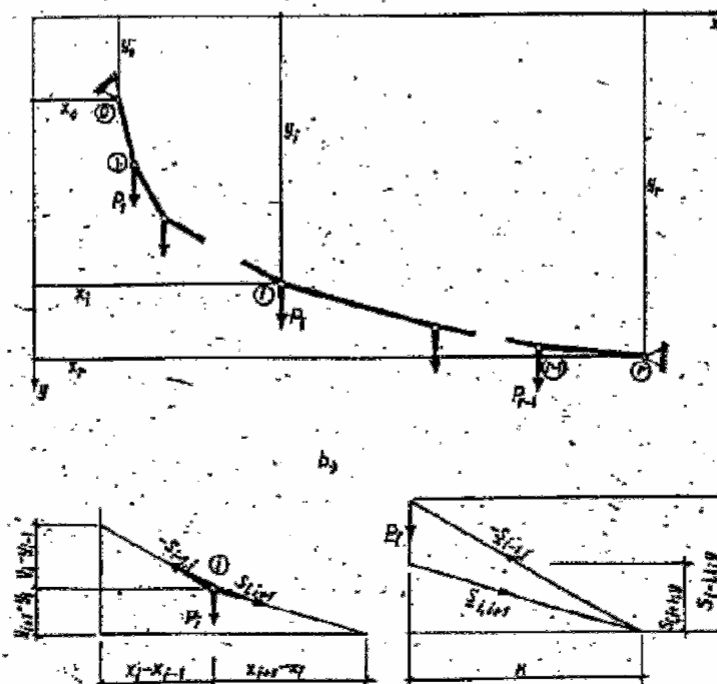
A külső reakcióerők meghatározása (ld. 2.4.1) után pl. a 4 jeli csomópont egyensúlyának vizsgálata, a  $\sum F_{ix} = 0$  és  $\sum F_{iy} = 0$  egyenletek felírása és megoldása szolgáltatja a  $S_{24}$  és  $S_{34}$  rúderőket. Ezek után rátérhetünk a következő csomópont vizsgálatára.

### 2.5.4 Rúdlánc, kötél

Ha több rudat csuklókkal sorba kapcsolunk, rúdlánc keletkezik, amelynek elejét és végét szintén csuklókkal kötik az aljzathoz. A csuklókon terhelt rúdlánc belső kényszererői mind rúderők. A rúdlánc statikailag túlhatározott, elmozduló szerkezet.

Ha a terhet és alakját ismerjük kérdés, hogy nyugalomban marad a szerkezet az adott terhek hatására, az adott alakban? Ha az alak kötött, de a terhet nem ismerjük teljesen, miként kell megállapítani a teher ismeretlen komponenseit, hogy egyensúly legyen? Ha előírjuk a terhet, de az alakot nem ismerjük teljesen, hogyan lehet meghatározni a rúdlánc egyensúlyi alakját?

Függőtartók rúdláncainak számításánál csak függőleges terhek lépnek fel.

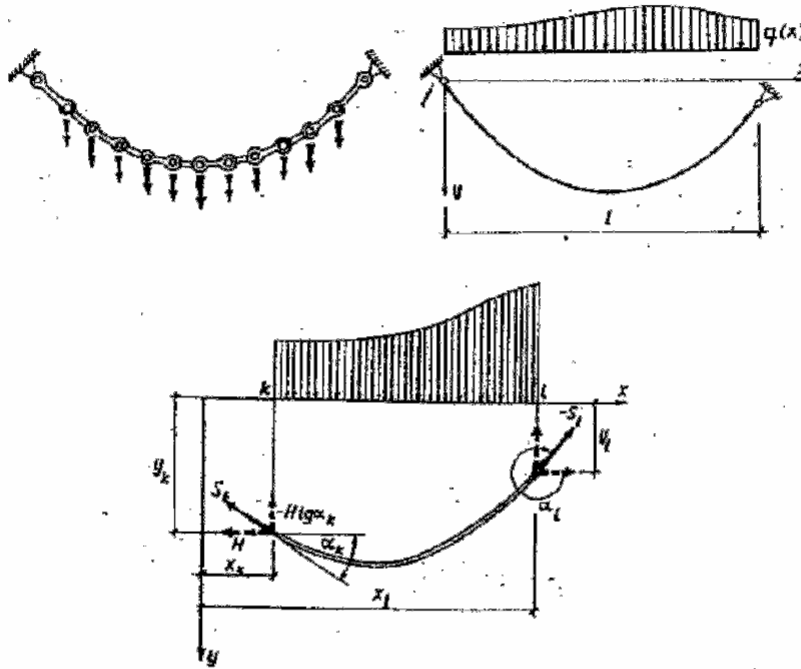


Az egyensúlyi alak keresésekor a  $r$  számú rúdból álló rúdlánc  $P_1, P_2, \dots, P_{r-1}$  csomóponti terheit, a belső csomópontok  $x$  koordinátáit és a végpont mindkét koordinátáját ismerjük. Megállapítandók az  $y$  koordináták. A belső csuklók egyensúlyából ( $\sum F_{ix} = 0$ ) következik, hogy a rúderővektorok vízszintes vetülete azonos, legyen  $H$ . A függőleges vetületi egyenletek a

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{y_i - y_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} = -\frac{P_i}{H} \quad i = 1, 2, \dots, r-1$$

differencia egyenletrendszer adják, amely megoldás szolgáltatja az  $y$  koordinátákat.

A végtelen sok lánctagból álló rúdlánc határátmenetben a folytonos szerkezethez, a kötélhez vezet.



Egy kötélrész egyensúlyának vizsgálatával a kötélgörbe differenciálegyenletéhez jutunk.

$$y'' = -\frac{1}{H} q(x)$$

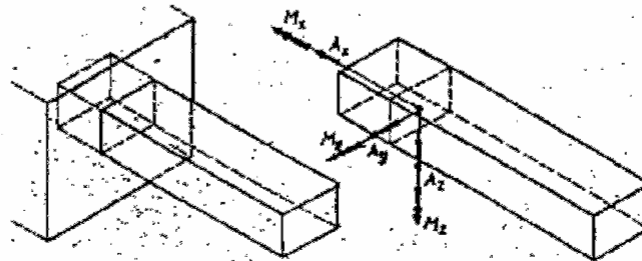
### 2.5. Térbeli szerkezetek

Egy vagy több merev testből kialakított, kényszerekkel ellátott, a térben elhelyezkedő alakzatot térbeli szerkezetnek nevezünk.

A térbeli befogott tartó három reakcióerő és három reakció nyomaték komponense a

$$\sum F_{ix} = 0, \quad \sum F_{iy} = 0, \quad \sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0 \quad \text{és} \quad \sum M_{iz} = 0$$

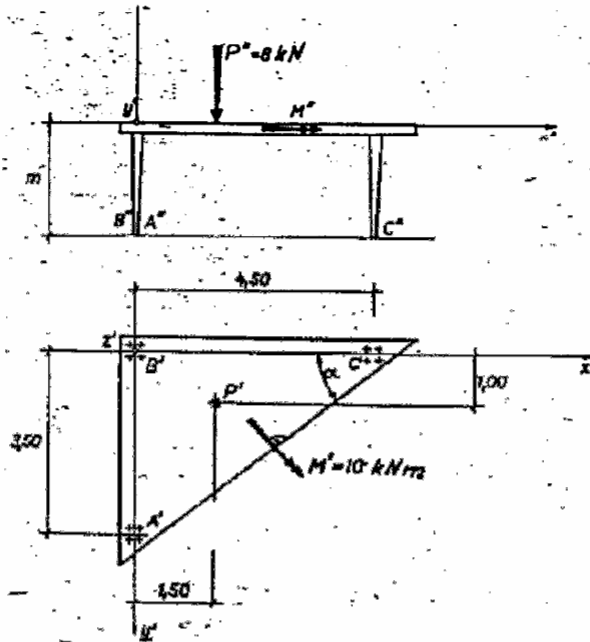
egyensúlyi egyenletekből számíthatók.



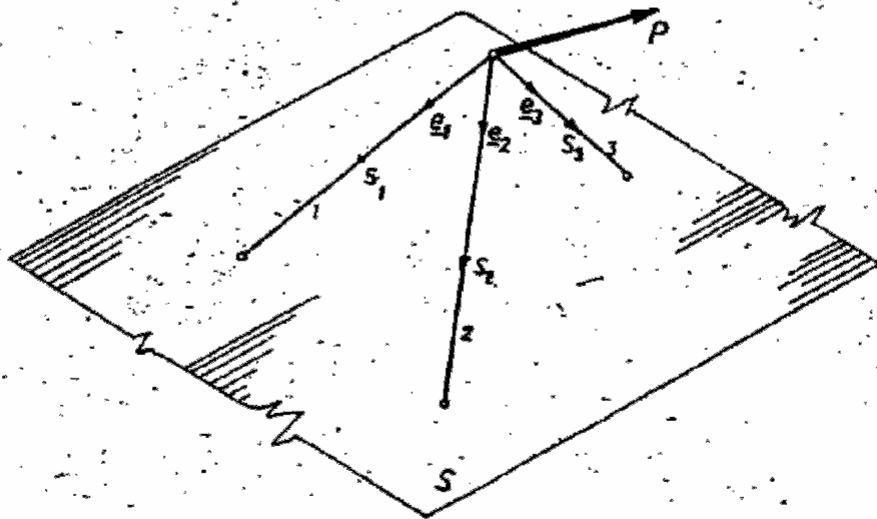
Párhuzamos térbeli erőrendszer esetén (háromlábú asztal) a három ismeretlen z irányú reakcióerő (A, B és C) értékei nyomatéki, illetve vetületi egyenletekből számíthatók.

$$(P, M, A, B, C) = 0$$

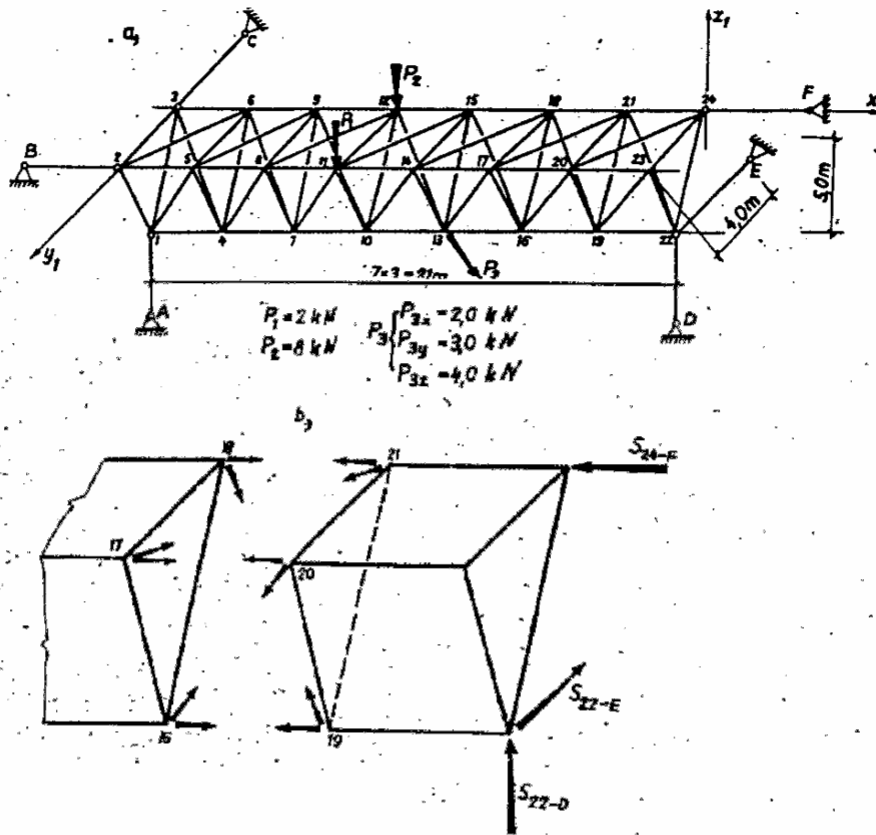
$$\sum M_{ix} = 0, \quad \sum M_{iy} = 0 \quad \text{és} \quad \sum F_{iz} = 0.$$



A háromlábú bakállvány közös metszéspontú erőket eredményez, így a  $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$  és  $\sum F_{iz} = 0$  egyenleteket kell használnunk.



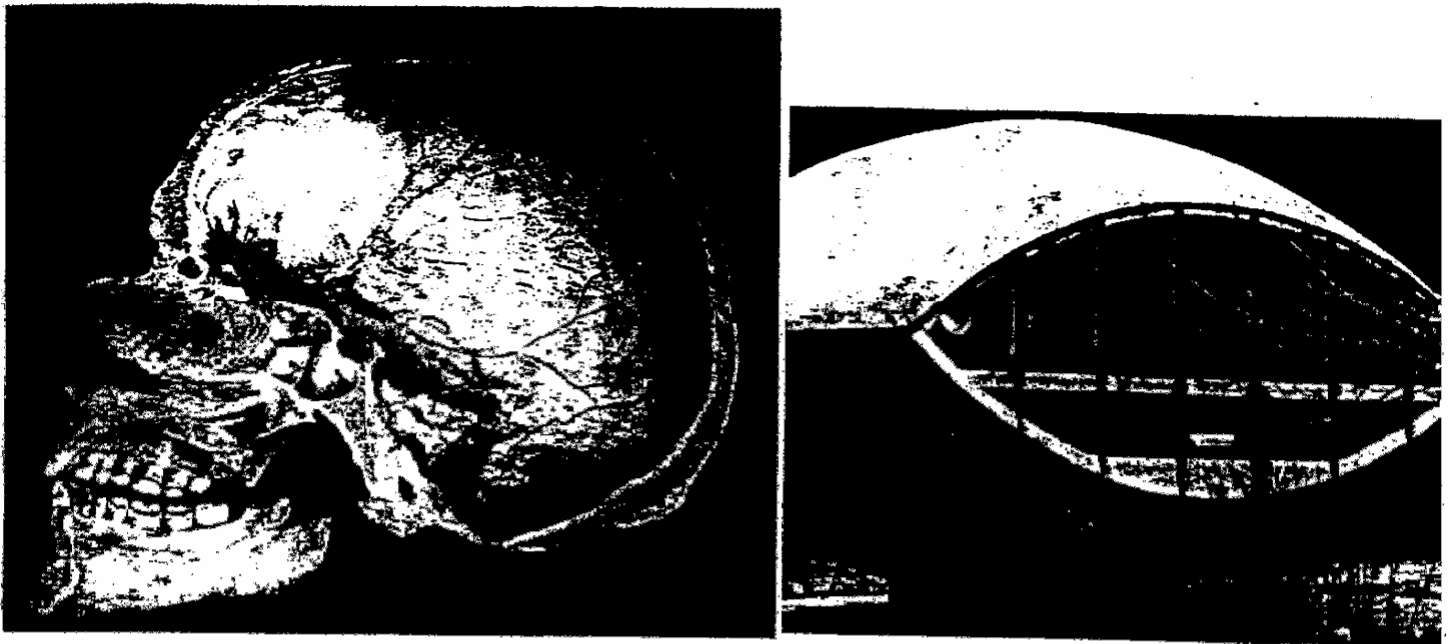
A térbeli rácsos szerkezet külső megtámasztó rúderői (6) az egész szerkezet egyensúlyi vizsgálatából (6 független egyenlet), a belső rúderői a szerkezet darabolása és a részek egyensúlyi vizsgálataiból számíthatók.



A természetben is találunk az épített szerkezethez hasonló térbeli szerkezeteket. Melyik volt előbb?!

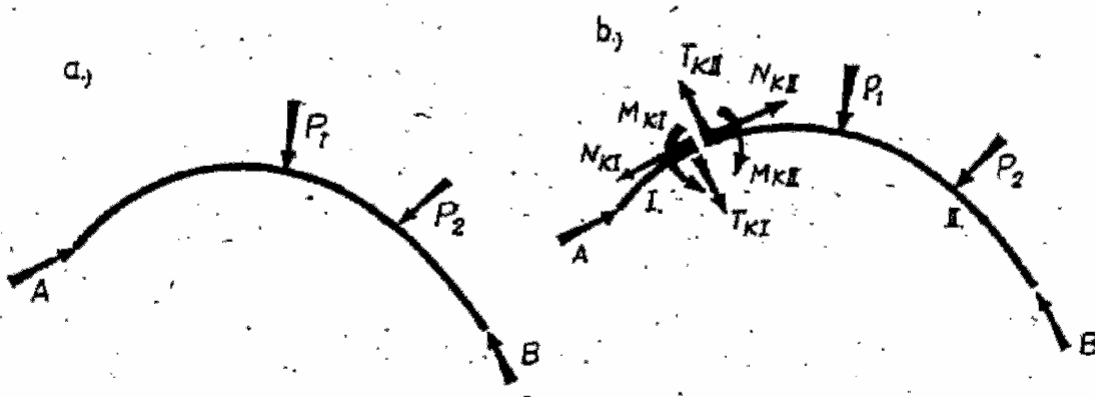


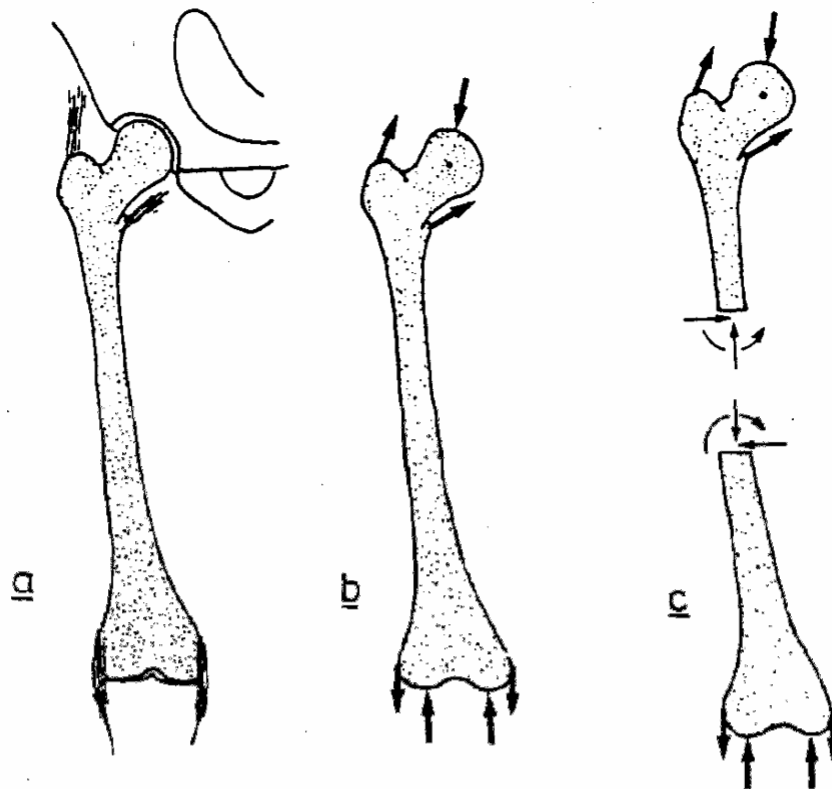
Az agykoponya tulajdonképpen egy héjszerkezet. Ezen szerkezetek számítása kézi eszközökkel már nem végezhető el.



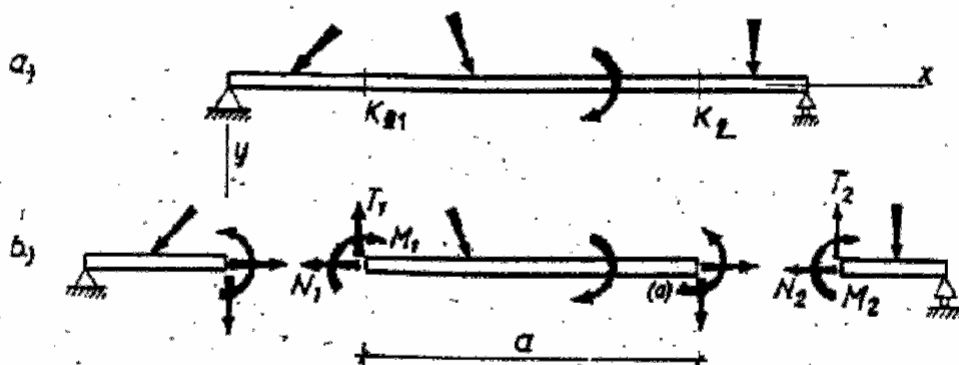
### 2.6 Igénybevételi ábrák

A tartót bármely helyén kettémetszve, ha az eredetileg nyugalomban volt, akkor mindkét darabjának is nyugalomban kell lennie. A metszeten a tartó összefügg - nincs közöttük relatív elmozdulás, így mindkét tartórész kényszerrel gyakorol a másikra, a tartó egyik darabja a másikba befogott. Ezeket a belső kényszererőket igénybevételeknek nevezzük. A tengelyirányú erőkomponens a normál-, az erre merőleges a nyírőerő, míg a nyomatéki komponens hajlítónyomatéknak nevezzük. (N,T,M)





Vizsgáljuk egy tartó közbenső darabját, amit a bal- és jobboldali résztől is elkülönítettünk. Ekkor a szakaszt terhelő külső erőkön kívül a bal oldali határoló keresztmetszetén működő igénybevételi komponenseket és a jobb oldali határoló keresztmetszet igénybevételének ellentétjét is figyelembe kell vennünk.



A szakasz két végén fellépő igénybevételek között, - az egyensúlyi egyenletek felírása következtében -, az alábbi összefüggések állnak fenn:

$$N_2 - N_1 = - \sum F_{x, \text{ra}}$$

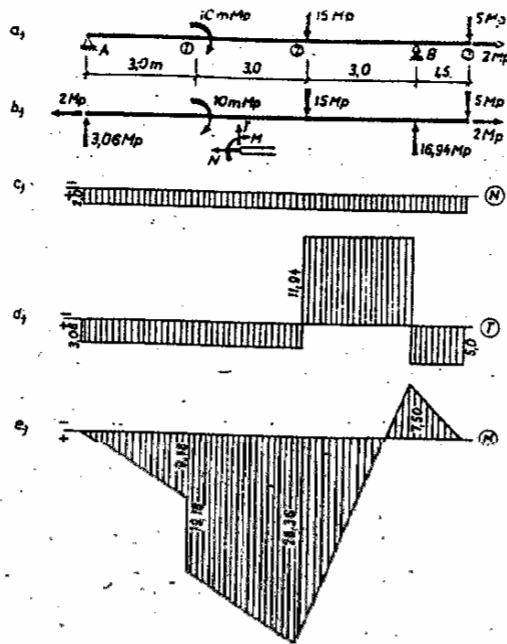
$$T_2 - T_1 = - \sum F_{y, \text{ra}}$$

$$M_2 - M_1 = \sum M_{i, a}^{(0)} + aT_1$$

Vizsgáljuk ezután egy  $p_y(x)$ ,  $p_x(x)$  teherfüggvénnyel terhelt rúd  $dx$  hosszúságú darabját. Az  $N$ ,  $T$ ,  $M$  igénybevételek az  $x$  függvényei

$$N = N(x), \quad T = T(x) \quad \text{és} \quad M = M(x).$$





A jobb oldali homloklapra ható erők csak differenciálisan különböznek, Taylor szerinti sorfejtésben csak az elsőrendű differenciálokat vesszük figyelembe, akkor az értékük az ábrán láthatók. Az egyensúlyi egyenletek ( $\sum F_{ix} = 0$ ,  $\sum F_{iy} = 0$ ,  $\sum M_i^{(0)} = 0$ ) felírásával az ún. differenciális összefüggésekre jutunk.

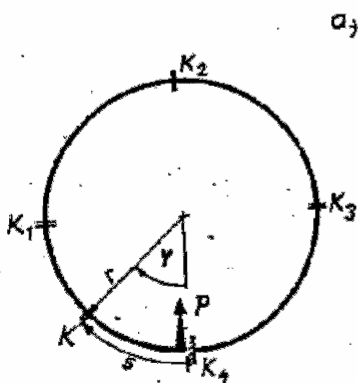
$$\frac{dN}{dx} = N' = -p_x, \quad \frac{dT}{dx} = T' = -p_y, \quad \frac{dM}{dx} = M' = T$$

$$(M')' = T' = -p_y \quad M'' = -p_y$$

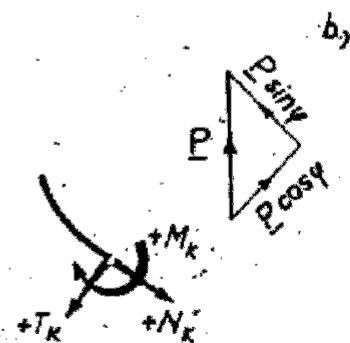
Ezek szerint a hajlítónyomaték-függvény deriváltja a nyírőerő-függvény. A nyírőerő-, illetve normálerőfüggvény deriváltja a megfelelő teherkomponens-függvény ellentetje.

Ha kiszámítjuk a differenciális összefüggések segítségével a tartó néhány keresztmetszetében az igénybevételeket, akkor az ún. igénybevételi ábrák megrajzolhatók.

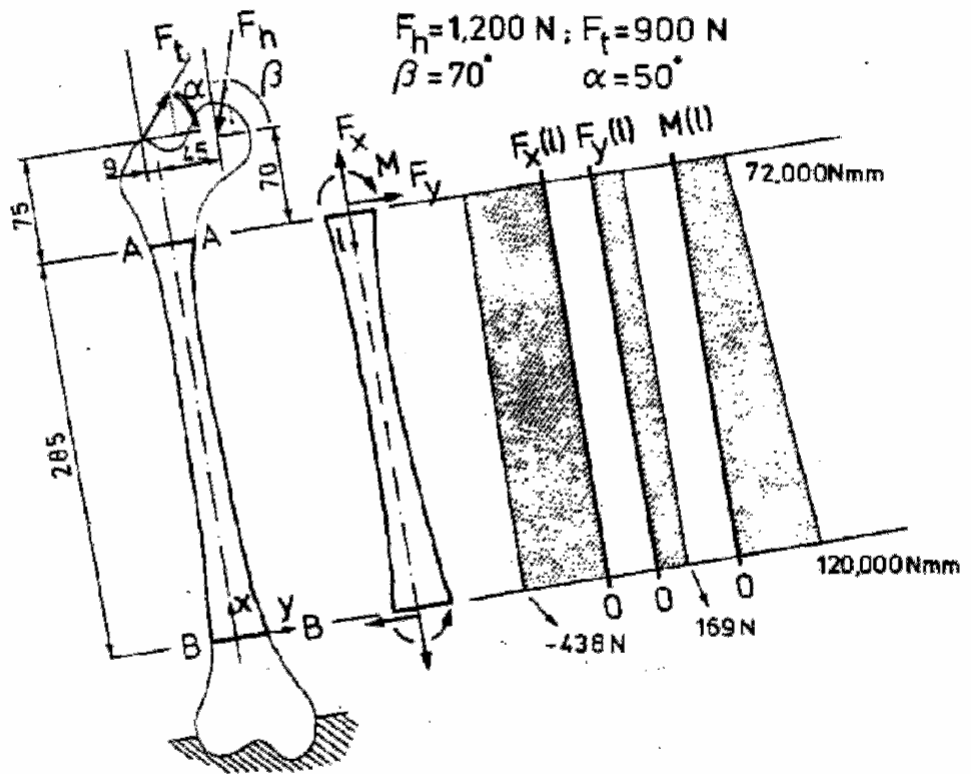
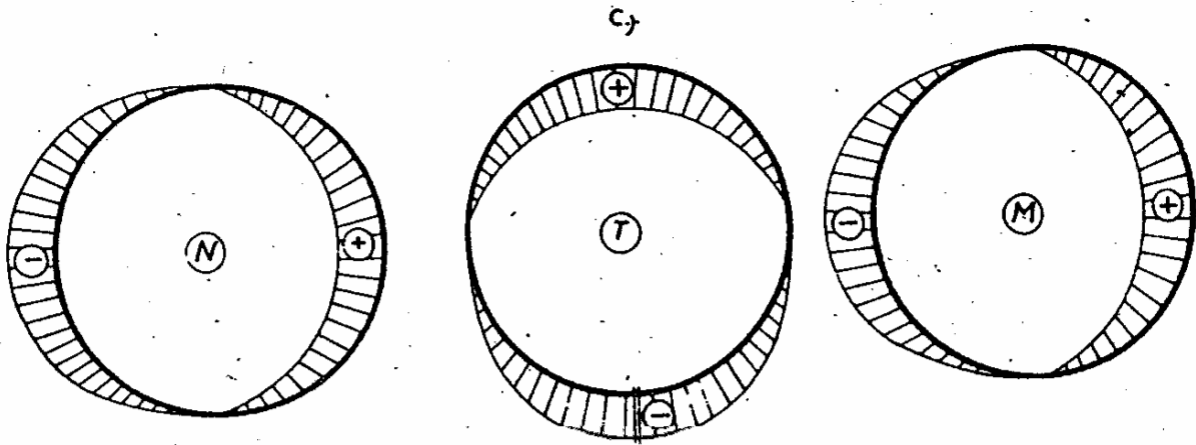
2/26



4.6/a ábra



4.6/b ábra



**Irodalom a 2. fejezethez**

- Árvay - Roller: Épitési Mechanika J-9-980  
 Tamássy - Szentiványi: Statikai példatár J-9-1094  
 Palotás: Mérnöki kézikönyv I. Műszaki Könyvkiadó

### 3. SZILÁRDSÁGTANI ALAPOK

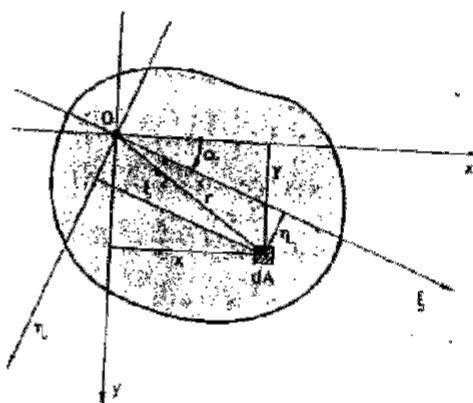
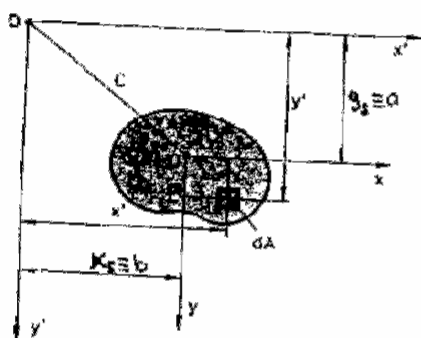
#### 3.1 Szilárd test állapotának jellemzői

##### 3.1.1 Keresztmetszetek geometriai jellemzői

A keresztmetszet területét, valamint az elsőrendű, ún. statikai nyomatékait és a súlypont koordinátáit az alábbi kifejezések adják

$$A = \int_A dA \text{ [cm}^2\text{]}, \quad S_x = \int_A y' dA \text{ [cm}^3\text{]}, \quad S_y = \int_A x' dA \text{ [cm}^3\text{]},$$

$$x_s = \frac{S_y}{A} = \frac{\int_A x' dA}{\int_A dA}, \quad y_s = \frac{S_x}{A} = \frac{\int_A y' dA}{\int_A dA}$$



A súlyponton átmenő tengelyre számított statikai nyomaték zérus. A síkidomok  $x$ , ill.  $y$  tengelyre vonatkozó tehetetlenségi vagy inercia nyomatékát az

$$I_x = \int_A y^2 dA \text{ [cm}^4\text{]}, \quad \text{ill.} \quad I_y = \int_A x^2 dA,$$

az  $x, y$  tengelyekre vonatkozó centrifugális nyomatékát a

$$C_{xy} = C_{yx} = \int_A xy dA$$

és a koordinátarendszer kezdőpontjára vonatkozó poláris tehetetlenségi nyomatékát az

$$I_o = \int_A r^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = I_x + I_y$$

kifejezés adja.

Koordinátarendszer eltolása esetén:

$$I_{x'} = I_x + a^2 A, \quad I_{y'} = I_y + b^2 A, \quad C_{x'y'} = C_{xy} + abA.$$

Koordinátarendszer elforgatása esetén

$$I_{\xi} = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - C_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$I_{\zeta} = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cos 2\alpha - C_{xy} \sin 2\alpha,$$

$$C_{\xi\zeta} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + C_{xy} \cos 2\alpha.$$

Valamely síkidom bármely pontjában található legalább egy olyan (a síkidom síkjában lévő) derékszögű tengelypár, amelyre a síkidom centrifugális nyomatéka zérus, a két inercianyomaték pedig az illető ponton átmenő tengelyekre számított valamennyi tehetetlenségi nyomaték közül a legnagyobb, illetve a legkisebb. Ezeket a tengelyeket **főtengelyeknek**, a hozzájuk tartozó inercianyomatékokat **tehetetlenségi főnyomatékoknak** ( $I_1, I_2$ ) nevezzük:

$$I_{\max} = I_1 = \frac{I_x + I_y}{2} + \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2},$$

$$C_{12} = 0$$

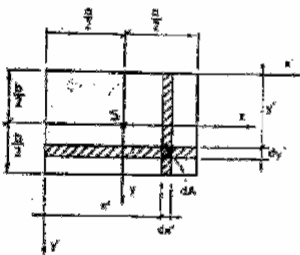
$$I_{\min} = I_2 = \frac{I_x + I_y}{2} - \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2},$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_o = \frac{-2C_{xy}}{I_x - I_y}.$$

ahol  $\alpha_o$  a főtengely irányszöge.

A szimmetria tengely mindig főirány!

Téglalap keresztmetszet:

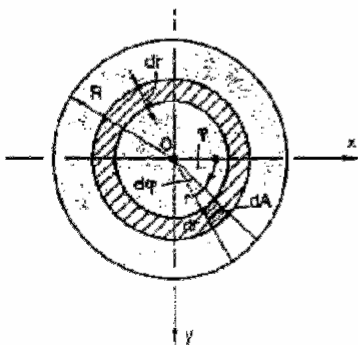


$$I_x = \frac{ab^3}{12}, \quad I_y = \frac{ba^3}{12},$$

$$I_{x'} = \frac{ab^3}{3}, \quad I_{y'} = \frac{ba^3}{3}$$

$$C_{x'y'} = \frac{a^2b^2}{4}.$$

Kör és körgyűrű keresztmetszet:



Kör:

$$I_x = I_y = \frac{\pi R^4}{4}, \quad I_o = \frac{\pi R^4}{2}.$$

Körgyűrű:

$$I_x = I_y = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{4},$$

$$I_o = \frac{\pi(R^4 - r^4)}{2}.$$

## 3.1.2 Szilárdságtani alapfogalmak

A testek a külső erők, illetve más, fizikai jellegű hatások (pl. hőmérséklet-változás) működésekor alakjukat és méreteiket megváltoztatják. Az alakváltozás végzésére képes testeket **szilárd testeknek** hívjuk. A mechanikának a szilárd test alakváltozásainak, elmozdulásainak és feszültségeinek meghatározásával foglalkozó részét **szilárdságtannak** nevezzük.

A szerkezeteknek - és elemeinek - a **szilárdság**, a **merevség** és a **stabilitás** (állékonyság) követelményét kell kielégíteniük, (méretezés - ellenőrzés).

Az anyagok azon fizikai tulajdonságait, amelyek szilárdsági viselkedésüket jellemzik, **szilárdsági tulajdonságoknak** nevezzük.

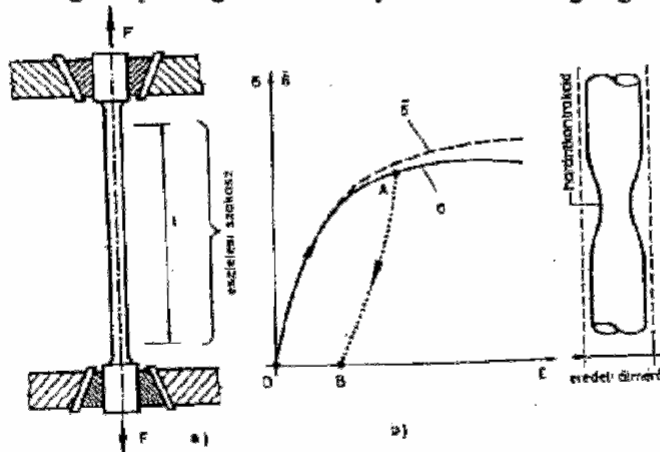
A szilárdságtannak - legalapvetőbb egyszerűsítése az, hogy az anyag azonos, molekuláris és kristályos szerkezetet figyelmen kívül hagyja és a szilárd testet az anyag által hézag- és gyűrődésmentesen, folyamatosan kitöltött közegnek, **kontinuumnak** tekinti, így a test alakváltozásait, elmozdulásait és feszültségeit a test pontjait meghatározó koordináták **folytonos függvényeivel** írja le.

Olyan **anyagmodellek** bevezetésére van szükség, amelyek az illető anyagnak csupán egy vagy néhány - a feladat körülményeinek legjobban megfelelő - tulajdonságát képesek aránylag jó közelítéssel jellemezni és a szóban forgó vizsgálat szempontjából kevésbé fontos jelenségeket teljesen figyelmen kívül hagyják.

Ha a szilárdsági tulajdonságok a test minden pontjában azonosak akkor **homogén testről**, ha különbözőek, akkor **inhomogén testről** beszélünk. Azokat az anyagokat, amelyek szilárdsági viselkedése a test minden pontjában azonos ugyan, de az egyes pontokban az iránytól függően változó **anizotróp** anyagoknak nevezzük, ha viszont a szilárdsági tulajdonságok minden irányban azonosak, akkor **izotróp** anyagról beszélünk. A szilárdsági tulajdonságok lehetnek a **hőmérséklettől függőek** vagy **függetlenek**. Az anyag viselkedése lehet az **időtől függő** vagy **független**. Az anyag viselkedését az is befolyásolhatja, hogy megelőzően milyen terhek működtek rá, milyen **terhelési út** eredményeként jutott el az anyag pillanatnyi állapotába. Az ilyen anyagokat **terhelési úttól függő**, egyébként **terhelési úttól független** anyagoknak nevezzük.

A továbbiakban általában feltételezzük, hogy a vizsgált testek **homogének** és **anyaguk izotróp**, **hőmérséklettől, időtől és terhelési úttól független**.

Az anyagok szilárdsági tulajdonságait húzó- és nyomókísérletek segítségével vizsgálhatjuk.



Terheletlen állapotban a keresztmetszeti terület  $A_0$ , az észlelési szakasz hossza  $l_0$ , a kísérlet során a észlelési szakasz  $\Delta l = l - l_0$  megnyúlása meghatározható. Az egységnyi keresztmetszeti területre működő húzóerő, a **húzófeszültség** és az egységnyi hosszúságú szakasz megnyúlása, és **fajlagos nyúlás** a

$$\sigma = \frac{F}{A_0} \quad \left[ \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \text{Pa} \right], \quad \varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad [-]$$

képletekből nyerhető.

### 3. Szilárdságtani alapok

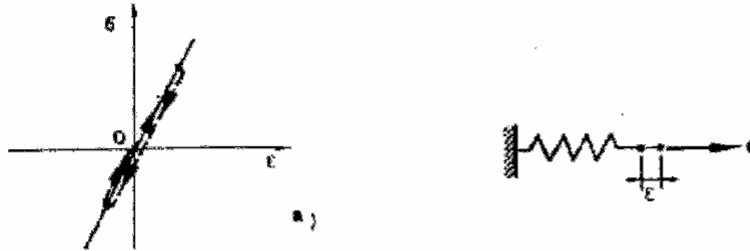
A feszültségek és az alakváltozások kapcsolatára kiterjedő matematikai összefüggést **anyagegyenletnek** nevezzük. Ha a tényleges húzó-nyomó diagramokat linearizáljuk, vagyis egy vagy több jól illeszkedő egyenes vonallal helyettesítjük, akkor az alábbi legfontosabb lineáris anyagmodelleket nyerjük:

- lineárisan rugalmas anyag
- merev, tökéletesen képlékeny anyag
- lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyag.

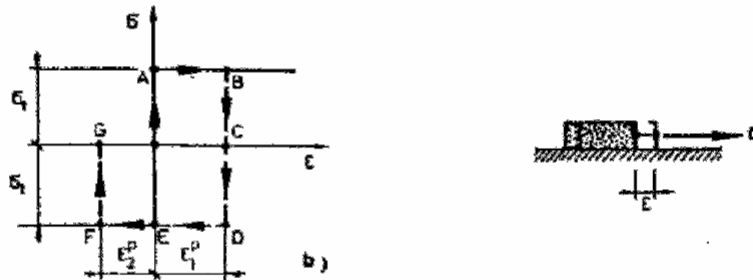
**Lineárisan rugalmas anyag**, egytengelyű feszültség állapotban a Hooke-törvény:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

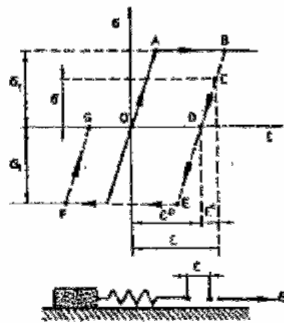
ahol E a rugalmassági tényező. A mechanikai modellje egy lineáris rugó.



**Merev, tökéletesen képlékeny anyag** a  $\sigma_f$  folyási határ eléréseig egyáltalán nem szenved alakváltozást, a  $\sigma_f$  feszültség működése közben viszont a feszültséggel megegyező értelemben tetszőleges mértékű nyúlást végezhet.



**Lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyagmodell**



$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

ha  $|\sigma| < \sigma_f$ ,  $\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}$  és  $d\varepsilon = 0$ , első terhelés esetén

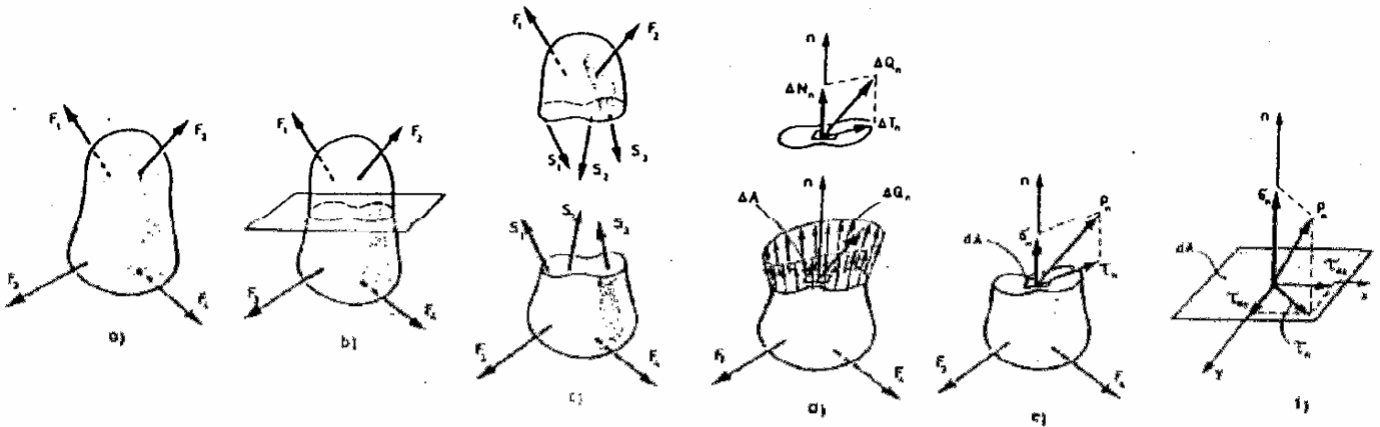
ha  $|\sigma| = \sigma_f$ ,  $d\varepsilon^e = 0$  és  $d\varepsilon^p \sigma > 0$

$$\varepsilon^p = \int d\varepsilon^p$$

ahol  $\varepsilon^e$  a rugalmas alakváltozás,  $\varepsilon^p$  az ún. képlékeny alakváltozás.

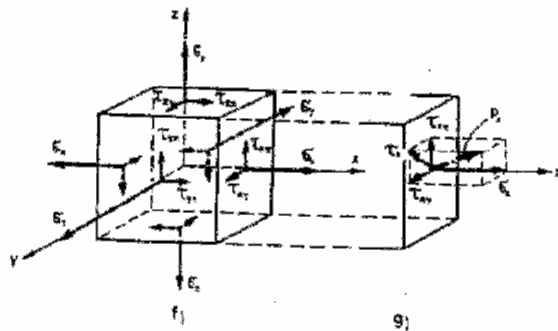
3.1.3 Feszültségek

Az egyensúlyban lévő szilárd testet egy sikkal szétvágva, mindkét rész egyensúlyban kell legyen és az átvágási felületen lévő általános térbeli megoszló erőrendszer alkotja a feszültségeket.



$$p_n = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_n}{\Delta A} = \frac{dQ_n}{dA}$$

A feszültség vektormennyiség, amely a test egy meghatározott pontjában egy meghatározott metszetre működik, komponensei a  $\sigma_n$  normálfeszültség és  $\tau_n$  nyírófeszültség (illetve további komponensei  $\tau_{nx}, \tau_{ny}$ ). Dimenziója:  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$ ,  $1 \text{ MPa} = 1 \text{ N/mm}^2$ .



Egy pont feszültségi állapota általános esetben 3 feszültségvektorral, illetve azok kilenc komponensével jellemezhető. A feszültségtenzor mátrixa:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

A  $\tau_{ni} = \tau_{in}$  reciprocitási tételnek megfelelően a mátrix szimmetrikus, azaz 6 független adatot tartalmaz, ez az ún. **térbeli feszültségállapot**.

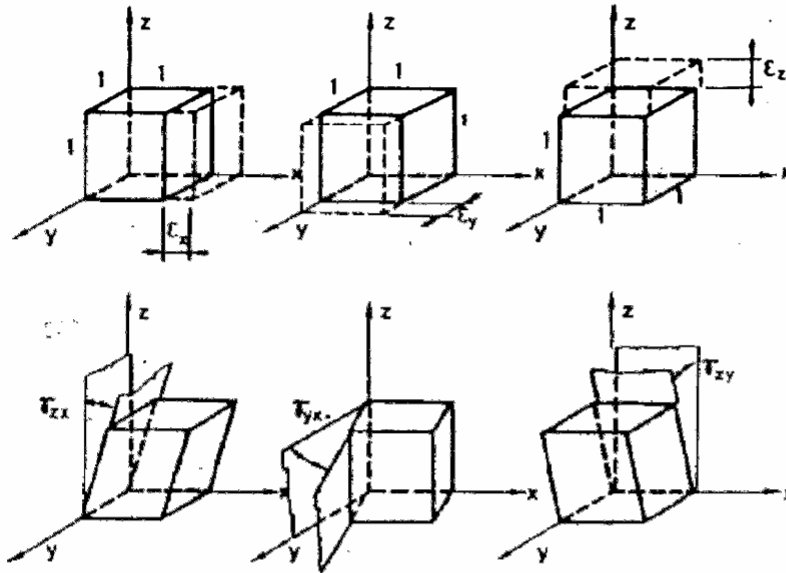
Ha a vizsgált pontban létezik egyetlen olyan metszet, amelyhez tartozó feszültségvektor zérus, akkor a pont **síkbeli feszültség állapotban** van.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix}$$

Lineáris feszültségi állapot ( $\mathbf{F} = [\sigma_x]$ ) egyetlen adat jellemzi.

## 3.1.4 Alakváltozások

A szilárd test a teher hatására alakváltozást szenved, vagyis pontjainak relatív távolsága és az irányok relatív szöge egyaránt megváltozik.



A feszültségekhez hasonlóan az alakváltozás tenzor mátrixa:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{yz} & 1/2\gamma_{xy} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

A mátrix szimmetrikus tehát 6 független adatot tartalmaz síkbeli alakváltozási állapot esetén:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 1/2\gamma_{xy} \\ 1/2\gamma_{yx} & \varepsilon_y \end{bmatrix}$$

Lineáris alakváltozási állapot esetén:

$$\mathbf{A} = [\varepsilon_x]$$

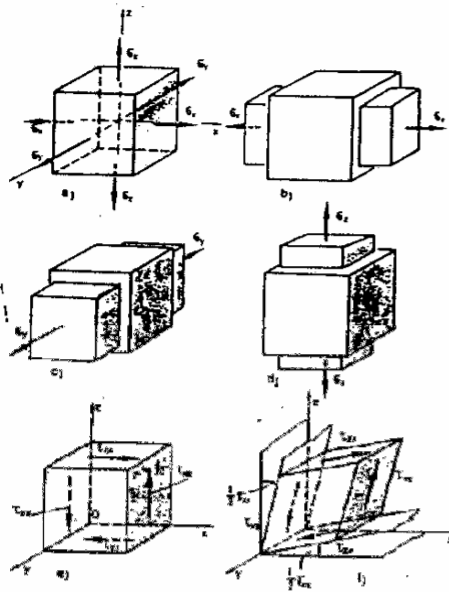
## 3.1.5 Anyagegyenletek, Hooke-törvény

A szilárd test egy pontjának feszültségi és alakváltozási állapota közötti kapcsolatot az ún. anyagegyenletek írják le.



### 3. Szilárdságtani alapok

Lineárisan rugalmas, izotrop anyag anyagegyenlete az ún. Hooke-törvény:



$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{1}{G} \tau_{xy},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{G} \tau_{yz},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{G} \tau_{zx},$$

illetve

$$\sigma_x = E \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \right),$$

$$\sigma_y = E \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_y + \varepsilon_x + \varepsilon_z \right),$$

$$\sigma_z = E \frac{1}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( \frac{1-\nu}{\nu} \varepsilon_z + \varepsilon_x + \varepsilon_y \right),$$

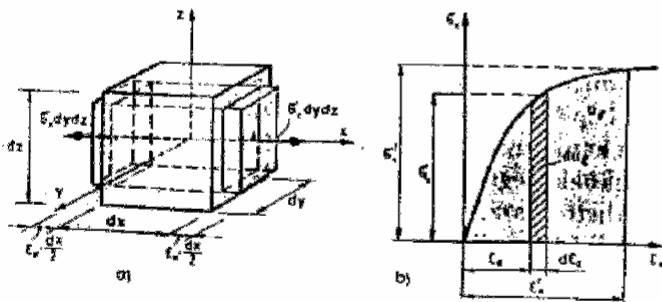
$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}$$

ahol  $E$  rugalmassági tényező,  $G$  nyírási rugalmassági tényező,  $\nu$  pedig a Poisson tényező anyagállandók. Közöttük lévő összefüggés:

$$G = \frac{1}{2(1+\nu)} E$$

#### 3.1.6 Alakváltozási energia

A szilárd test belső potenciális energiáját alakváltozási energiának nevezzük. Tiszta húzás esetén, terhelés közben az elemi hasábkban felhalmozódó alakváltozási energia ( $\varepsilon'_x$  végső alakváltozás esetén):

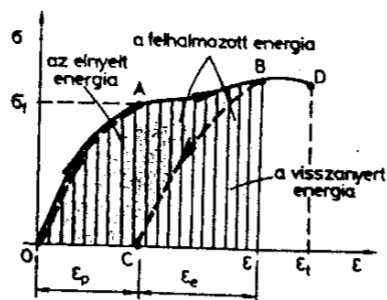


$$dU_\sigma = \int_0^{\varepsilon'_x} \sigma_x d\varepsilon_x dy dz$$

Térbeli feszültségi és alakváltozási állapotban a pont alakváltozási energiasűrűsége:

$$U_0 = \int_C \sigma_x d\varepsilon_x + \int_0^{\varepsilon'_y} \sigma_y d\varepsilon_y + \int_0^{\varepsilon'_z} \sigma_z d\varepsilon_z + \int_0^{\gamma'_{xy}} \tau_{xy} d\gamma_{xy} + \int_0^{\gamma'_{yz}} \tau_{yz} d\gamma_{yz} + \int_0^{\gamma'_{zx}} \tau_{zx} d\gamma_{zx}$$

Tehermentesítés esetén ha a terhelés rugalmas tartományban történt (A pontig) akkor az O-A-O ciklus energiavesztés nélkül zajlik. Ha a terhelést a  $\sigma_f$  olyási határ elérése után is folytattuk, akkor a teljes O-A-B-C terhelési-tehermentesítési ciklus energiavesztéssel jár.



Az izotróp, lineárisan rugalmas anyagú testek esetén az egész testben felhalmozódott teljes rugalmas alakváltozási energia

$$U(\sigma, \varepsilon) = \int_V U_0(\sigma, \varepsilon) dV = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dV$$

### 3.2 Rudak feszültségei és alakváltozásai

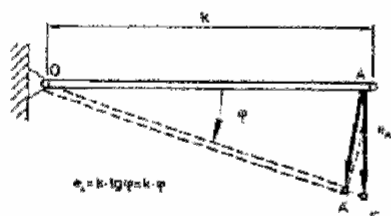
#### 3.2.1 Alapfogalmak, feltevések

A szilárdságtanban felírható egyenletek:

- egyensúlyi egyenletek, amelyek a terhelő erők és a feszültségek kapcsolatát, egyensúlyát fejezik ki;
- geometriai egyenletek, amelyek az elmozdulások és alakváltozások kapcsolatát, folytonosságát írják le;
- anyagegyenletek, amelyek a feszültségek és az alakváltozások összefüggését, az anyag szilárdságtani tulajdonságait rögzítik.

Azt a testet, amelynek egyik mérete a másik két kiterjedésénél lényegesen nagyobb, rúdnak nevezzük, a tengelye a keresztmetszetek súlypontjainak a geometriai helye.

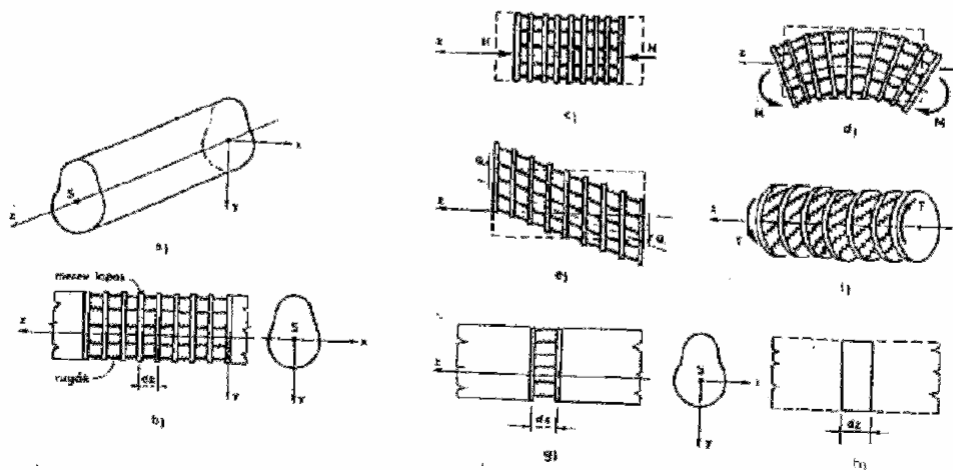
Érvényesnek tekintjük az ún. kis elmozdulások elvét:



$$e_A = k \operatorname{tg} \varphi \approx k \varphi$$

$$\operatorname{tg} \varphi \approx \sin \varphi \approx \varphi \text{ és } \cos \varphi \approx 1$$

A sík keresztmetszetek elve (Bernoulli, Navier). A rúd tengelyére merőleges keresztmetszetek az alakváltozások után is síkok és önmagukkal egybevágóak maradnak.



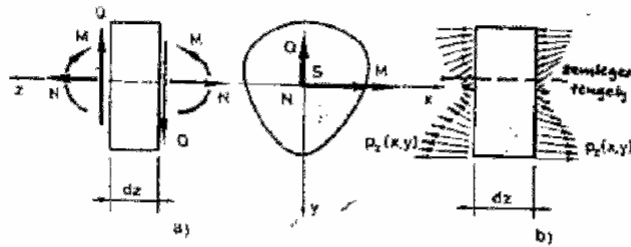
### 3. Szilárdságtani alapok

Egyenes tengelyű rudakkal foglalkozunk, a rúd modellje a rúd tengelyére merőleges végtelen sok, egymáshoz rugókkal kapcsolódó merev lapok összessége.

A rúdelem egyensúlyából következően az igénybevételek és a határoló lapok feszültségei között az alábbi összefüggés áll fenn:

$$\left( \int_A p_z(x, y) dA \right) = (N, Q, M).$$

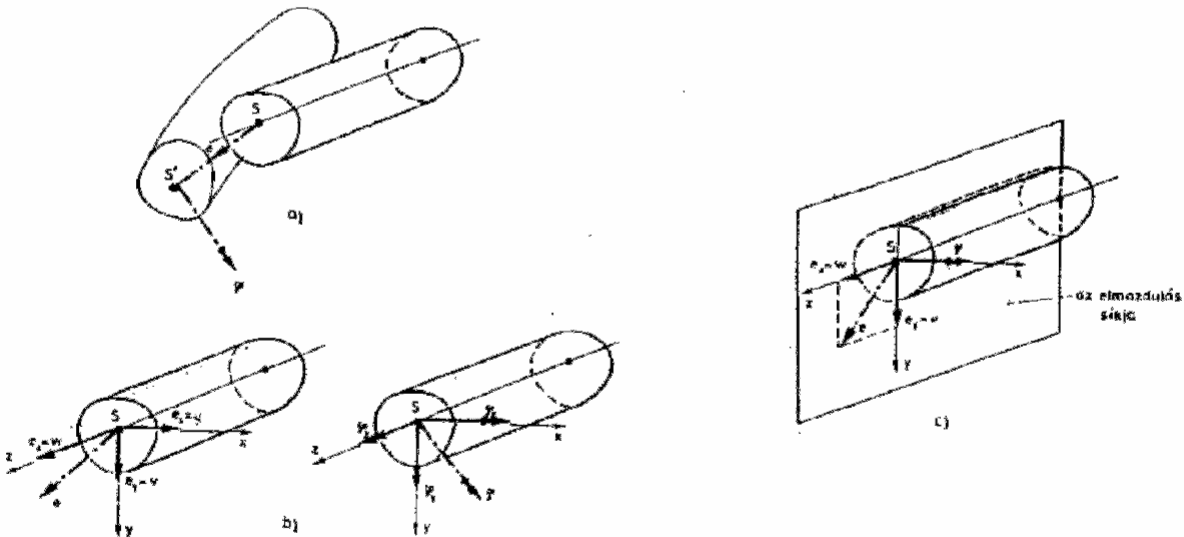
ahol  $N$ ,  $Q$  és  $M$  a normálerő, nyíróerő és hajlítónyomaték igénybevételek.



A rúd egy keresztmetszeti súlypontjának abszolút eltolását az  $e$  vektor, a keresztmetszet abszolút elfordulását a  $\varphi$  vektor jellemzi. Ezek komponensei

$$e = (e_x, e_y, e_z),$$

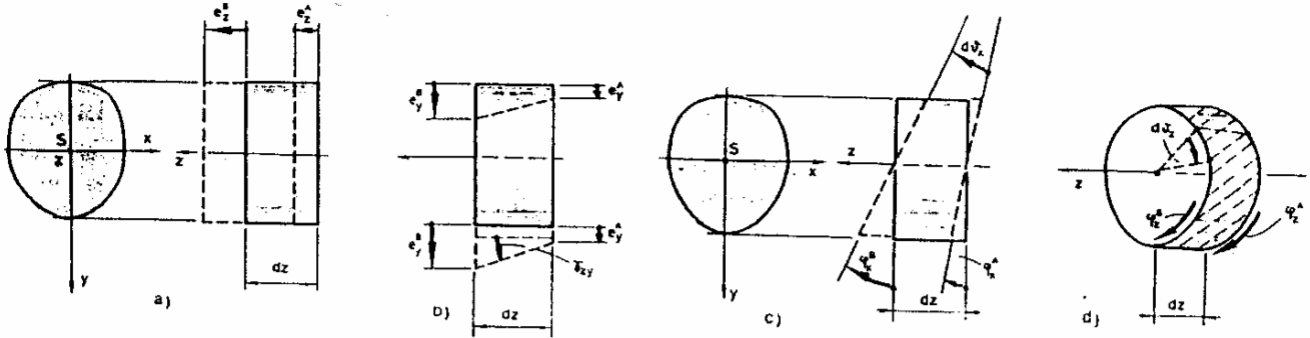
$$\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z).$$



Két keresztmetszet  $x$ ,  $y$  és  $z$  irányú relatív eltolódásait  $u$ ,  $v$  és  $w$  betűkkel, relatív elfordulását pedig  $\varphi_x$ ,  $\varphi_y$  és  $\varphi_z$ -vel szokás jelölni.

A rúdelem alakváltozásai a rúdelemet határoló két keresztmetszet relatív elmozdulásainak fajlagos ( $dz$  hosszúságra vonatkoztatott) értékével egyenlőek.

Síkbeli rúd síkbeli terhelése esetén:



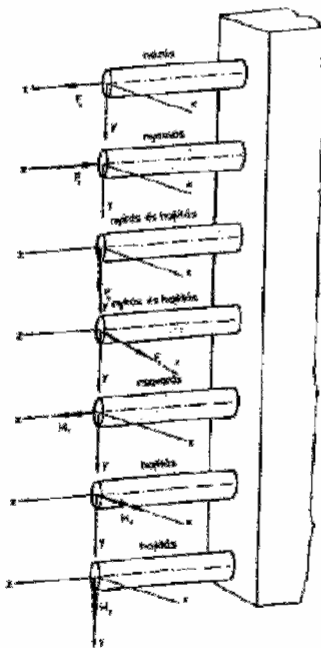
Fajlagos megnyúlás:  $\epsilon_z = \frac{dw}{dz}$

Szögtorzulás:  $\gamma_{xy} = \frac{dv}{dz}$

Fajlagos elfordulás:  $\kappa_x = \frac{d\theta_x}{dz}$

Fajlagos elcsavarodás:  $\kappa_z = \frac{d\theta_z}{dz}$

A továbbiakban feltételezzük, hogy a rúd homogén, anyaga izotróp és ideálisan rugalmas, tökéletesen képlékeny tulajdonságokkal rendelkezik. Különleges esetként inhomogén anyagú rudak vizsgálatával is foglalkozunk.

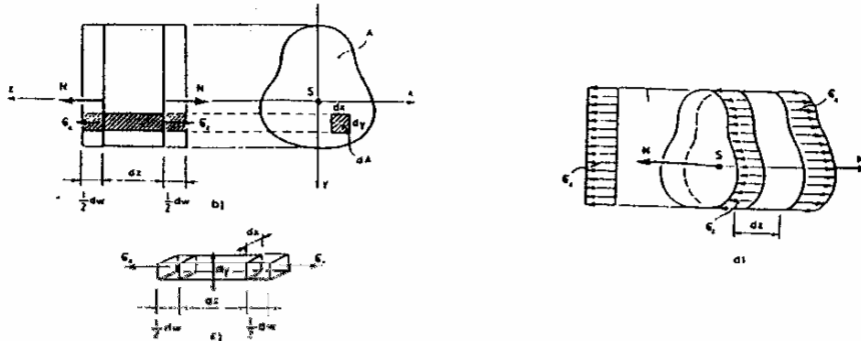


A terhelő erő, illetve nyomaték a rúdban az ábrán látható igénybevételeket eredményezi. Ha az igénybevételek közül csak valamelyik terheli a keresztmetszetet, akkor egyszerű igénybevételről, általános esetben pedig összetett igénybevételről beszélünk.

A szerkezeteknek ki kell elégíteniük a szilárdság, merevség és az állékonyság vagy stabilitás követelményét.

3.2.2 Központos húzás és nyomás

Ha a rúdelemet terhelő erők eredője a határoló keresztmetszetek síkjára merőleges és átmegey a keresztmetszet súlypontján, akkor a rúdelem központos húzásra, illetve nyomásra van igénybe véve.



A rúdelem geometriai egyenletei:

$$\varepsilon_z = \frac{dw}{dz} = \text{állandó és } \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0.$$

Az egyensúlyi feltétel:

$$N = \int_A \sigma_z(x, y) dA.$$

Az anyagegyenlet:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z = \text{állandó}.$$

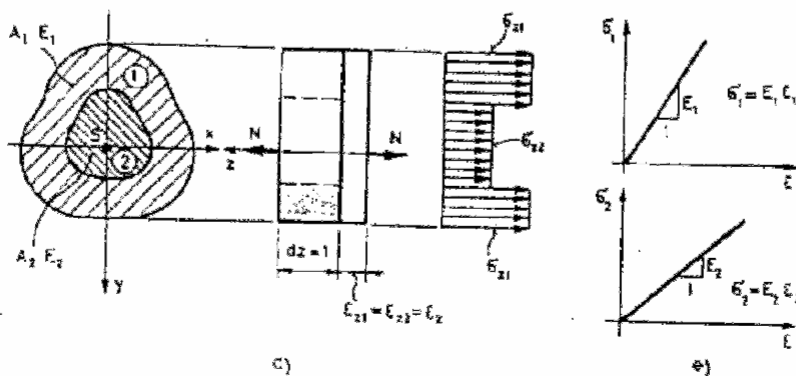
Ezért a normálfeszültség:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}.$$

Az  $\varepsilon_z$  fajlagos nyúlás:

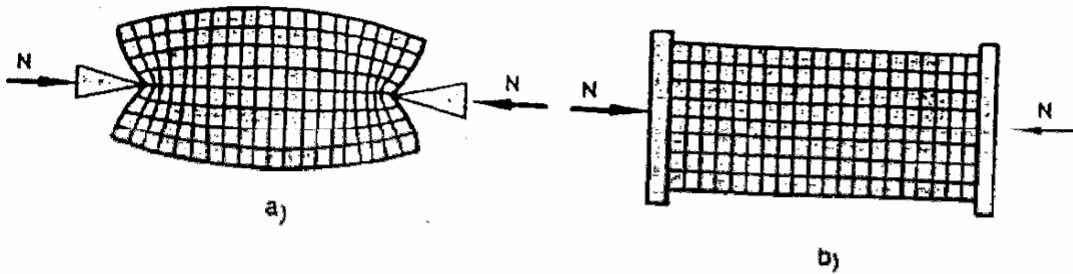
$$\varepsilon_z = \frac{N}{EA}.$$

Inhomogén rúdnál a sík keresztmetszetek elve miatt a fajlagos nyúlás mindkét anyagban ugyanakkora, de a különböző rugalmassági tényezők miatt a feszültségek különböznek

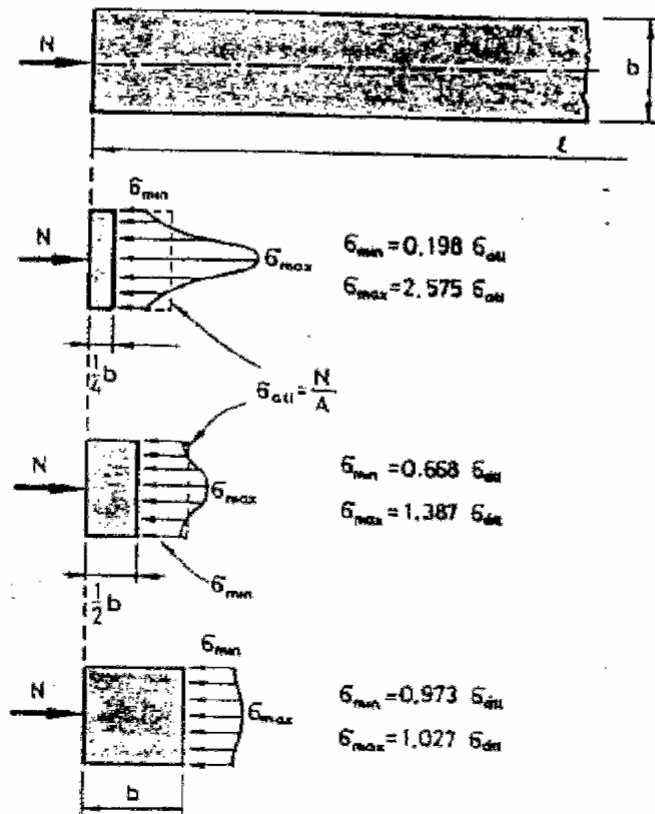


### 3. Szilárdságtani alapok

A sík keresztmetszetek elve nem teljesül a rúd azon szakaszain, amelyek a rúdra működő koncentrált erő vagy a rúdban lévő lyuk vagy bemetszés közelében vannak. Ezeken a helyeken feszültségcsúcsok keletkeznek, ezt a jelenséget **feszültségkoncentrációnak** nevezzük.

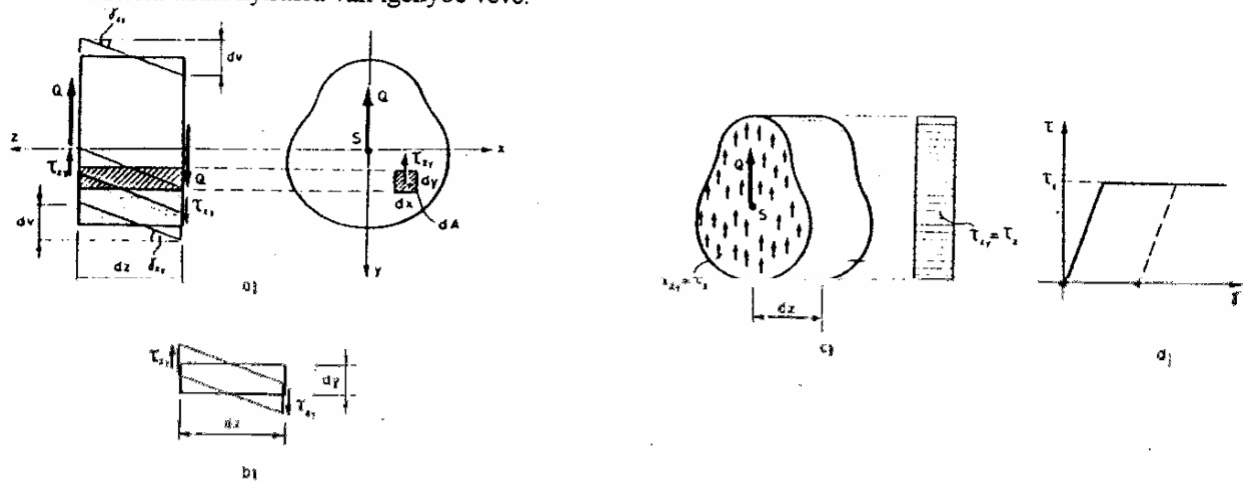


A **Saint-Venant** elv szerint, valamely test vagy szerkezet egy bizonyos szakaszára a működő teher eloszlásának módja lényegesen mértékben befolyásolja a teher közvetlen környezetében létrejövő feszültségek és alakváltozások eloszlását, azonban elenyésző hatást gyakorol a távolabbi részek feszültségi és alakváltozási állapotára.



### 3.2.3 Tiszta nyírás

Ha egy rúdelemre a határoló keresztmetszetek síkjában fekvő és a súlyponton átmenő erők működnek, akkor a rúdelem tiszta nyírásra van igénybe véve.



A rúdelem geometriai egyenletei:

$$\gamma_{xy} = \frac{dv}{dz} = \text{állandó}, \quad \varepsilon_z = 0.$$

Az egyensúlyi feltétel (Q a nyíróerő):

$$Q = \int_A \tau_z(x, y) dA.$$

Az anyagegyenlet:

$$\tau_z = G\gamma_z.$$

A nyírófeszültség:

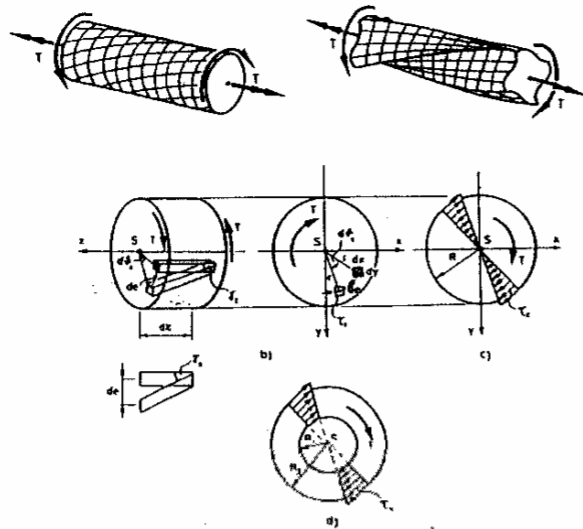
$$\tau_z = \frac{Q}{A}.$$

A szögváltozás:

$$\gamma_z = \frac{Q}{GA}.$$

### 3.2.4 Csavarás

Ha rúdelemre a határoló keresztmetszetek síkjában forgató erőpárok működnek, akkor a rúdelem csavarásra van igénybe véve. Ekkor azonban a kör és körgyűrű keresztmetszetek kivételével a keresztmetszetek általában nem maradnak síkok, hanem öblösödnek.



A kör és körgyűrű keresztmetszetű rúdelemre vonatkozó összefüggések.  
A geometriai egyenletek:

$$\gamma_z = \kappa_z r, \quad \kappa_z = \frac{d\theta}{dz}, \quad \epsilon_z = 0.$$

Az egyensúlyi feltétel (T a terhelő csavarónyomaték):

$$T = \int_A r \tau_z(r) dA.$$

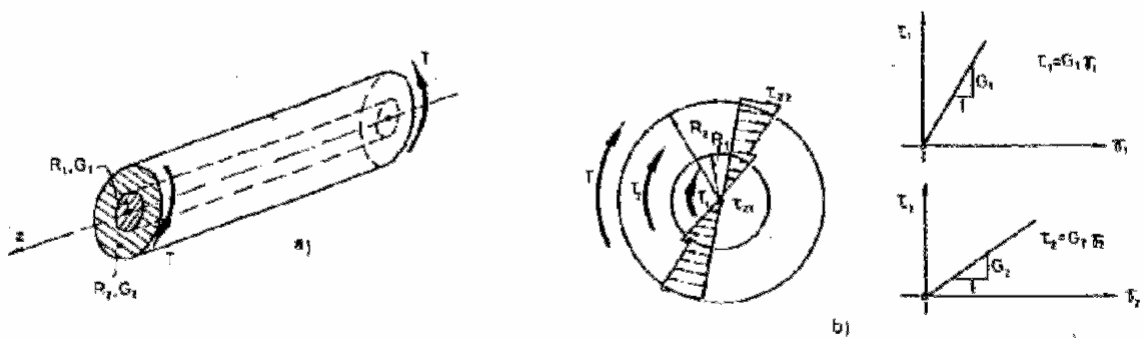
Az anyagegyenlet:

$$\tau_z = G \gamma_z.$$

A nyírófeszültség:

$$\tau_z(r) = \frac{T}{I_0} r.$$

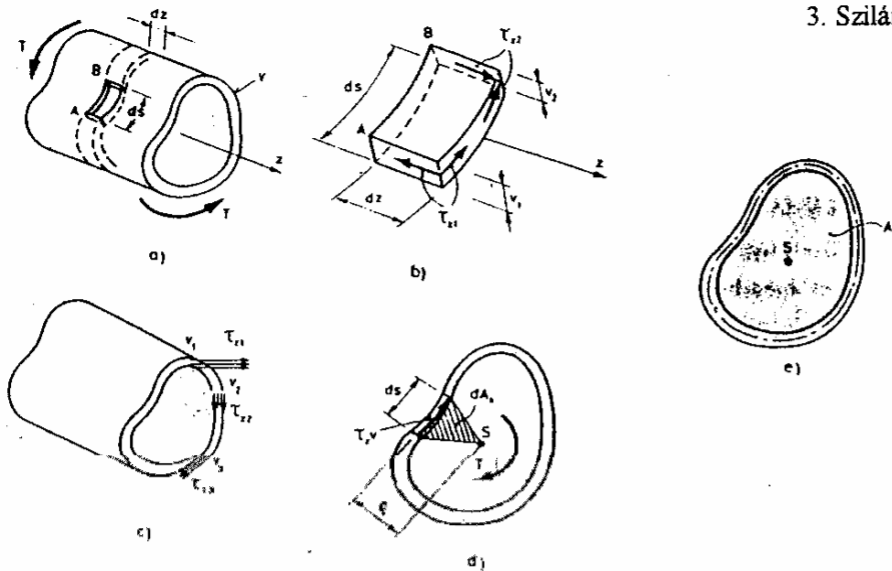
Az inhomogén, kör keresztmetszetű rúd a különböző anyagú részek együttdolgozásából következik, hogy az egyes részek fajlagos elfordulásai megegyeznek, de a feszültségdiagramot jellemző egyenesek iránytangensei különbözőek.



Vékonyfalú (a falvastagság a másik két keresztmetszeti méretnél jóval kisebb), zárt keresztmetszetű rudak csavarása esetén a nyírófeszültségek és a hozzájuk tartozó vastagságok szorzata állandó (nyírófolyam):

$$\tau_{zi} n_i = \text{állandó}.$$





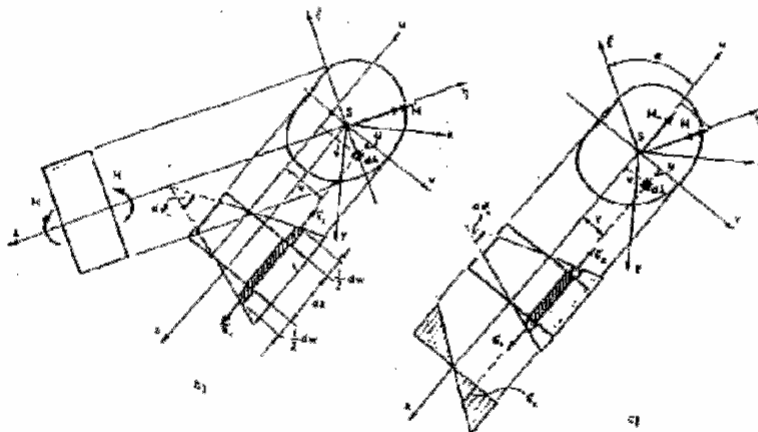
A nyírófeszültséget az ún. Bredt-féle képlet adja:

$$\tau_z = \frac{T}{2A_k v}$$

ahol  $A_k$  a falvastagságot fejező középvonal által határolt terület.

### 3.2.5 Hajlítás

Ha egy rúdelemre olyan erőpárok működnek, amelyeknek a síkja a keresztmetszetre merőleges, azaz vektoruk a keresztmetszet síkjában fekszik, akkor a rúdelem hajlításra van igénybe véve.



A geometriai egyenletek:

$$\epsilon_z = \kappa_u v, \quad \kappa_u = \frac{d\theta_u}{dz}, \quad \gamma_z = 0,$$

ahol u az egyelőre ismeretlen helyzetű tengely, amely körül a keresztmetszet elfordul.

Az egyensúlyi feltétel:

$$\sum_{(A)} F_z = \int \sigma_z dA = 0,$$

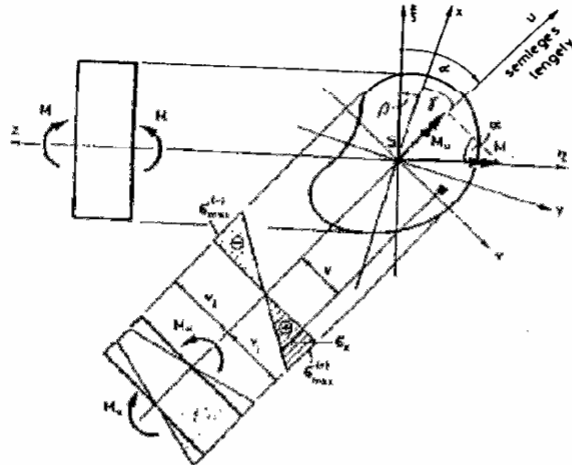
$$\sum_{(A)} M_\xi = \int \eta \sigma_z dA = 0,$$

$$\sum_{(A)} M_\eta = \int \xi \sigma_z dA = M.$$

Az anyagegyenlet:

$$\sigma_z = E\varepsilon_z$$

**Tiszta hajlítás** esetén a semleges tengely a keresztmetszet súlypontján megy keresztül. **Egyenes hajlítás** a hajlítás síkjának a keresztmetszet síkjával való  $\xi$  metszésvonala egybeesik, **ferde hajlítás** esetén nem esik egybe a keresztmetszet valamelyik súlyponti tehetetlenségi főirányával.



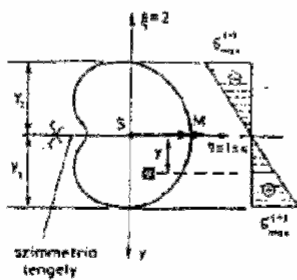
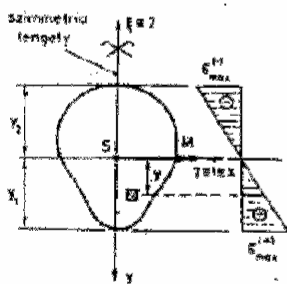
A semleges tengelyre felírt nyomatéki egyenletből a fajlagos relatív elfordulás:

$$\kappa_u = \frac{M_u}{EI_u}$$

A normálfeszültség:

$$\sigma_z = \frac{M_u}{I_u} v$$

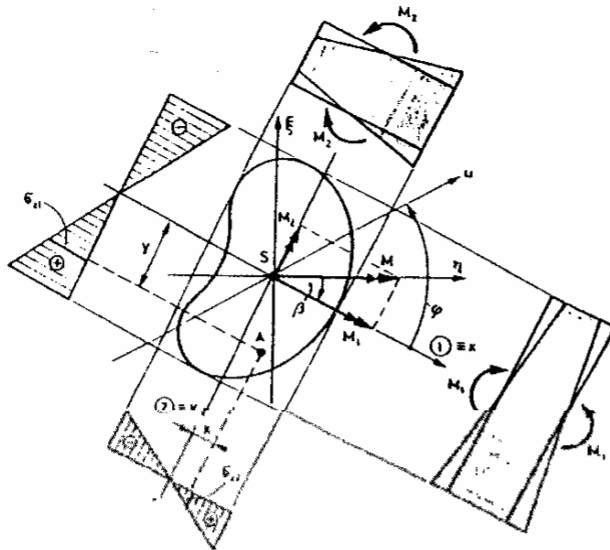
**Egyenes hajlítás** esetén:



$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y$$

**Ferde hajlítás** esetén a feszültségek egymásra halmozással számíthatók, az 1 és 2 jelű főirányok ismeretében:

$$\sigma_z = \pm \frac{M_1}{I_1} y \pm \frac{M_2}{I_2} x$$



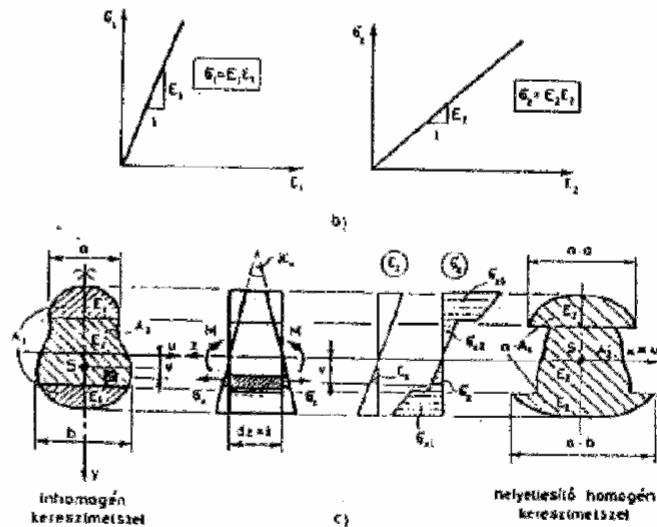
Amennyiben az x, y koordináta-rendszer nem esik egybe a tehetetlenségi főirányokkal:

$$\sigma_z = \frac{M_y I_x - M_x C_{xy}}{I_x I_y - C_{xy}^2} x + \frac{M_x I_y - M_y C_{xy}}{I_x I_y - C_{xy}^2} y$$

A semleges tengely egyenlete:

$$y = \frac{M_x C_{xy} - M_y I_x}{M_x I_y - M_y C_{xy}} x$$

Inhomogén anyagú rúd esetén az alakváltozási diagram lineáris, a feszültségdiagramot jellemző egyenesek iránytangensei különbözőek.

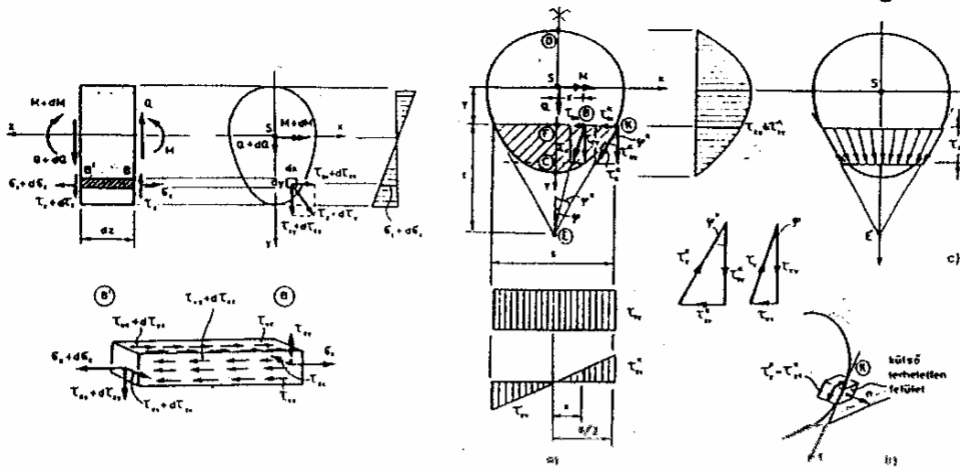


### 3.2.6 Összetett igénybevételek

Ha egy rúdelemre egyidejűleg többféle igénybevétel is működik, akkor összetett igénybevételről beszélünk.

Ha egyidejűleg hajlítónyomaték és nyíróerő működik, akkor a rúdelem hajlítással egyidejű nyírásra van igénybe véve.

### 3. Szilárdságtani alapok



A szimmetriatengelyre merőleges nyomatékvektorból keletkező normál feszültségek meghatározására megtartjuk az ismert képletet:

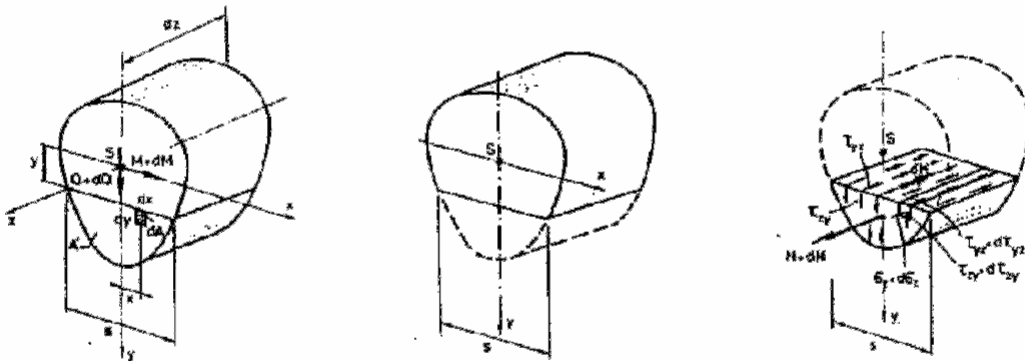
$$\sigma_z = \frac{M}{I_x} y,$$

az egyidejűleg fellépő nyírófeszültségek függőleges komponensei pedig

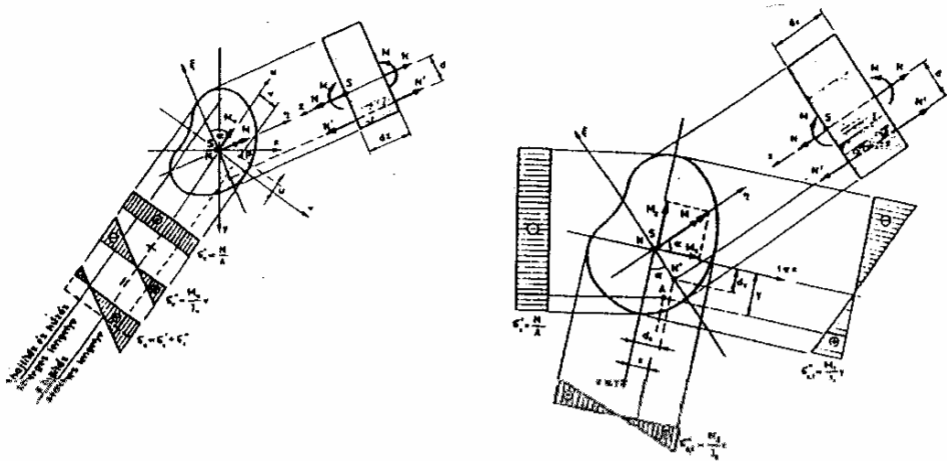
$$\tau_{zy} = \frac{Q \cdot S'_x}{I_x \cdot s}$$

ahol  $s$  az átvágás szélessége,  $S'_x$  pedig annak statikai nyomatéka az  $x$  tengelyre. A  $\tau_{zx}$  komponens geometriai egyenletből számítható.

A keresztmetszet síkjában működő nyírófeszültségek mellett, egyidejűleg a merőleges vízszintes síkokban működő nyírófeszültségek is fellépnek.



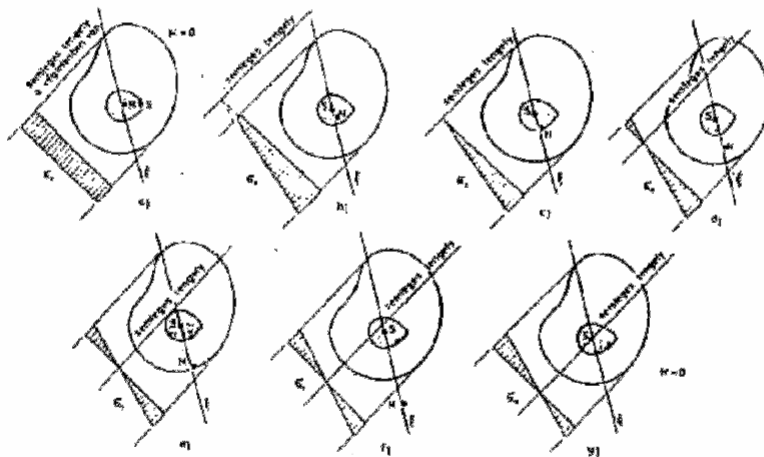
Ha egy rúdelem határoló keresztmetszeteire egyidejűleg egy hajlítónyomaték és egy központos normálerő működik, vagy csupán egyetlen normálerő hat, de az nem a súlypontban, hanem attól bizonyos távolságra külpontban támad, akkor a rúdelem hajlítással egyidejű húzásra vagy nyomásra, illetőleg külpontos (excentrikus) húzásra vagy nyomásra van igénybe véve.



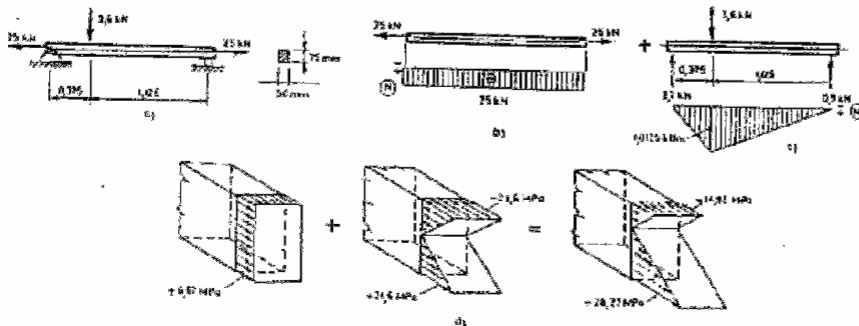
A keletkező normál feszültségek az egyszerű igénybevételekből származó feszültségek egymásra halmozása útján határozhatók meg.

$$\sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_u}{I_u} v, \quad \text{illetve} \quad \sigma_x = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_1}{I_1} y \pm \frac{M_2}{I_2} x.$$

Az excentrikus normálerő dőléspontja és a semleges tengely helyzete közötti összefüggést az alábbi ábrarozat szemlélteti. (A belső mag a keresztmetszethez rendelhető mértani hely)



Egy kéttámaszú tartó hajlítással egyidejű húzása esetén a normál feszültségek meghatározása.



A maximális nyomaték helyén lévő igénybevételek:

$$N = +25 \text{ kN}, \quad M = 1,0125 \text{ kNm}.$$

A keresztmetszeti jellemzők:

$$A = 37,5 \text{ cm}^2 \quad I_x = 175,78 \text{ cm}^4$$

A szélső normálfeszültségek:

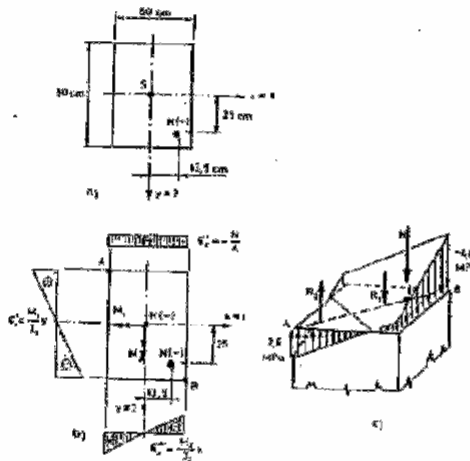
$$\sigma_{z,\max}^+ = +28,27 \text{ MPa}, \quad \sigma_{z,\max}^- = 14,93 \text{ MPa}.$$

**Excentrikus normálerővel terhelt oszlop normálfeszültségei**

$$A = 4500 \text{ cm}^2, \quad I_1 = 3037500 \text{ cm}^4, \quad I_2 = 937500 \text{ cm}^4,$$

$$M_1 = -12500 \text{ kNcm}, \quad M_2 = 6950 \text{ kNcm},$$

$$\sigma_{\max}^+ = 2,6 \text{ MPa}, \quad \sigma_{\max}^- = -4,8 \text{ MPa}.$$



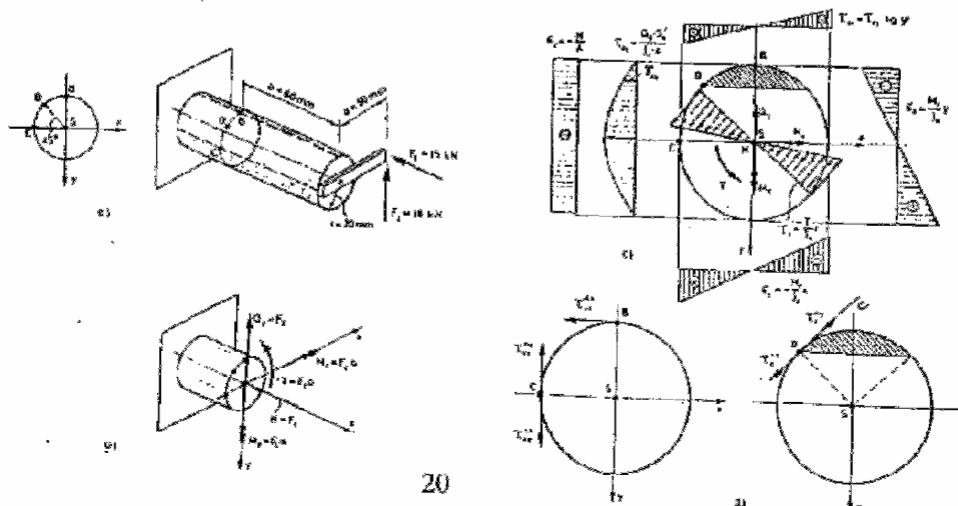
**Általános terheletű rúd feszültségei**

$$N = 15 \text{ kN}, \quad Q_y = -18 \text{ kN}, \quad M_x = 108 \text{ kNcm}, \quad M_y = 75 \text{ kNcm}, \quad T = -90 \text{ kNcm}.$$

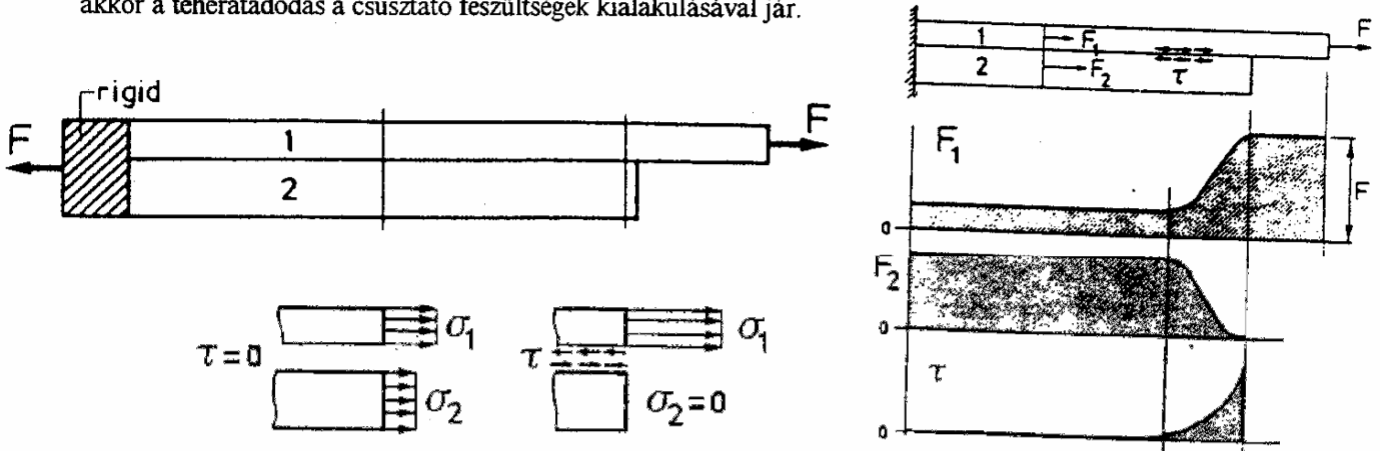
$$B \text{ pont: } \sigma_z^B = -183,91 \text{ MPa} \quad \tau_z^B = \tau_{zx}^B = -71,66 \text{ MPa}$$

$$C \text{ pont: } \sigma_z^C = 107,49 \text{ MPa} \quad \tau_z^C = \tau_{zy}^C = 52,55 \text{ MPa}$$

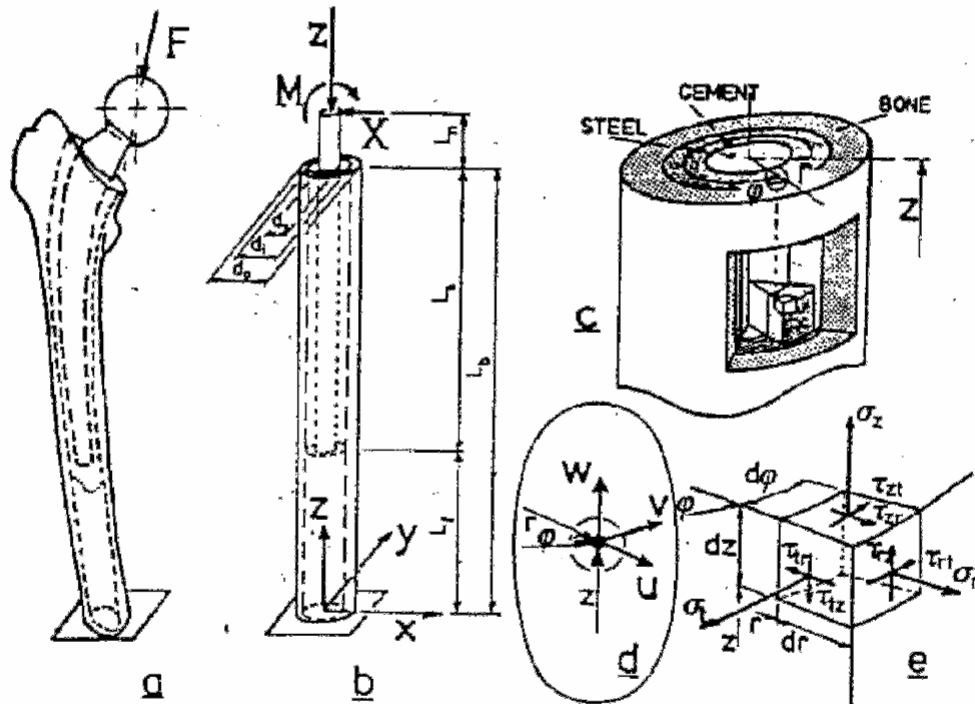
$$D \text{ pont: } \sigma_z^D = 49,09 \text{ MPa} \quad \tau_z^D = \tau_{zx}^D = 66,07 \text{ MPa}$$



Inhomogén anyagú rúdnál ha a teher átadását nem biztosítja egy eloszló merev összekötő rúdelem, akkor a teherátadás a csúszató feszültségek kialakulásával jár.



A femur + protézis egyszerűsített tengelyszimmetrikus modellje az alábbi ábrán látható. transmission

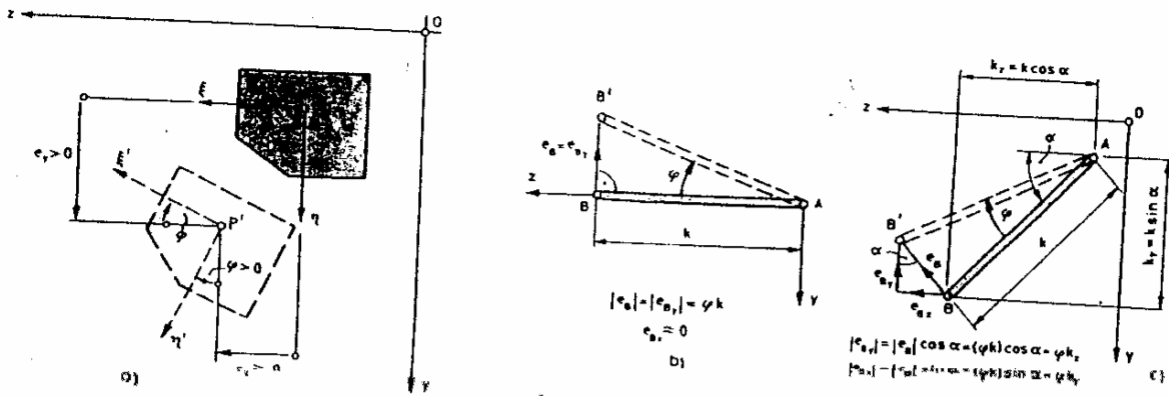


Ezen a modellen az elemi szilárdságtan összefüggései alapján tetszőleges keresztmetszet, tetszőleges pontjában a feszültségek komponensei számíthatók.

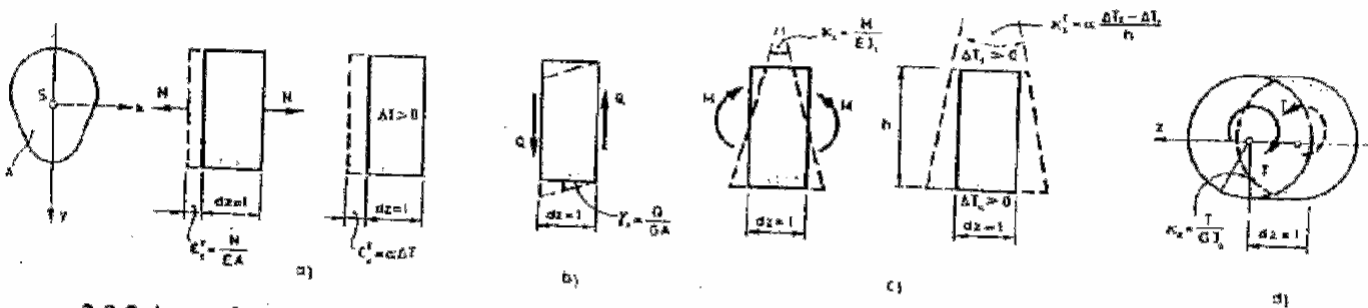
### 3.3 Rudak elmozdulásai

#### 3.3.1 Rudak alakváltozásai

Az elmozdulás gyűjtőnév, amely lehet **eltolódás** vagy **elfordulás**. Csak síkbeli, kis elmozdulásokkal foglalkozunk. A földhöz rögzített koordináta-rendszerben mért elmozdulásokat **abszolút elmozdulásoknak**, egy másik ponthoz rögzített koordináta-rendszerben mért elmozdulásokat pedig **relatív elmozdulásoknak** nevezzük.



A rúdelem alakváltozásait az alábbi ábrásorozat foglalja össze:



### 3.3.2 A rugalmas gerenda differenciálegyenlete

A síkbeli rugalmas anyagú gerenda meggörbült tengelyét **rugalmas vonalnak** nevezzük, egyenlete  $v = v(z)$ . Legfontosabb feltevések: a gerenda egyenes tengelyű, prizmatikus, anyaga lineárisan rugalmas, lehajlása kicsiny, csak a fajlagos elfordulás hatását vesszük figyelembe.

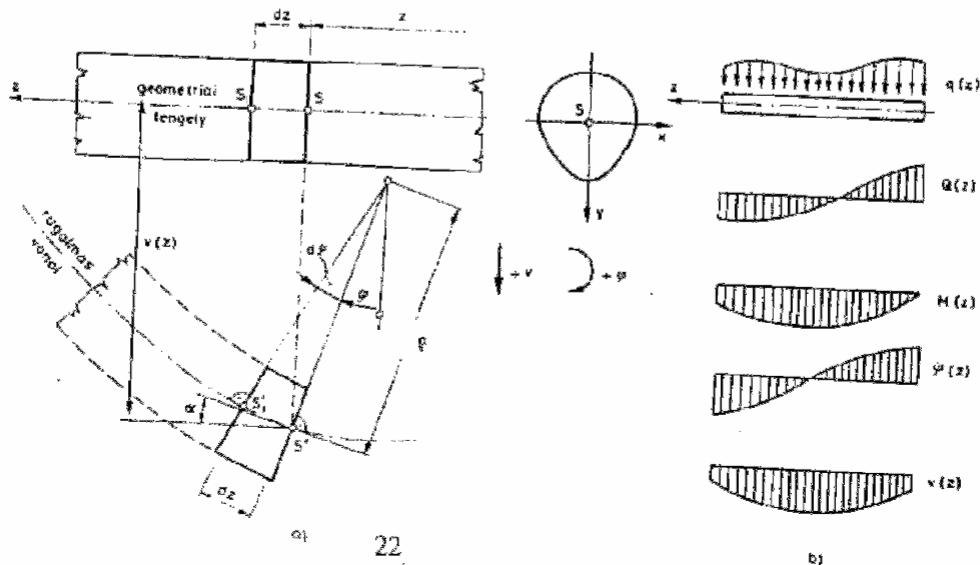
A fizikai egyenlet:

$$\kappa_x(z) = \frac{M(z)}{EI_x}$$

A geometriai egyenlet:

$$\varphi = -\alpha = -\text{tg } \alpha = -\frac{dv}{dz} \rightarrow \frac{d\varphi(z)}{dz} = -\frac{d^2v(z)}{dz^2}$$

$$\kappa_x(z) = -\frac{d^2v(z)}{dz^2}$$





Mivel a lehajlások kicsinyek, így:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d^2v}{dz^2} = \kappa_x,$$

azaz a  $\kappa_x$  fajlagos elfordulás azonos a rugalmas vonal **görbületével**.

Az egyensúlyi egyenletek:

$$q(z) = \frac{dQ(z)}{dz} \text{ és } Q(z) = -\frac{dM(z)}{dz}, \text{ így } q(z) = -\frac{d^2M(z)}{dz^2}$$

A rugalmas vonal differenciálegyenlete:

$$\frac{d^4v(z)}{dz^4} = -\frac{q(z)}{EJ_x}$$

A teher, a nyíróerő, a hajlítónyomaték, az elfordulás - és eltolódásfüggvény közötti összefüggések az alábbiak (4 integrálási állandó):

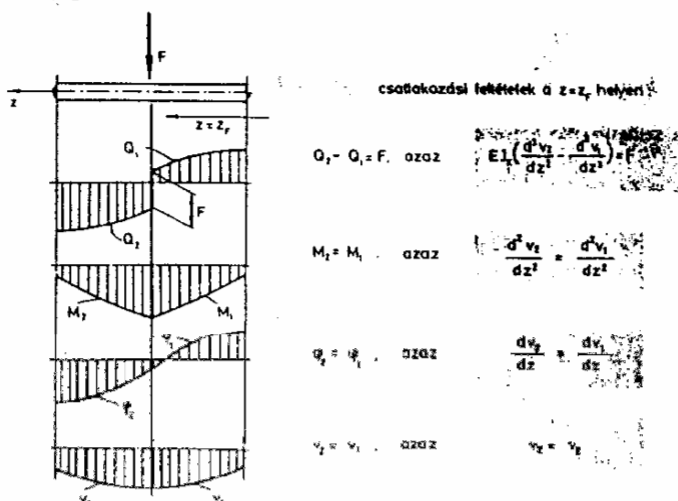
$q = \frac{dQ}{dz} = EJ_x \frac{d^4v}{dz^4}$	$\uparrow q(z) \downarrow$	$\int \dots dz$
$Q = -\frac{dM}{dz} = EJ_x \frac{d^3v}{dz^3}$	$\uparrow Q(z) \downarrow$	$Q = \int q dz + K_1$
$M = EJ_x \frac{d\varphi}{dz} = -EJ_x \frac{d^2v}{dz^2}$	$\uparrow M(z) \downarrow$	$M = -\int Q dz + K_2$
$\varphi = -\frac{dv}{dz}$	$\uparrow \varphi(z) \downarrow$	$\varphi = \int \frac{M}{EJ_x} dz + K_3$
$\frac{d}{dz}$	$\uparrow v(z) \downarrow$	$v = -\int \varphi dz + K_4$

A gerenda megtámasztásainál és kapcsolatainál az elmozdulásoknak és az igénybevételeknek bizonyos feltételeket kell kielégíteniük. A geometriai kerületi feltételek az elmozdulásokra ( $\varphi$  és  $v$ ), a statikai kerületi feltételek pedig az igénybevételekre ( $Q$  és  $M$ ) vonatkoznak.

szabványos	szabványos	szabványos
$Q = 0$ létszámú	$Q = 0$ létszámú	$Q = 0$ létszámú
$M = 0$ létszámú	$M = 0$ létszámú	$M = 0$ létszámú
$\varphi = 0$ létszámú	$\varphi = 0$ létszámú	$\varphi = 0$ létszámú
$v = 0$ létszámú	$v = 0$ létszámú	$v = 0$ létszámú

### 3. Szilárdságtani alapok

A koncentrált erő helyén a nyíróerő függvényben szakadás, a nyomatéki függvényben törés van, ekkor a két oldalra feírt egyenletek megoldásához 4 további ún. csatlakozási feltételt kell felírni.



Konzoltartó koncentrált teherrel (EJ = állandó)

$$M(z) = Fz - Fl$$

$$\frac{dv}{dz} = -\frac{1}{EJ} \int M(z) dz = \frac{1}{EJ} \left[ -\frac{F}{2} z^2 + Flz + C_1 \right]$$

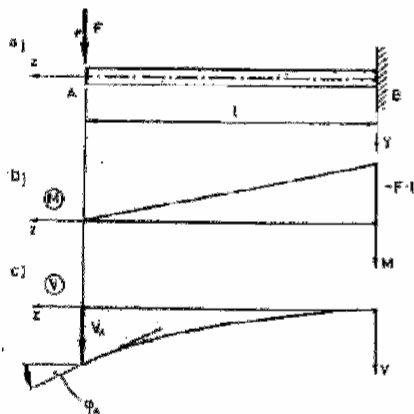
ha  $z = 0$  akkor  $\varphi = -\frac{dv}{dz} = 0 \rightarrow C_1 = 0$

$$v = \frac{1}{EJ} \left[ \frac{F}{6} z^3 + \frac{Fl}{2} z^2 + C_2 \right]$$

ha  $z = 0$  akkor  $v = 0 \rightarrow C_2 = 0$ , így

$$v(z) = \left[ -\frac{F}{6} z^3 + \frac{Fl}{2} z^2 \right] \frac{1}{EJ}$$

$$V_A = \frac{Fl^3}{3EJ} \quad \varphi_A = -\frac{Fl^2}{2EJ}$$



A rugalmas ágyazású gerenda differenciálegyenlete egy további taggal bővül:

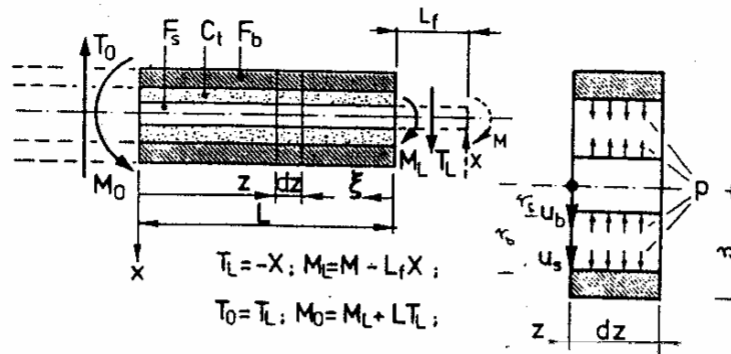
$$\frac{d^4 v}{dz^4} + \frac{C}{EJ_x} v = -\frac{q}{EJ_x}$$

ahol  $C$  [kN/cm<sup>2</sup>] az ún. ágyazási tényező.

A 3.2.6-ban bemutatott femur-protézis tengelyszimmetrikus modellben az alábbi ábra jelöléseinek megfelelő ágyazási tényező és a cementrétegben fellépő belső  $p$  teher közötti összefüggés:

$$p = C_1 (u_s - u_p),$$

ahol  $u_s(z)$  és  $u_p(z)$  a protézis, illetve a csont eltolódásfüggvénye.

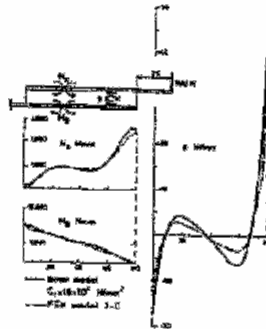


A differenciálegyenlet:

$$\frac{d^4 u_s}{dz^4} + \frac{p}{E_s I_s} = 0 \quad \text{és} \quad \frac{d^4 u_b}{dz^4} - \frac{p}{E_b I_b} = 0.$$

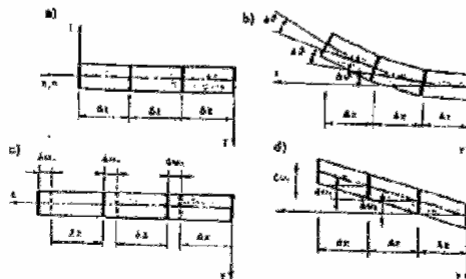
ahol  $E_s I_s$  és  $E_b I_b$  a protézis, illetve a csont hajlítási merevségei, a  $C_t$  tényező függ a protézis és cement közötti kapcsolattól (merev, kilazult-súrlódásmentes), a cement anyagától és az  $r_c / r_b$  árnýtól.

A  $p$  belső teher, valamint az  $M_s, M_b$  nyomatékok függvényei:



### 3.3.3 Az elmozdulások meghatározása geometriai úton

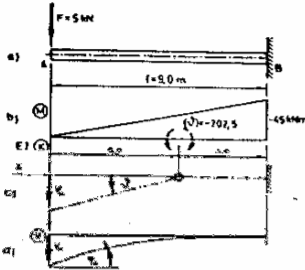
A feszültségek meghatározásához olyan modellt alkalmaztunk, amelynél a rúd rúdelemkből van felépítve. Ezt a modellt az elmozdulás-vizsgálatnál is megtartva a szilárd rudat olyan láncolatnak tekintjük, amely merev síklapokból áll és a lapok közöttük lévő szilárd anyag alakváltozása következtében egymáshoz képest relatív elmozdulást végeznek.



A relatív elmozdulásoknak a fajlagos értékei megegyeznek a rúdelem alakváltozásainak ( $\kappa, \epsilon, \gamma$ ) korábban már felírt értékeivel. A szilárd rúd fajlagos relatív elmozdulásait célszerűen megválasztott szakaszonként az eredőjükkel helyettesíthetjük és egy helyettesítő szerkezettel számolunk tovább. A nyíróerő hatását általában elhanyagolhatjuk.

Konzoltartó koncentrált teherrel ( $EJ=10^4 \text{ kNm}^2 = \text{állandó}$ ):

A nyomatéki ábra egyben a fajlagos elfordulások ábrájának  $EJ$ -szerese, így a fajlagos elfordulások eredőjének  $EJ$ -szerese:  $\vartheta_{AB} = \vartheta = -202,5 \text{ kNm}^2$ . A helyettesítő szerkezet (láncolat) két merev rúdelemből és az eredő helyén beiktatott csuklóból áll, ahol a  $\vartheta$  koncentrált relatív elfordulásként jelentkezik



$$(\varphi_A, e_A) = (\varphi_B, e_B, \vartheta)$$

Mivel  $\varphi_B = 0$  és  $e_B = 0$  (befogás), ezért

$$\sum e_{iy} \cdot e_{Ay} = 0 + 0 + 202,5 \cdot 6 = 1215 \cdot \text{kNm}^3$$

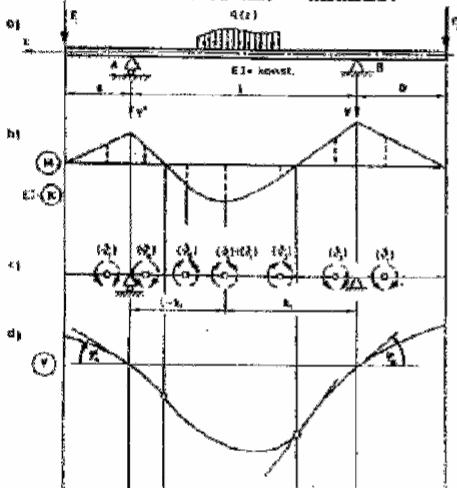
$$\sum \varphi_i \cdot \varphi_A = -202,5 \text{ kNm}^2$$

Az elmozdulások valódi értékei

$$e_{Ay} = 0,1215 \text{ m} (\downarrow)$$

$$\varphi_A = -0,02025 (\curvearrowright)$$

Kétfázisú tartó ( $EJ = \text{állandó}$ )



A nyomatéki ábrából a  $\vartheta_i$  koncentrált relatív elfordulások számíthatók

$$(e_A, \varphi_A) = (e_B, \varphi_B, \vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4, \vartheta_5)$$

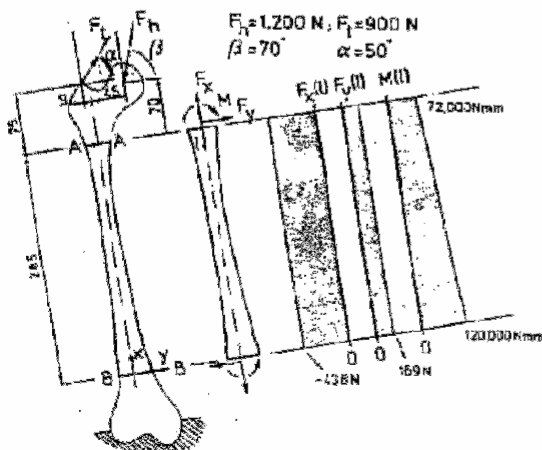
Eltolódási egyenlet

$$\sum e_{iy} \cdot e_{Ay} = -\varphi_B \cdot l - \sum \vartheta_i \cdot (l - k_i) = 0$$

mivel a B jelű kényszernél  $e_B = 0$  a fenti egyenletből  $\varphi_B$  számítható. Ezután a konzoltartó megoldásához hasonlóan tetszőleges keresztmetszet és B közötti egyenértékűség felírása után a keresztmetszetek elmozdulásait megkapjuk.

Befogott femur:

A 2.7 fejezetben már megrajoltuk az igénybevételi ábrákat, a 3.2.6-ban bemutatott egyszerűsített modellnek megfelelően tételezzük fel, hogy A-A és B-B keresztmetszetek között a csont prozmatikus, körgyűrű keresztmetszetű  $R = 15 \text{ mm}$   $r = 10 \text{ mm}$ . A rugalmassági modulus  $E = 20 \text{ GPa}$ . Határozzuk meg a B-B keresztmetszet maximális feszültségeit, valamint az A-A keresztmetszet B-B-hez viszonyított elmozdulásait!



A keresztmetszeti jellemzők:

$$A = 392,7 \text{ mm}^2 \quad I_x = 31906,8 \text{ mm}^4$$

$$S'_x = 1583,3 \text{ mm}^3 \quad s = 10 \text{ mm}$$

A feszültségek:

$$\sigma_N = -1,12 \text{ MPa} \quad \sigma_{M, \max}^{\pm} = \pm 56,4 \text{ MPa}$$

$$\tau_{\max} = 0,839 \text{ MPa}$$

A relatív elmozdulások:

$$u_{AB} = -0,016 \text{ mm} (\downarrow)$$

$$\vartheta_{AB} = 0,04287 \text{ rad} (\curvearrowright)$$

$$v_{AB} = 6,618 \text{ mm} (\rightarrow)$$

## 3.3.4 Statikailag határozatlan szerkezetek

Amint tudjuk, a szerkezet akkor **határozott statikailag**, ha általános terhelő erőmódszer esetén a független statikai egyenletek száma egyenlő a független statikai ismeretlenek számával.

A szerkezet **kinematikailag határozott**, ha adott általános jellegű megoszló elmozdulások esetén a független kinematikai egyenletek száma egyenlő a független kinematikai (elmozdulási) ismeretlenek számával.

Ha az említett egyenletek száma nagyobb mint az ismeretlenek száma, akkor a szerkezet **kinematikailag túlhatározott**, ha az egyenletek száma kisebb mint az ismeretlenek száma, akkor a szerkezet **kinematikailag határozatlan**, más néven ingatag vagy labilis vagy elmozduló.

Igazolható, hogy a kinematikailag határozott szerkezetek **statikailag is határozottak**, továbbá, hogy egy szerkezet **kinematikailag annyiszorosán túlhatározott**, ahányszor **statikailag határozatlan** és viszont.

A határozott tartók statikai és kinematikai megoldását egymástól függetlenül elvégezhetjük. A kezdeti alakváltozások, hőmérséklet-változás, zsugorodás, gyártási hibák és támaszelmozdulások a határozott tartóban csak elmozdulásokat okoznak, igénybevételeket nem.

Egy  $n$ -szeresen határozatlan tartó megoldása a következő lépésekben végezhető el:

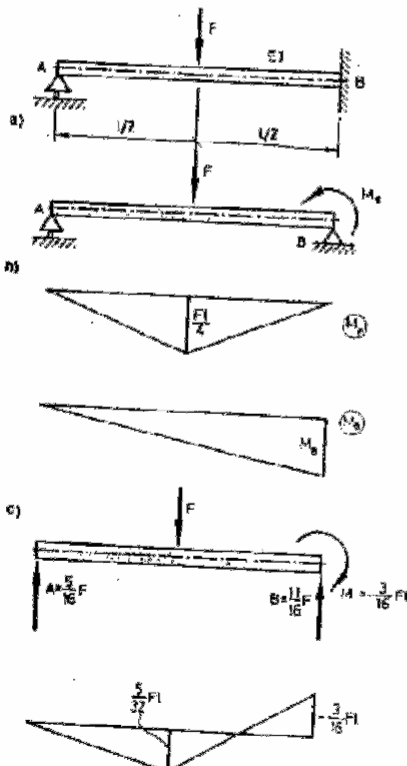
- Az  $n$  számú fölös kapcsolat átvágásával statikailag határozottá alakítjuk és az átvágást helyettesítjük az ún. fölös kapcsolati erővel.

- A statikailag határozott tartón (törzstartón) meghatározzuk az átvágások helyén a relatív elmozdulásokat a külső teherből és a fölös kapcsolati erőből. Mivel ilyen kapcsolatok a valóságban nincsenek átvágva, a relatív elmozdulások zérussal egyenlők, azaz felírhatók a csatlakozási egyenletek.

- A csatlakozási egyenletek megoldása szolgáltatja a fölös kapcsolati erőket.

- A többi reakciót, igénybevételt úgy határozhatjuk meg, hogy a törzstartón együttesen vesszük figyelembe a külső terheket és a kiszámított fölös kapcsolati erőket.

**Merev alátámasztású konzol (EJ=állandó)**



Egy lehetséges törzstartó a kéttámaszú tartó, így a fölös kapcsolati erő a reakciónyomaték.

A teherből keletkező elfordulás B helyen:

$$\varphi_B^{(F)} = -\frac{Fl^2}{16EJ}$$

A fölös kapcsolati erőből keletkező elfordulás:

$$\varphi_B^{(M_B)} = -\frac{M_B l}{3EJ}$$

A kompatibilitási feltétel (csatlakozási egyenlet):

$$\varphi_B = \varphi_B^{(F)} + \varphi_B^{(M_B)} = 0$$

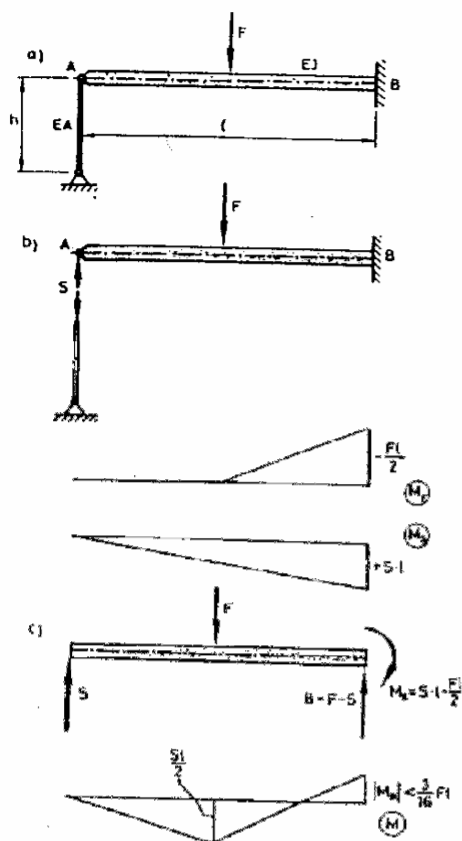
$$-\frac{Fl^2}{16EJ} - \frac{M_B l}{3EJ} = 0$$

A fölös kapcsolati erő:

$$M_B = -\frac{3}{16} Fl$$

Ezután a reakcióerők és igénybevételek statikai egyenletekből számíthatók.

## Rúddal alátámasztott konzol



A törzstartót (konzol) most a rúd átvágásával alakítjuk ki. A kompatibilitási feltétel most az fejezi ki, hogy a gerenda végének  $v_A$  lehajlása megegyezik a rúd  $\Delta\ell$  összenyomódásával:

$$v_A = \Delta\ell$$

A  $v_A$  lehajlást a statikailag határozott konzolon az  $F$  teherből és az ismeretlen  $S$  rúderőből kell kiszámítani, míg a  $\Delta\ell$  összenyomódást az  $S$  rúderőből.

A csatlakozási feltétel:

$$\frac{5F\ell^3}{24EJ} - \frac{S\ell^3}{3EJ} = \frac{S\ell}{EA} \rightarrow S = \frac{5F\ell^2}{24\frac{EJ}{EA} + 16\ell^2}$$

Ha az  $A$  támasz merev, vagyis  $EA \rightarrow \infty$ , akkor

$$S = A = \frac{5}{16}F,$$

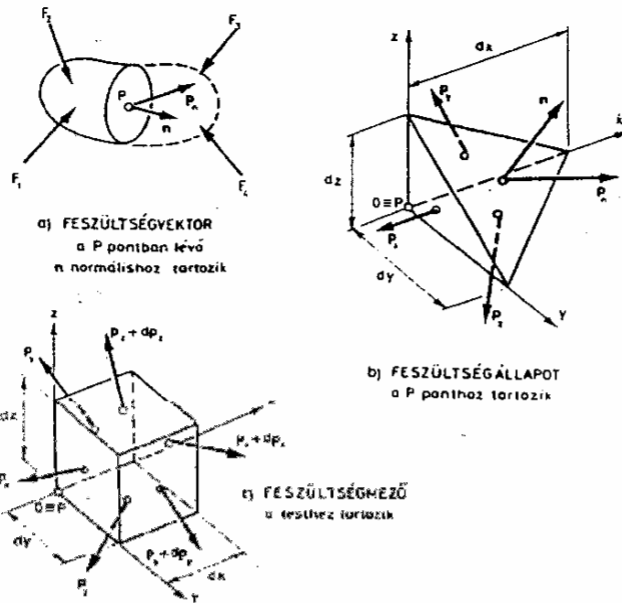
ami természetesen megegyezik az előbbi példa eredményével.

## 3.4 ÁLTALÁNOS SZILÁRDSÁGTAN

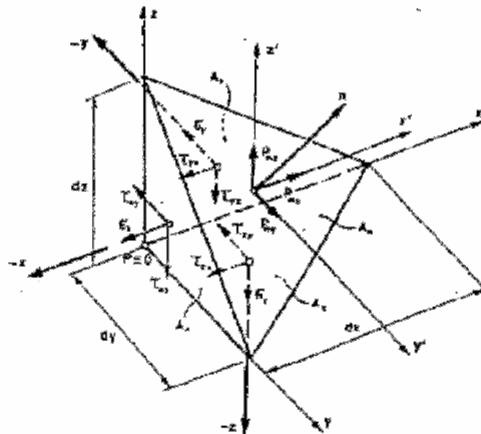
## 3.4.1 Feszültségállapot, főfeszültségek, trajektoriak

Az általános szilárdságtanban nem teszünk közelítéseket a testek alakjára és a terhekre vonatkozóan, ezért módszerei és eredményei teljesen általános mechanikai feladatok vizsgálatára is felhasználhatók. De továbbra is feltételezzük, hogy a vizsgált test egyes pontjai **kis elmozdulásokat** végeznek, a test **homogén** és anyaga **izotróp**. A probléma megoldását továbbra is az egyensúlyi vizsgálat, a geometriai vizsgálat és az anyagegyenletek felírása jelenti.

A vizsgált test egy metszetének  $P$  pontjában az  $n$  normálishoz meghatározható egy  $p_n$  **feszültségvektor**. A  $P$  ponton átmenő metszetekhez tartozó feszültségvektorok összessége adja meg a **pont feszültségállapotát**. A feszültségeknek a  $p_x(x, y, z)$ ,  $p_y(x, y, z)$  és  $p_z(x, y, z)$  függvényeit **feszültségmezőnek** nevezzük. A feszültségmező tehát egy testhez kötött fogalom, amely megmondja, hogy hogyan függ a feszültségállapot a pont helyétől, azaz hogyan változnak a feszültségvektorok az  $x, y, z$  koordináták függvényében.



Ha egy pontban az x,y és z normálisú metszetekre működő  $p_x$ ,  $p_y$  és  $p_z$  feszültségvektorokat ismerjük, akkor meghatározható az n normálishoz tartozó  $p_n$  feszültségvektor is.



$$\mathbf{n} = k\mathbf{i} + l\mathbf{j} + m\mathbf{k},$$

ahol  $k = \cos(n,x)$ ,  $l = \cos(n,y)$ ,  $m = \cos(n,z)$ .

$$\begin{bmatrix} p_{nx} \\ p_{ny} \\ p_{nz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \\ m \end{bmatrix}$$

vagy tömören  $\mathbf{p}_n = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$

A feszültségtenzor mátrixa a reciprocitási tételnek megfelelően szimmetrikus.  
A normál feszültség vektora ( $\mathbf{n}^T$  az n vektor transzponáltja)

$$\underline{\sigma}_n = \sigma_n \mathbf{n} = (\mathbf{n}^T \mathbf{F} \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

A teljes nyírófeszültség vektora

$$\underline{\tau}_n = \mathbf{p}_n - \underline{\sigma}_n = \mathbf{F} \mathbf{n} - (\mathbf{n}^T \mathbf{F} \mathbf{n}) \mathbf{n}.$$

### 3. Szilárdságtani alapok

Felmerül a kérdés, hogy van-e egy vagy több olyan normális, amelyhez tartozó feszültségvektor a normálissal párhuzamos, vagyis amelynél

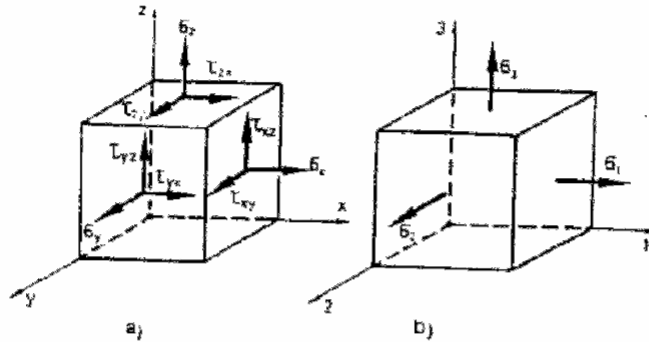
$$\underline{\tau}_n = 0 \text{ és } \underline{p}_n = \sigma_n \cdot \underline{n}.$$

Ha  $i$  indexszel jelöljük ezt a normálist, akkor

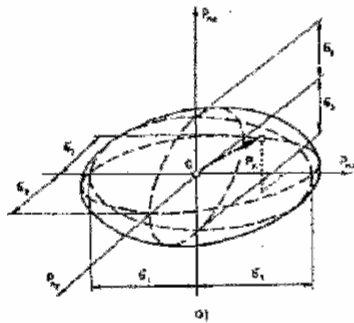
$$\sigma_i \underline{n}_i = \mathbf{F} \underline{n}_i,$$

azaz a feladat az  $\mathbf{F}$  mátrix  $\sigma_i$  sajátértékeinek és  $\underline{n}_i$  sajátvektorainak a meghatározása.

A meghatározható  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  sajátértéket **főfeszültségeknek**, az  $\underline{n}_1, \underline{n}_2$  és  $\underline{n}_3$  sajátvektorok irányát **feszültségi főirányoknak** nevezzük.



A test egy tetszőleges  $P$  pontjának a feszültségállapotát a feszültségi ellipszoid szemlélteti



Ha az egyik főfeszültség zérus (síkbeli feszültségi állapot), akkor a feszültségi ellipszoid ellipszis, ha két főfeszültség zérus (lineáris feszültségi állapot), akkor a feszültségi ellipszoid szakasszá fajul.

Síkbeli feszültségi állapotban a feszültségi vektor

$$\begin{bmatrix} p_{xx} \\ p_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}$$

$$\underline{p}_n = \mathbf{F} \underline{n}$$

A főfeszültségek:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



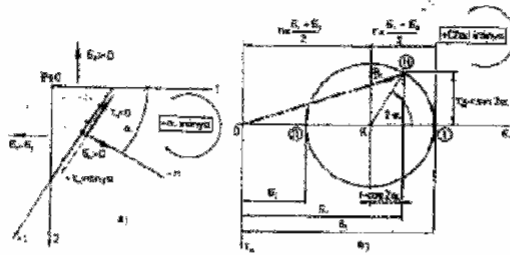
A főirányok  $\alpha_0$  hajlásszöge az x illetve y tengelyhez képest

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$

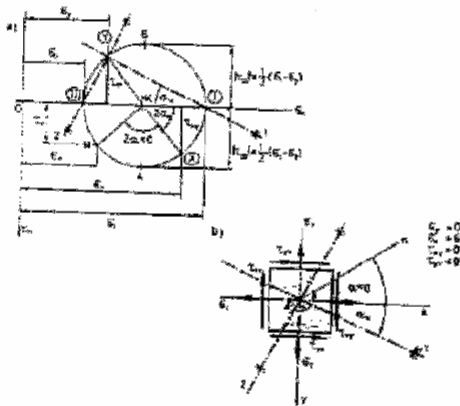
A feszültségi tenzor a főfeszültségekkel kifejezve

$$\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix}$$

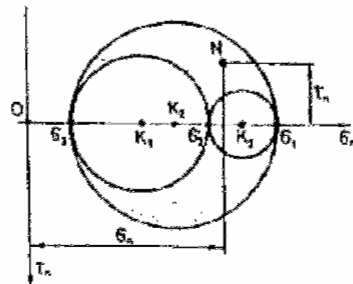
A tetszőleges  $\alpha$  irányú normálishoz tartozó feszültségvektorok végpontjai a  $(\sigma_n, \tau_{nt})$  koordináta-rendszerben egy körön helyezkednek el ezt nevezzük Mohr-féle feszültségi körnek.



A feszültségi Mohr körből geometriai összefüggések szerint is meghatározhatók a főfeszültségek és a feszültségi főirányok.

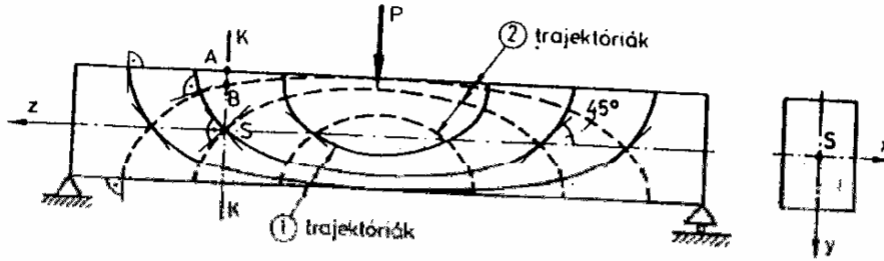


Térbeli feszültségi állapot esetén a három Mohr-kör pontjai csak a fősikokra eső normálisokhoz tartozó feszültségvektor komponenseit ábrázolják. Általános tetszőleges normálishoz tartozó feszültségvektor N végpontja mindig a feszültségi főkörön belül és a másik két Mohr-körön kívül van.

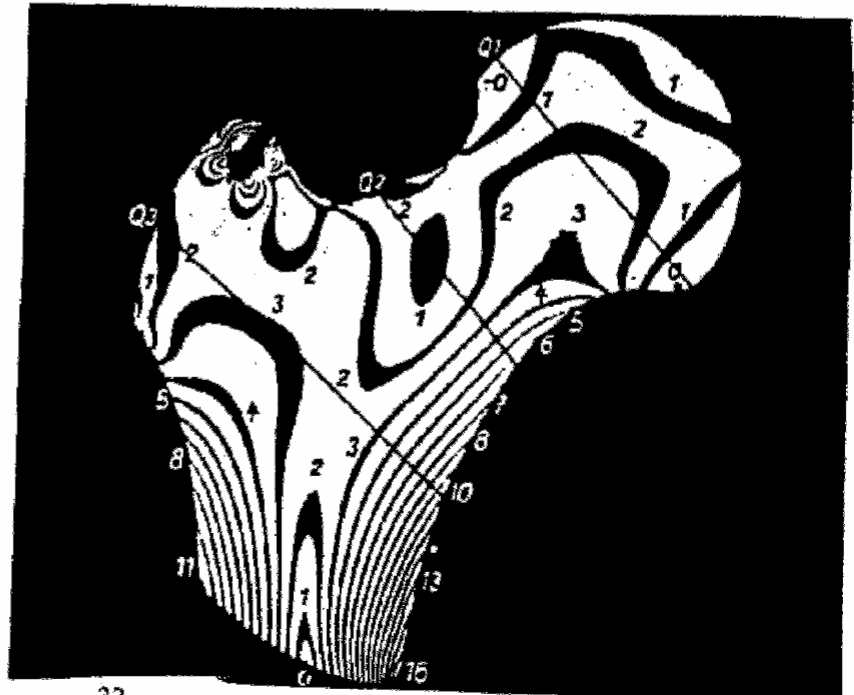
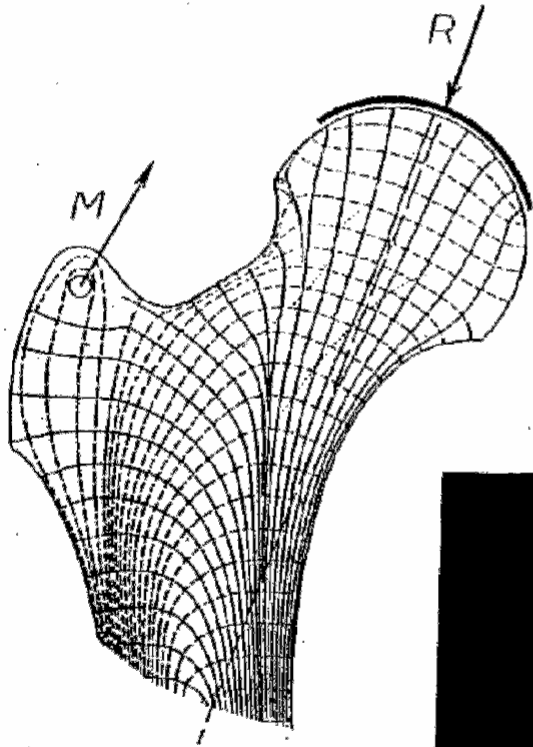


### 3. Szilárdságtani alapok

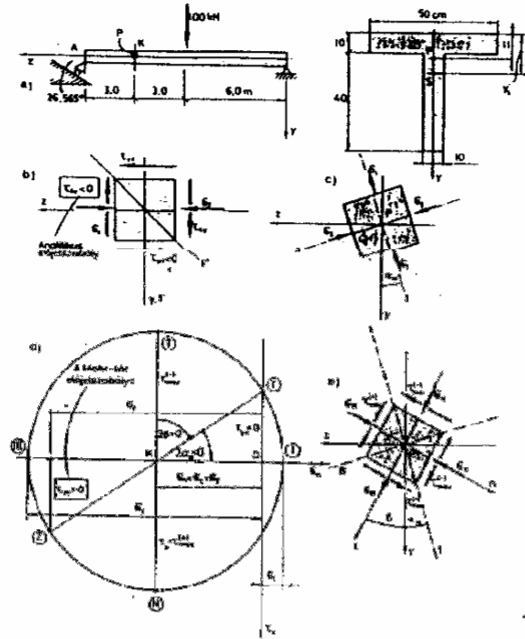
Az első, illetve a második főfeszültségi trajektóriák a síkbeli feszültségállapot síkjában fekvő olyan görbeseregek, amelyeknek érintője minden pontban az első, illetve a második főtengely. Mivel a főtengelyek merőlegesek egymásra, a trajektóriák ortogonális görbeseregek.



Az alábbi ábrák mutatják a femur egy részletének főfeszültségi trajektóriáit, illetve a fotoelasztikus kísérlet eredményét egy adott terhelés esetén:



Kéttámaszú tartó K keresztmetszetének P pontjában a feszültségi állapot meghatározása az alábbi lépésekben végezhető el.



A reakcióerők és igénybevételek:

$$A_y = B_y = 50 \text{ kN}, A_z = -B_z = 25 \text{ kN}, N_k = -25 \text{ kN}, Q_k = +50 \text{ kN}, M_k = 15000 \text{ kNcm}$$

A keresztmetszet geometriai jellemzői:

$$A = 900 \text{ cm}^2, y_s = 16,1 \text{ cm}, I_x = 196400 \text{ cm}^4, S'_x = 5616 \text{ cm}^3.$$

$$\text{A feszültségösszetevők (síkbeli feszültségi állapot, } \sigma_z = \pm \frac{N}{A} \pm \frac{M_x}{I} y, \tau_{zy} = \frac{QS'_x}{I_s}$$

$$\sigma_z = -4,173 \text{ MPa}, \tau_{zy} = -1,43 \text{ MPa}; \sigma_y = \sigma_x = \tau_{zx} = \tau_{xy} = 0.$$

Mivel a feszültségösszetevők közül csak  $\sigma_z$  és  $\tau_{zy}$  különbözik zérustól így a feszültségi állapot síkja az  $[y,z]$  sík.

A főfeszültségek és feszültségi főirányok:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_y + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_y - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} = \frac{-4,173}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{4,173}{2}\right)^2 + (-1,43)^2}$$

$$\sigma_1 = \underline{0,443 \text{ MPa}}$$

$$\sigma_2 = \underline{-4,617 \text{ MPa}}$$

## 3.4.2 Feszültségmező, egyensúlyi egyenletek

Az  $F$  feszültségmátrix elemei általában háromváltozós függvények:

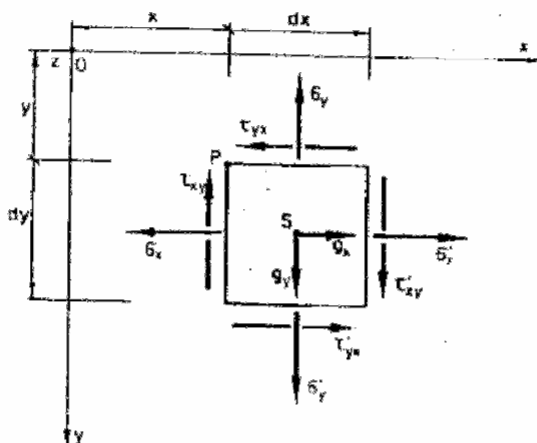
$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z) \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y, z) \quad \sigma_z = \sigma_z(x, y, z)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z) \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z) \quad \tau_{zx} = \tau_{zx}(x, y, z)$$

Ezeket a függvényeket a test **feszültségmezőjének** nevezzük.

A fenti függvények és a testre ható erők közötti összefüggések a test belsejében, illetve a határoló felületén lévő pontok környezetéből kivágott elemi hasáb, illetve elemi tetraéder egyensúlyi vizsgálata alapján vezethetők le.

Síkbeli feszültségi állapot esetén az elemi hasábra ható erők az alábbi ábrán láthatók



Térbeli feszültségállapot esetén az egyensúlyi egyenletek

$$\frac{\delta \sigma_x}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{xy}}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{xz}}{\delta z} + g_x = 0,$$

$$\frac{\delta \tau_{yx}}{\delta x} + \frac{\delta \sigma_y}{\delta y} + \frac{\delta \tau_{yz}}{\delta z} + g_y = 0,$$

$$\frac{\delta \tau_{zx}}{\delta x} + \frac{\delta \tau_{zy}}{\delta y} + \frac{\delta \sigma_z}{\delta z} + g_z = 0,$$

ahol  $g_x, g_y, g_z$  a térfogati erők komponensei.

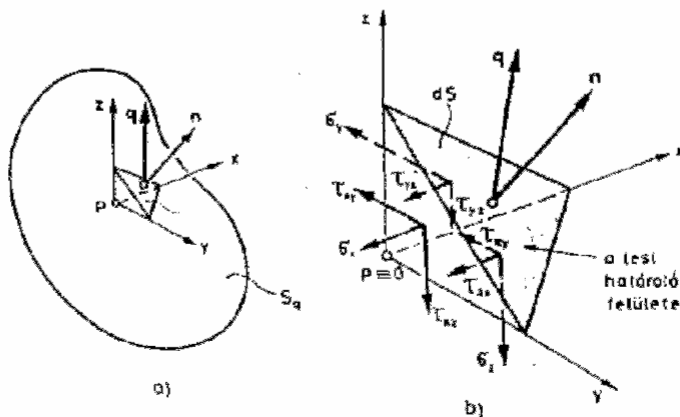
A test határoló felületén lévő pont esetén - ha itt  $q$  felületi teher működik -, akkor a statikai kerületi feltételek:

$$\sigma_x k + \tau_{xy} l + \tau_{xz} m = q_x$$

$$\tau_{yx} k + \sigma_y l + \tau_{yz} m = q_y$$

$$\tau_{zx} k + \tau_{zy} l + \sigma_z m = q_z$$

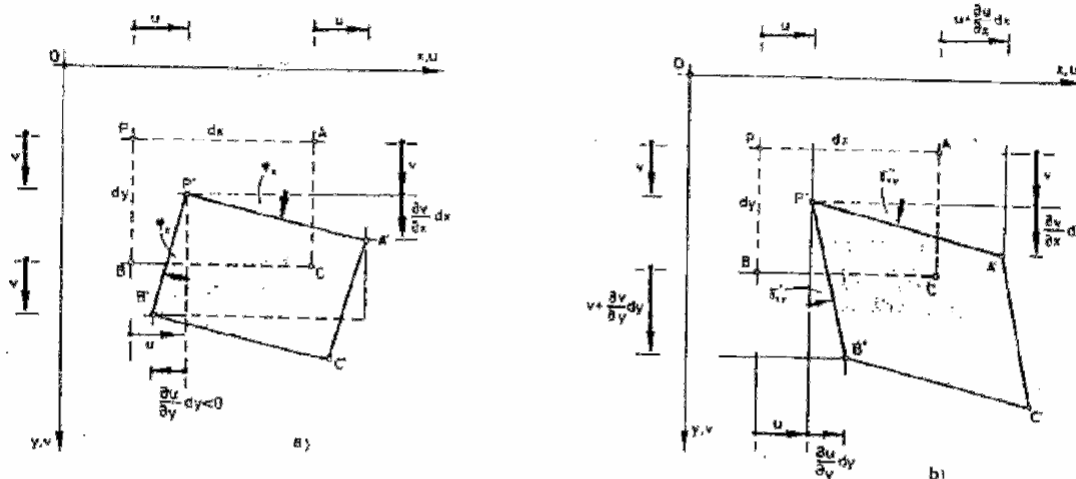
$$Fn = q$$



3.4.3 Alakváltozásállapot, főalakváltozások

A test egy pontjának térbeli helyzetét  $r = xi+yj+zk$  helyzetvektor, a pont helyének megváltozását  $u = ni+vj+wk$  eltolódásvektor adja meg. A test valamennyi pontjának eltolódását az  $u(x,y,z)=u(x,y,z)i+v(x,y,z)j+w(x,y,z)k$  eltolódásmező adja meg. Merevtestszerű elmozdulás (eltolódás és elfordulás) közben a test pontjainak egymáshoz viszonyított helyzete változatlan, alakváltozások esetén azonban az egyes pontok viszonylagos helyzete is megváltozik. A test egy pontjában felvehető minden egyes elemi szálhoz, illetve az annak irányára mutató  $n$  irányvektorok egy  $d_n$  alakváltozás-(deformációs) vektort rendelünk. A pontban felvehető összes irányhoz tartozó alakváltozás-vektorok összességét a pont alakváltozási állapotának nevezzük.

Az alábbi ábrán egy síkbeli tárcsa merevtestszerű elmozdulása, illetve alakváltozása eredményei láthatóak.



Egy pont térbeli alakváltozási állapotát a szimmetrikus  $A$  alakváltozás tenzor jellemzi:

$$A = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & \epsilon_y & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

Az  $n$  irányú  $\epsilon_n$  fajlagos nyúlás és az egymásra merőleges  $n$  és  $t$  irányok között létrejövő  $\gamma_{nt}$  szögváltozás:

$$\epsilon_n = n^T A n$$

$$\gamma_{nt} = t^T A n$$

Minden pontban van három egymásra merőleges irány, amelyhez tartozó fajlagos hosszváltozások helyi szélsőértéket vesznek fel.

A meghatározható három irányt alakváltozási főirányoknak, és a hozzájuk tartozó  $\epsilon_1, \epsilon_2$  és  $\epsilon_3$  fajlagos nyúlásokat főnyúlásoknak nevezzük.

A feszültségi ellipszoid analógiájára az alakváltozási ellipszoidot is definiálhatjuk és ugyancsak analóg módon beszélhetünk térbeli, síkbeli és lineáris alakváltozási állapotról.

3.4.4 Alakváltozásmező, geometriai és összeférhetőség egyenletek

Az  $A$  alakváltozás-tenzor elemei általában háromváltozós függvények:

$$\epsilon_x = \epsilon_x(x, y, z), \quad \epsilon_y = \epsilon_y(x, y, z), \quad \epsilon_z = \epsilon_z(x, y, z),$$

$$\gamma_{xy} = \gamma_{xy}(x, y, z), \quad \gamma_{yz} = \gamma_{yz}(x, y, z), \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx}(x, y, z).$$

Ezeket a függvényeket a test **alakváltozás-mezőjének** nevezzük. Az alakváltozás-komponensek és az eltolódásfüggvények közötti kapcsolatot az ún. **geometriai egyenletek** írják le.

$$\varepsilon_x = \frac{\delta u}{\delta x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\delta v}{\delta y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\delta w}{\delta z}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\delta u}{\delta y} + \frac{\delta v}{\delta x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\delta v}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\delta u}{\delta z} + \frac{\delta w}{\delta x}$$

A geometriai egyenletek tartalma az, hogy a test szakadozásoktól és gyűrődésektől mentes, folytonos alakváltozást végez.

Ha a test felületének egy része előírt  $u_0$ ,  $v_0$ , és  $w_0$  eltolódásokat végez, akkor a **geometriai kerületi feltételek**:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y, z)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y, z)$$

$$w(x, y, z) = w_0(x, y, z)$$

Ha a geometriai egyenletekből kiküszöböljük az eltolódásokat, akkor jutunk az ún. **összeférhetőségi, kompatibilitási egyenletekhez**

$$\frac{\delta^2 \gamma_{xy}}{\delta x \delta y} = \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y^2}, \quad \frac{\delta^2 \gamma_{yz}}{\delta y \delta z} = \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta y^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta z^2}, \quad \frac{\delta^2 \gamma_{zx}}{\delta z \delta x} = \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta z^2} + \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x^2},$$

$$\frac{\delta}{\delta x} \left( -\frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{zx}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} \right) = 2 \frac{\delta^2 \varepsilon_x}{\delta y \delta z},$$

$$\frac{\delta}{\delta y} \left( -\frac{\delta \gamma_{zx}}{\delta y} + \frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} + \frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} \right) = 2 \frac{\delta^2 \varepsilon_y}{\delta x \delta z},$$

$$\frac{\delta}{\delta z} \left( -\frac{\delta \gamma_{xy}}{\delta z} + \frac{\delta \gamma_{yz}}{\delta x} + \frac{\delta \gamma_{zx}}{\delta y} \right) = 2 \frac{\delta^2 \varepsilon_z}{\delta x \delta y}.$$

### 3.4.5. A lineárisan rugalmas testek alapegyenletei, Hooke-törvény

Lineárisan rugalmas anyagnál a feszültségek és a velük együtt keletkező alakváltozások között kölcsönös egyértelmű és megfordítható összefüggés áll fenn, ez mátrixos alakban

$$\underline{\varepsilon} = \mathbf{H} \underline{\sigma}$$

ahol  $\underline{\varepsilon}$  az alakváltozatok,  $\underline{\sigma}$  a feszültségek vektora és  $\mathbf{H}$  a Hooke-törvény hajlékonysági mátrixa. A fenti egyenlet inverze:

$$\underline{\sigma} = \mathbf{H}^{-1} \underline{\varepsilon} = \mathbf{D} \underline{\varepsilon},$$

ahol a  $\mathbf{D} = \mathbf{H}^{-1}$  mátrixot az anyagtróvény merevségi mátrixának nevezzük.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix},$$

ahol  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  a 3.1.5-ben megismert anyagállandók és

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

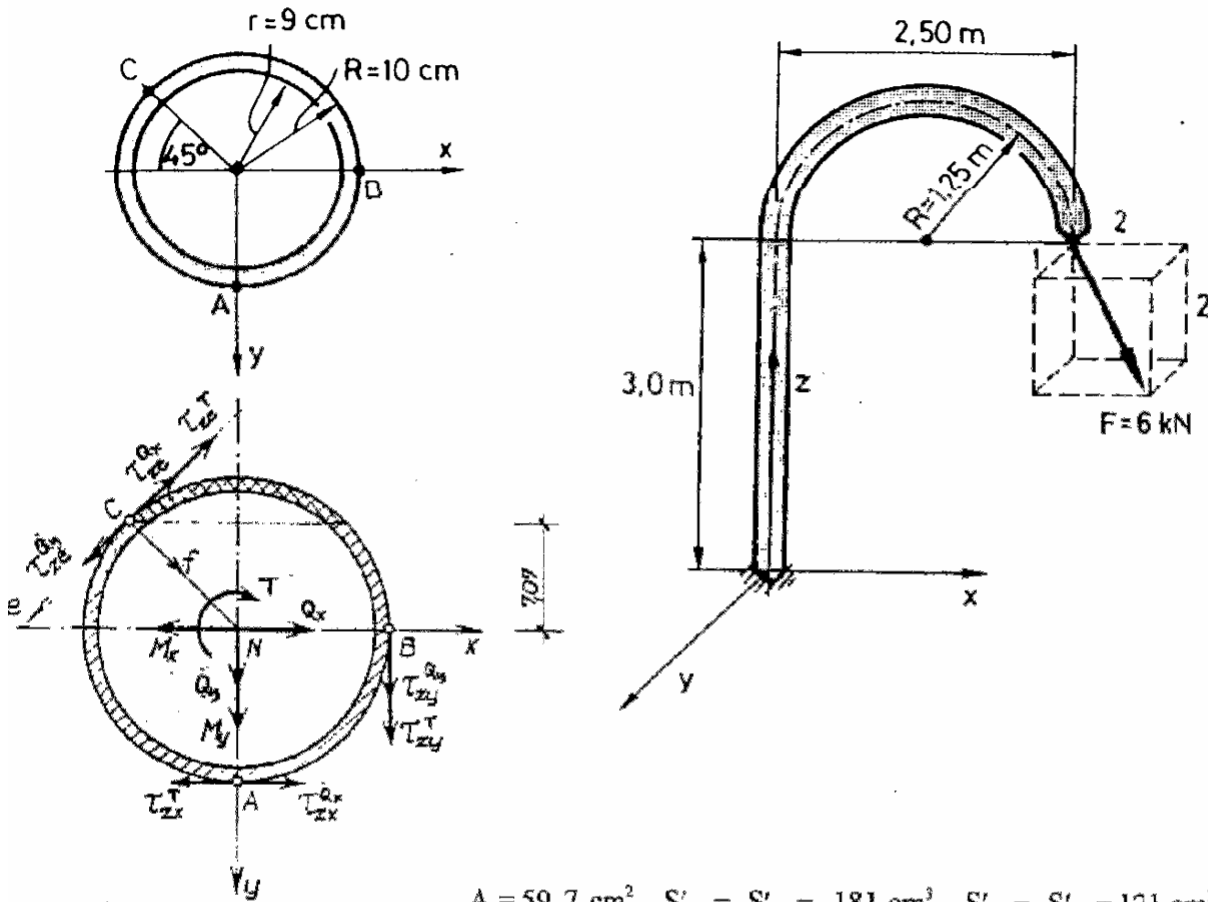
az ún. Lamé-féle állandó. Az  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  anyagállandók sem függetlenek egymástól, közöttük fennáll a

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

összefüggés.

Síkbeli, illetve lineáris feszültségi vagy alakváltozási állapot esetén a fenti összefüggések értelemszerűen egyszerűsödnek.

Befogott térbeli konzol  $E = 210 \text{ GPa}$ ,  $\nu = 0,3125$ . A befogási keresztmetszet vizsgálata:



$$A = 59,7 \text{ cm}^2, S'_{xB} = S'_{yA} = 181 \text{ cm}^3, S'_{xC} = S'_{yC} = 121 \text{ cm}^3$$

$$I_x = I_y = 2700 \text{ cm}^4, I_o = 5400 \text{ cm}^4$$

$$N = -4 \text{ kN}, Q_x = 2 \text{ kN}, M_x = 6 \text{ kNm}, M_y = 22 \text{ kNm}$$

$$T = 5 \text{ kNm}$$

A pont: a feszültségállapot síkja az  $[x,z]$  sík.

$$F = \begin{bmatrix} 0 & -7,92 \\ -7,92 & -22,9 \end{bmatrix}$$

$$F_{1,2} = \begin{bmatrix} 2,47 & 0 \\ 0 & -25,4 \end{bmatrix} [\text{Mpa}] \quad \alpha_o = 17,3^\circ$$

$$A = 10^{-5} \begin{bmatrix} 3,41 & 0 & 9,90 \\ 0 & 3,41 & 0 \\ 9,90 & 0 & -10,9 \end{bmatrix}$$

$$A_{1,2,3} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 4,95 & 0 & 0 \\ 0 & 3,41 & 0 \\ 0 & 0 & -12,4 \end{bmatrix}$$



**B pont:** a feszültségállapot síkja az  $[y,z]$  sík.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 9,92 \\ 9,92 & -82,1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} 1,18 & 0 \\ 0 & -83,3 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad \alpha_0 = 6,79^\circ$$

$$\mathbf{A} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 12,2 & 0 & 0 \\ 0 & 12,2 & -12,4 \\ 0 & -12,4 & -39,1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1,2,3} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 13,0 & 0 & 0 \\ 0 & 12,2 & 0 \\ 0 & 0 & -39,8 \end{bmatrix}$$

**C pont:** a feszültségállapot síkja az  $[e,z]$  sík.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} 0 & 9,68 \\ 9,68 & 72,6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F}_{1,2} = \begin{bmatrix} 73,9 & 0 \\ 0 & -1,27 \end{bmatrix} [\text{MPa}] \quad \alpha_0 = 7,46^\circ$$

$$\mathbf{A} = 10^{-5} \begin{bmatrix} -10,8 & 0 & 12,1 \\ 0 & -10,8 & 0 \\ 12,1 & 0 & 34,6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}_{1,2,3} = 10^{-5} \begin{bmatrix} 35,4 & 0 & 0 \\ 0 & -10,8 & 0 \\ 0 & 0 & -11,6 \end{bmatrix}$$

### 3.4.6 Rugalmasságtan alapegyenletei

Vegyük szemügyre egy izotrop, lineárisan rugalmas anyagú  $V$  térfogatú testet, amely az  $S_q$  felületek működő  $\mathbf{q}^T [q_x, q_y, q_z]$  fajlagos felületi erők, a belső pontjaira működő  $\mathbf{g}^T [g_x, g_y, g_z]$  fajlagos térfogati erők (pl. súlyerők) és az  $S_u$  felületén az  $\mathbf{n}_0^T [n_x, n_y, n_z]$  eltolódásokkal megadott geometriai kényszerek (pl. támaszok vagy előírt eltolódások) hatására nyugalomban van. A test mechanikai állapotát a

$$\sigma_x(x,y,z), \sigma_y(x,y,z), \sigma_z(x,y,z), \tau_{xy}(x,y,z), \tau_{yz}(x,y,z), \tau_{zx}(x,y,z)$$

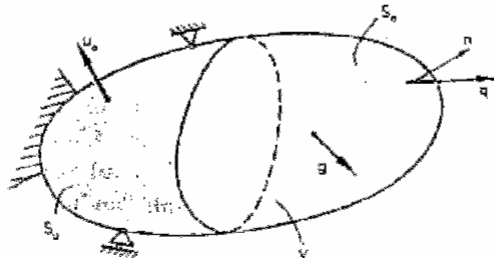
feszültségmezők, az

$$\varepsilon_x(x,y,z), \varepsilon_y(x,y,z), \varepsilon_z(x,y,z), \gamma_{xy}(x,y,z), \gamma_{yz}(x,y,z), \gamma_{zx}(x,y,z)$$

alakváltozásmezők és az

$$u(x,y,z), v(x,y,z), w(x,y,z)$$

eltolódásmezők, tehát összesen 15 háromváltozós függvény jellemzi.



Ezeknek ki kell elégíteni a 3.4.2-ben leírt egyensúlyi egyenletek (3) és statikai kerületi feltételeket, a 3.4.4-ben leírt geometriai egyenleteket (6) és geometriai kerületi feltételeket, továbbá a 3.4.5-ben leírt anyagegyenleteket (6), összesen 15 egyenletet és 6 kerületi feltételt. Ezeket együttesen a **rugalmasságtan alapegyenleteinek** nevezzük.

A rugalmasságtan alapegyenleteinek megoldási módszereit két fő csoportba oszthatjuk.

A rugalmasságtan erőmódszerének az a lényege, hogy az alapegyenletekből kiküszöbölve az eltolódásokat és az alakváltozásokat a hat ismeretlen feszültségfüggvény meghatározására hat differenciálegyenletet kapunk.

A térfogati erőket zérusnak tekintve:

$$(1 + \nu) \Delta \sigma_x + \frac{\delta^2 s}{\delta x^2} = 0,$$

$$(1 + \nu) \Delta \sigma_y + \frac{\delta^2 s}{\delta y^2} = 0,$$

$$(1 + \nu) \Delta \sigma_z + \frac{\delta^2 s}{\delta z^2} = 0,$$

$$(1 + \nu) \Delta \tau_{xy} + \frac{\delta^2 s}{\delta x \delta y} = 0,$$

$$(1 + \nu) \Delta \tau_{yz} + \frac{\delta^2 s}{\delta y \delta z} = 0,$$

$$(1 + \nu) \Delta \tau_{xz} + \frac{\delta^2 s}{\delta x \delta z} = 0,$$

ahol

$$\Delta = \nabla^2 = \frac{\delta^2}{\delta x^2} + \frac{\delta^2}{\delta y^2} + \frac{\delta^2}{\delta z^2} \text{ és } s = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z.$$

A fenti egyenleteket **Beltrami egyenleteknek** nevezzük.

A rugalmasságtan elmozdulásmódszerének az a lényege, hogy az alapegyenletekből a feszültségeket és az alakváltozásokat kiküszöbölve a három ismeretlen eltolódásfüggvény meghatározására három differenciálegyenletet kapunk.

$$(\lambda + G) \frac{\delta e}{\delta x} + G \Delta u + q_x = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\delta e}{\delta y} + G \Delta v + q_y = 0,$$

$$(\lambda + G) \frac{\delta e}{\delta z} + G \Delta w + q_z = 0,$$

ahol

$$e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{\delta u}{\delta x} + \frac{\delta v}{\delta y} + \frac{\delta w}{\delta z}$$

A fenti egyenleteket **Lamé-féle egyenleteknek** nevezzük.

Az alapegyenletek bonyolultságát és az ismeretlen függvények nagy számát tekintve érzékelhető, hogy konkrét térbeli feladatok megoldása matematikai szempontból igen nehéz feladatot jelent és -egyszerűbb esetektől eltekintve - zárt alakban nem is lehetséges.

### 3.5. Munka és energiatételek

#### 3.5.1. Alapfogalmak

A munka- és az energiatételek speciális kapcsolatot teremtenek a statikai és a kinematikai jellegű változók, az erő-feszültségrendszer és az elmozdulás-alakváltozásrendszer között, formailag az egyensúlyi, illetve a geometriai egyenleteket helyettesítik és az anyagegyenletekkel együtt a szilárdságtani feladatok megoldásának egy másik lehetőségét szolgáltatják.

**Általánosított erőknek** nevezzük a külső és belső, erő és feszültségjellegű mennyiségek összességét. **Általánosított elmozdulásnak** nevezzük a külső és belső, elmozdulás- és alakváltozás jellegű mennyiségek összességét. Az általánosított erők, illetve elmozdulások akkor összetartozóak, ha a anyagegyenletek által megszabott oksági kapcsolatban állnak egymással.

A statikailag lehetséges általánosított erőrendszernek ki kell elégítenie az egyensúlyi egyenleteket és a statikai kerületi feltételeket, ugyanígy a kinematikailag lehetséges általánosított elmozdulásrendszernek ki kell elégítenie a geometriai egyenleteket és a geometriai kerületi feltételeket.

A teljes külső munka:

$$W_k = \int_e f^T de + \int_{S_u} q^T dudS + \int_{V_u} g^T dudV,$$

A teljes belső vagy alakváltozási munka

$$W_b = - \int_{V_\varepsilon} \underline{\sigma}^T d\underline{\varepsilon} dV$$

A teljes külső kiegészítő munka:

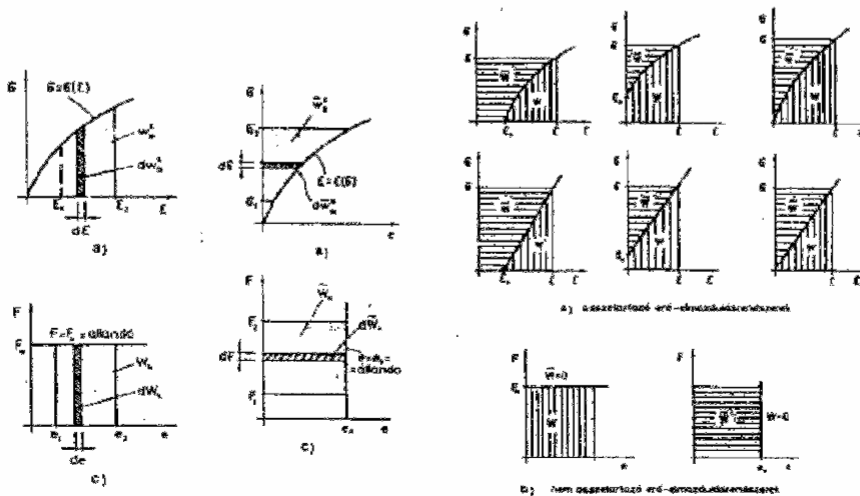
$$\bar{W}_k = \int_f e^T df + \int_{S_q} u^T dq ds + \int_{V_g} u^T dg dV$$

A teljes belső vagy alakváltozási kiegészítő munka

$$\bar{W}_b = - \int_{V_\sigma} \underline{\varepsilon}^T d\underline{\sigma} dV,$$

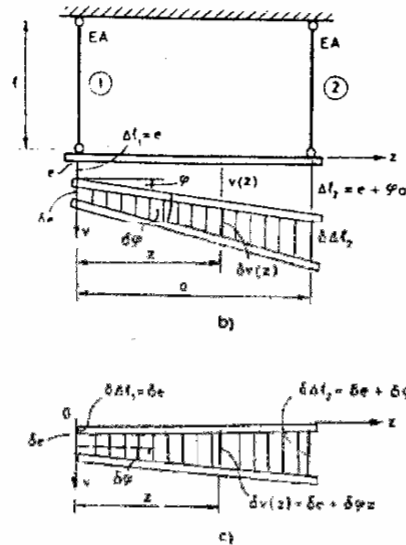
ahol  $f$  a külső koncentrált erők,  $e$  a külső elmozdulásértékek,  $q$  a külső megoszló erők,  $g$  a térfogati erők,  $u$  az elmozdulásfüggvények,  $\underline{\sigma}$  a feszültség-függvények,  $\underline{\varepsilon}$  az alakváltozás-függvények vektorai

Ha a munkavégzésben résztvevő általánosított erők és általánosított elmozdulások összetartozók, akkor az így keletkező munkát saját munkának, ellenkező esetben idegen munkának nevezzük.



A munka és a kiegészítő munka mindig a  $\sigma \epsilon$  szorzatnak megfelelő téglalap területével azonos. Az erő jellegű terhek csak külső munkát okoznak, az elmozdulásjellegű terhek pedig csak külső kiegészítő munkát eredményezhetnek.

A virtuális elmozdulásrendszer egy tetszőleges, geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer változatlan geometriai feltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása, variációja.

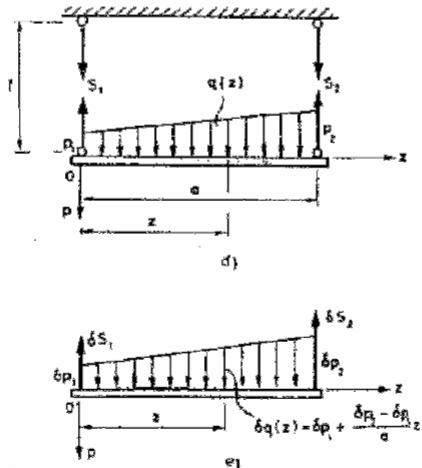


A virtuális munka a tényleges erőrendszernek egy virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája. A külső, illetve belső virtuális munka:

$$\delta W_k = f^T \delta e + \int_S q^T \delta u dS + \int_V g^T \delta u dV,$$

$$\delta W_b = - \int_V \underline{\sigma}^T \delta \underline{\epsilon} dV.$$

A virtuális erőrendszer egy tetszőleges statikailag lehetséges erőrendszer, változatlan statikai kerületi feltételek mellett képzett differenciálisan kicsiny megváltozása, variációja.



A virtuális kiegészítő munka a tényleges elmozdulásrendszernek egy virtuális erőrendszeren végzett munkája. A külső és belső virtuális kiegészítő munka

$$\delta \bar{W}_k = e^T \delta f + \int_S u^T \delta q dS + \int_V u^T \delta g dV$$

$$\delta \bar{W}_b = - \int_V \underline{\epsilon}^T \delta \underline{\sigma} dV.$$

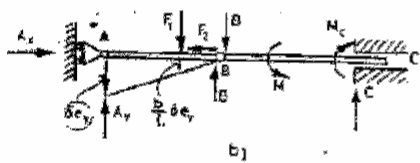
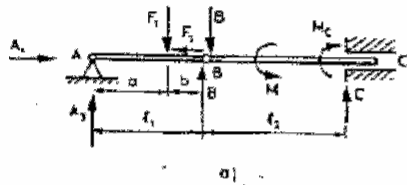
3.5.2. A szilárdságtan munkatételei

A virtuális elmozdulások tétele szerint egy statikailag lehetséges erőrendszer bármely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája zérus, azaz egyensúlyban lévő mechanikai rendszeren végzett virtuális munkák összege zérus

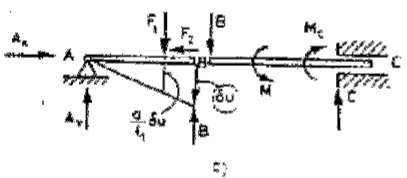
$$\delta W = \delta W_k + \delta W_b = \mathbf{f}^T \delta \mathbf{e} + \int_S \mathbf{q}^T \sigma \mathbf{n} \, ds + \int_V \mathbf{g}^T \sigma \mathbf{n} \, dV - \int_V \sigma^T \epsilon \, dV = 0$$

A virtuális elmozdulások tétele az erőrendszerek egyensúlyának szükséges feltétele és így erő jellegű mennyiségek számítására alkalmas.

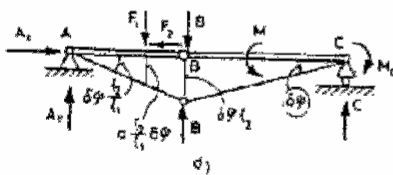
Gerber tartó reakció erői meghatározása a virtuális elmozdulások tételével. Az egyes reakció erők meghatározásához nem az egész szerkezetet különítjük el, hanem csak a szóban forgó kényszert távolítjuk el és az így létrehozott kényszermozgású láncolatra írjuk fel a virtuális elmozdulások tételét. A láncolat kényszermozgása biztosítja a virtuális elmozdulásrendszer kompatibilis jellegét



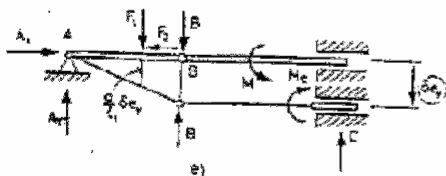
$$-A_y \delta e_y + F_1 \frac{b}{\ell_1} \delta e_y = 0 \rightarrow A_y = F_1 \frac{b}{\ell_1}$$



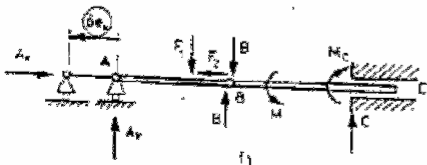
$$F_1 \frac{a}{\ell_1} \delta u - B \delta u = 0 \rightarrow B = F_1 \frac{a}{\ell_1}$$



$$F_1 a \frac{\ell_2}{\ell_1} \delta \varphi - M_c \delta \varphi = 0 \rightarrow M_c = F_1 a \frac{\ell_2}{\ell_1}$$



$$F_1 \frac{a}{\ell_1} \delta e_y - C \delta e_y = 0 \rightarrow C = F_1 \frac{a}{\ell_1}$$



$$F_2 \delta e_x - A_x \delta e_x = 0 \rightarrow A_x = F_2$$

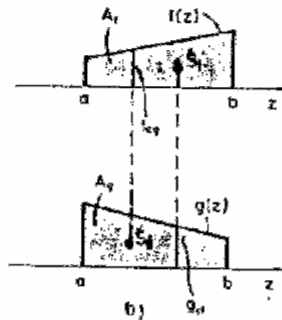
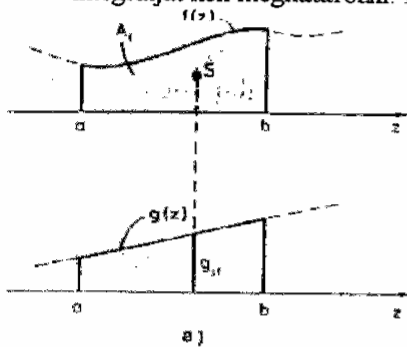
### 3. Szilárdságtani alapok

A virtuális erők tétele kimondja, hogy egy geometriailag lehetséges elmozdulásrendszernek bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája zérus

$$\delta\bar{W} = \delta\bar{W}_k + \delta\bar{W}_b = \mathbf{e}^T \delta \mathbf{f} + \int_S \mathbf{u}^T \delta \mathbf{q} dS + \int_V \mathbf{u}^T \delta \mathbf{g} dV - \int_V \underline{\underline{\varepsilon}}^T \delta \underline{\underline{\sigma}} dV = 0$$

A virtuális erők tétele elmozdulás jellegű mennyiségek számítására alkalmas, mivel kompatibilitási feltételt fejez ki.

A feladatok során gyakran két igénybevételi függvény szorzatának  $\int_a^b f(z)g(z)dz$  alakú határozott integrálját kell meghatározni. Ha a két függvény közül az egyik lineáris, akkor

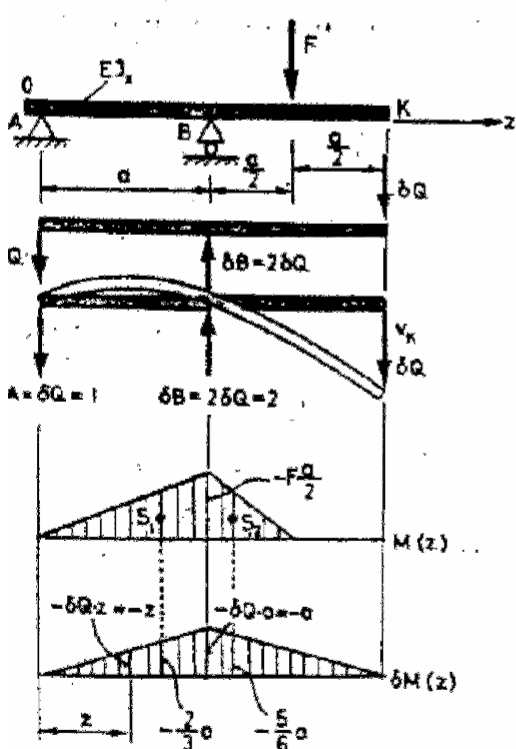


$$\int_a^b f(z)g(z)dz = A_f \cdot g_{af}$$

Ha mindkettő lineáris akkor

$$\int_a^b f(z)g(z)dz = A_f \cdot g_{af} = A_g \cdot f_{ag}$$

Statikailag határozott rugalmas gerenda elmozdulásainak számítása. A hajlítási merevség  $EJ_x$ , a feladat a  $v_k$  meghatározása. A keresett  $v_k$  eltolódás helyén felvett  $dQ$  virtuális erő külső virtuális kiegészítő munkája:  $\delta\bar{W}_k = \delta Q v_k$ . A belső virtuális kiegészítő munkát a  $\delta M(z)$  virtuális hajlítónyomatékokon a tényleges  $\kappa(z)$  fajlagos relatív elfordulások végzik:



$$\delta\bar{W}_b = - \int_0^{2a} \delta M(z) \kappa(z) dz,$$

mivel

$$\kappa(z) = \frac{M(z)}{EJ_x},$$

így

$$\delta\bar{W}_b = - \frac{1}{EJ_x} \int_0^{2a} \delta M(z) M(z) dz.$$

Mivel  $\delta\bar{W} = 0$

$$\delta\bar{W} = \delta Q v_k - \frac{1}{EJ_x} \int_0^{2a} \delta M(z) M(z) dz = 0$$

Mivel  $\delta Q$  tetszőleges lehet, így legyen egységnyi.

A két nyomatéki ábra szakaszonként lineáris így az integrál:

$$v_k = \frac{1}{EJ_x} \left[ \left( -F \frac{a}{2} \right) \left( -\frac{2}{3} a \right) + \left( -F \frac{a}{2} \right) \left( -\frac{5}{6} a \right) \right] = \frac{13 Fa^3}{48 EJ_x}$$

3.5.3. A rugalmasságtan energia tételei

**Külső potenciál**on a vizsgált testre ható külső erők potenciális energiáját értjük. A testre működő adott külső erőrendszer potenciálját a

$$\pi_k = -W_k = -\mathbf{f}^T \mathbf{e} - \int_{S_q} \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{g}^T \mathbf{n} dV$$

kifejezés adja meg. A külső potenciál tehát a külső munka ellentettje.

**Belső potenciál**on a vizsgált testben keletkező alakváltozások potenciális energiáját értjük, azt a munkaösszeget, amely a feszültségekből keletkező alakváltozások eredményeként halmozódik fel a testben. A rugalmas test belső potenciálja:

$$\pi_b = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} dV$$

A belső potenciál mindig pozitív mennyiség, mivel a testben energia felhalmozódás történik. A belső potenciál tehát a belső saját munka ellentettje.

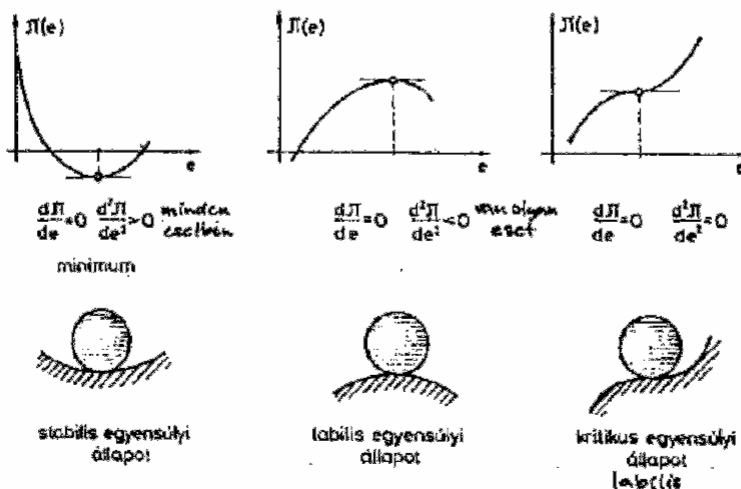
A lineárisan rugalmas test **teljes potenciálja**.

$$\pi = \pi_k + \pi_b = \mathbf{f}^T \mathbf{e} - \int_{S_q} \mathbf{q}^T \mathbf{u} dS - \int_V \mathbf{g}^T \mathbf{n} dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} dV$$

A **potenciális energia állandó értékűségének tétele** kimondja, hogy egy lineárisan rugalmas test geometriailag lehetséges elmozdulás-alakváltozás-rendszerei közül az a tényleges, vagyis a test egyensúlyi helyzetének megfelelő rendszer, amelynél a teljes potenciális energiája állandó értékű, más szóval stacionárius, azaz

$$\pi = \text{stacionárius!}$$

A tétel a rugalmas test egyensúlyi feltételét fejezi ki. A  $\pi(\mathbf{e}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon})$  potenciális energia első variációjára vonatkozó  $\delta\pi = 0$  feltétel alapján meg tudjuk határozni a test egyensúlyi feltételeket is kielégítő, tényleges elmozdulás alakváltozás állapotát, míg a  $\delta^2\pi$  második variáció az egyensúly stabilitásának a vizsgálatára alkalmas. Egyszabadságfokú modellnél:



A potenciális energiát mindig a geometriailag lehetséges elmozdulásrendszerek függvényében írjuk fel. A potenciális energia mindig annyi változós függvény, mint amennyi a test elmozdulási szabadságfoka. Rugalmas testek elmozdulás-alakváltozás-állapota véges számú elmozdulásfüggvénnyel jellemezhető, így a potenciális energiát ezen ismeretlen függvények függvényeként, azaz **funkcionálként** kell kifejezni.

A statikailag határozatlan tartók potenciális energia stacionaritási tételén alapuló megoldási módszerét **elmozdulás módszernek** nevezzük.

A potenciális energiához hasonlóan a **kiegészítő potenciális energia** a kiegészítő munka ellentettje.

A **külső kiegészítő potenciál**on a vizsgált testre ható külső elmozdulások kiegészítő potenciális energiáját értjük. A külső kiegészítő potenciál - külső kiegészítő munka ellentettje, amely csak a testre ható elmozdulás jellegű terhekből származhat.

$$\tilde{\pi}_k = -\tilde{W}_k = -\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{f} - \int_{s_u} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\zeta - \int_V \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{g} dV$$

A **belső kiegészítő potenciál**on a vizsgált testben keletkező feszültségek kiegészítő potenciális energiáját értjük, azt a kiegészítő munkát, amely az alakváltozásokkal kölcsönhatásban kialakuló feszültségek révén halmozódik fel a testben.

A rugalmas test kiegészítő belső potenciálja

$$\tilde{\pi}_b = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{\epsilon}} dV = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}} dV.$$

A lineárisan rugalmas test teljes kiegészítő potenciálja:

$$\tilde{\pi} = \tilde{\pi}_k + \tilde{\pi}_b = -\tilde{\mathbf{e}}^T \mathbf{f} - \int_{s_u} \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\zeta - \int_V \tilde{\mathbf{u}}^T \mathbf{g} dV + \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\sigma}}^T \underline{\underline{H}} \underline{\underline{\sigma}} dV.$$

A **kiegészítő potenciális energia állandóértékűségének tétele** kimondja, hogy egy lineárisan rugalmas anyagú test statikailag lehetséges erő-feszültség rendszerei közül az a tényleges, vagyis a test geometriailag lehetséges helyzetének megfelelő rendszer, amelynél a teljes kiegészítő potenciális energiája minimális azaz

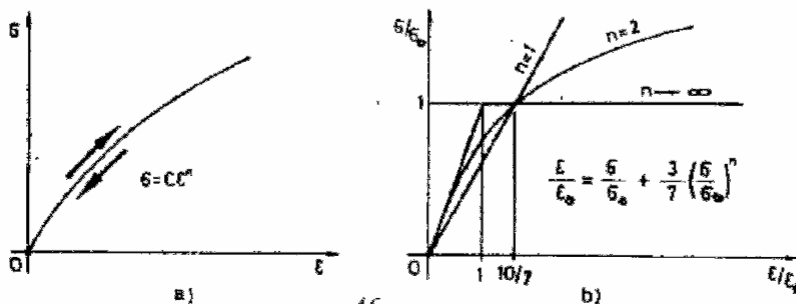
$$\tilde{\pi} = \text{stacionárius!}$$

A tétel tehát a rugalmas test kompatibilitási feltételét fejezi ki. A kiegészítő potenciális energia minimumtételét általában statikailag határozatlan szerkezet vizsgálatára használjuk. A kiegészítő potenciális energiát mindig a statikailag lehetséges erőrendszerek függvényében írjuk fel, ezért a kiegészítő potenciális energia mindig annyi változós függvény, mint ahányszoroson határozatlan statikailag a szerkezet. Mivel a számításból a fölös kapcsolati erőket kapjuk meg ezért ezt a megoldási módszert **erő módszernek** nevezzük.

### 3.6. ANYAGMODELLEK

#### 3.6.1. Nemlineárisan rugalmas anyagok

Vannak olyan anyagok, amelyek rugalmasak ugyan, a feszültség és az alakváltozás között azonban nemlineáris összefüggés áll fenn.

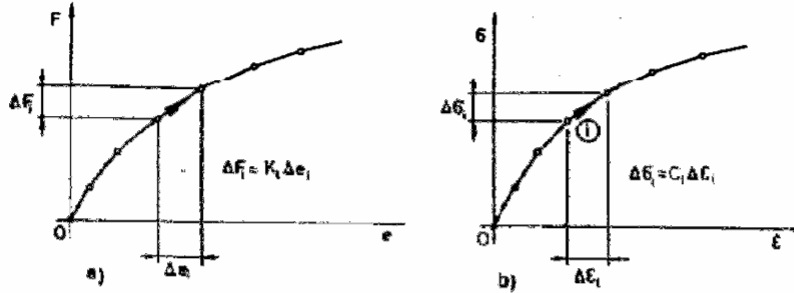




Az a) ábra anyagmodelljében a  $C$  és  $n \leq 1$  a húzó-nyomó kísérletek alapján felvehető állandó, ha  $n=1$  akkor az anyag lineárisan rugalmas.

A b) ábrán az anyag viselkedését az ún. Ramberg-Osgood féle összefüggés írja le, amelynél  $n = 1$  eset a lineárisan rugalmas, az  $n \rightarrow \infty$  eset pedig a lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny anyag modelljét adja.

A nemlineáris összefüggések következtében az egymásrahalmozás elve érvényét veszti, numerikus vizsgálatnál ezt egy lépésről-lépésre történő vizsgálattal küszöbölik ki.



### 3.6.2. Lineárisan rugalmas anizotróp anyagok

Az anizotróp anyagoknál a szilárdsági tulajdonságok más-más irányban különböznek, így egy bizonyos fajta alakváltozás (pl.  $\epsilon_x$ ) létrehozásában valamennyi feszültség komponensnek szerepe lehet. Így az anyagtörvény

$$\underline{\epsilon} = \underline{C}\underline{\sigma}$$

$C$  hajlékonysági mátrixában az energetikai megfontolások alapján igazolható  $C_{ik} = C_{ki}$  feltételei után 21 független állandót kapunk.

Ha egy pontban létezik három egymásra merőleges rugalmas szimmetria-sík, akkor az anyagot ortotropnak nevezzük. Ebben a bizonyos speciális koordináta-rendszerben bizonyos együtthatók zérussal egyenlők.

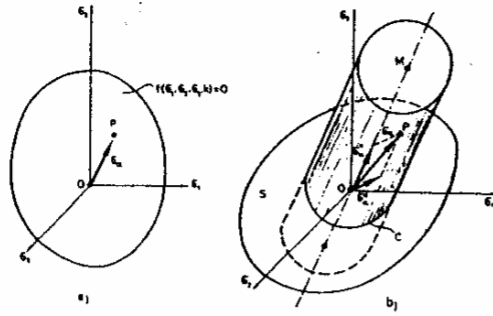
**Izotrop anyagoknál** minden sík rugalmas szimmetria sík és az anyag tulajdonságai az iránytól függetlenek. A 3.4.5-ben leírtaknak megfelelően a lineárisan rugalmas, izotrop anyag szilárdsági tulajdonságait két független anyagállandóval lehet megadni.

### 3.6.3. Képlékeny anyagok

Rugalmas-képlékeny anyagok esetén a Hooke-törvény csak addig érvényes, ameddig képlékeny alakváltozások nem jönnek létre. A képlékenységtan alapvető feltevése az, hogy egy pont rugalmas és képlékeny állapota egymástól egyértelműen elhatárolható és a kétféle állapot határát egy matematikai formában kifejezhető képlékenységi (folyási) feltétel szabja meg.

$$f = f(\sigma_{ij}, k),$$

ahol  $\sigma_{ij}$  feszültségtenzor,  $k$  pedig anyagállandó (pl. folyási határ). Az  $f < 0$  a rugalmas,  $f = 0$  pedig a képlékeny állapotnak felel meg.



A kísérletek szerint a fémek a mérnöki gyakorlatban előforduló nagyságú hidrosztatikus nyomás vagy húzás (ekkor a feszültségtenzor mátrixában a főátlóban lévő elemek azonosak, a többi elem pedig zérus értékű) működésekor csak elhanyagolhatóan kis mértékű képlékeny alakváltozást végeznek. Ekkor a képlékenységi feltételt egy nyitott henger ábrázolja, amelynek alkotói a három főiránnyal azonos szöget bezáró  $OM$  egyenessel párhuzamosak. Ezt a hengert a  $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$  egyenlettel meghatározott  $S$  síkban fekvő  $C$  vezérgörbe egyértelműen meghatározza.

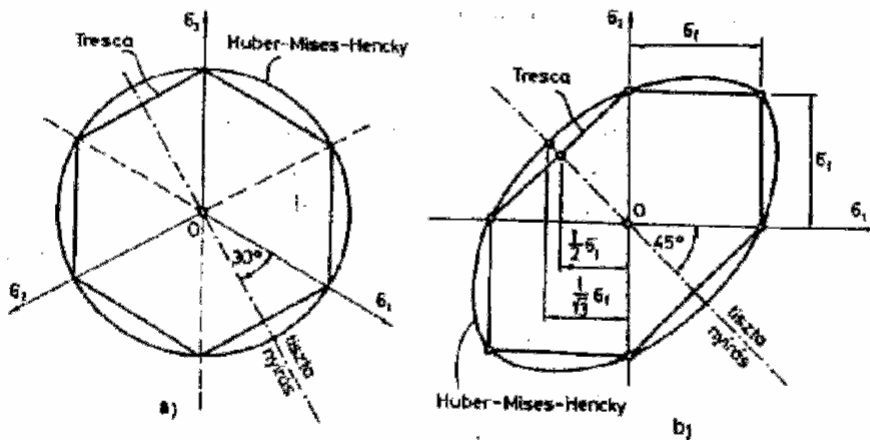
A Huber-Mises-Hencky féle képlékenységi feltétel:

$$f = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \tau_f^2 = 0,$$

ahol  $\tau_f$  a nyírási, folyási feszültség.

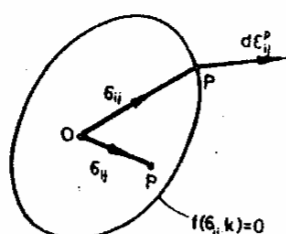
A Tresca-féle képlékenységi feltétel

$$f_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2 = 0 \quad f_2 = (\sigma_1 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2 = 0 \quad f_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_f^2 = 0.$$



Csak rugalmas alakváltozások keletkeznek, ha  $f < 0$  és  $df$  tetszőleges (rugalmas állapot) vagy  $f = 0$  és  $df < 0$  (tehermentesítés). Képlékeny alakváltozások keletkeznek, ha  $f = 0$  és  $df = 0$  (aktív képlékeny állapot).

Képlékeny állapotban közvetlen kapcsolat csupán a képlékeny alakváltozások növekményei és a pillanatnyi feszültségek között állítható fel. Egy pont feszültségállapota a hatdimenziós feszültségtérben a  $\sigma_y$  vektorral, illetőleg annak  $P$  végpontjával jellemezhető. A képlékenységi feltételt ábrázoló folyási hiperfelület a teret két részre osztja. Rugalmas állapot esetén a  $P$  pont a felületen belül, képlékeny állapotban a felületen helyezkedik el.



A képlékeny alakváltozás-növekmény vektor a Drucker-féle posztulátum szerint merőleges a felületre, továbbá az  $f(\sigma_{ij}, k) = 0$  hiperfelület mindenkor konvex.

A lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny test Prandtl és Reuss által felállított anyagegyenletek az alábbi alakban adhatók meg.

$$\begin{aligned} de_x &= \frac{1}{2G} dS_x + d\lambda S_x, & de_{xy} &= \frac{1}{2G} dS_{xy} + d\lambda S_{xy}, \\ de_y &= \frac{1}{2G} dS_y + d\lambda S_y, & de_{xz} &= \frac{1}{2G} dS_{xz} + d\lambda S_{xz}, \\ de_z &= \frac{1}{2G} dS_z + d\lambda S_z, & de_{yz} &= \frac{1}{2G} dS_{yz} + d\lambda S_{yz}, \end{aligned}$$

ahol  $S_{ij}$  a feszültségvektor tenzor,  $e_{ij}$  pedig az alakváltozás-deviátor tenzor

$$\sigma_o = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon_o = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} (\sigma_x - \sigma_o) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & (\sigma_y - \sigma_o) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & (\sigma_z - \sigma_o) \end{bmatrix}, \quad e_{ij} = \begin{bmatrix} (\varepsilon_x - \varepsilon_o) & 1/2\gamma_{xy} & 1/2\gamma_{xz} \\ 1/2\gamma_{yx} & (\varepsilon_y - \varepsilon_o) & 1/2\gamma_{yz} \\ 1/2\gamma_{zx} & 1/2\gamma_{zy} & (\varepsilon_z - \varepsilon_o) \end{bmatrix}.$$

a  $d\lambda \geq 0$  pedig a képlékenységi tényező,  $d\lambda = d\lambda(\sigma_{ij}, de_{ij})$  skalárfüggvény. A fenti egyenletekhez még egy további összefüggés járul

$$d\varepsilon_{\text{ait}} = \frac{d\sigma_{\text{ait}}}{3K}, \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

amely az átlagos alakváltozás-növekmény és átlagos feszültség-növekmény közötti kapcsolatot írja le,  $K$  az ún. összenyomódási modulus.

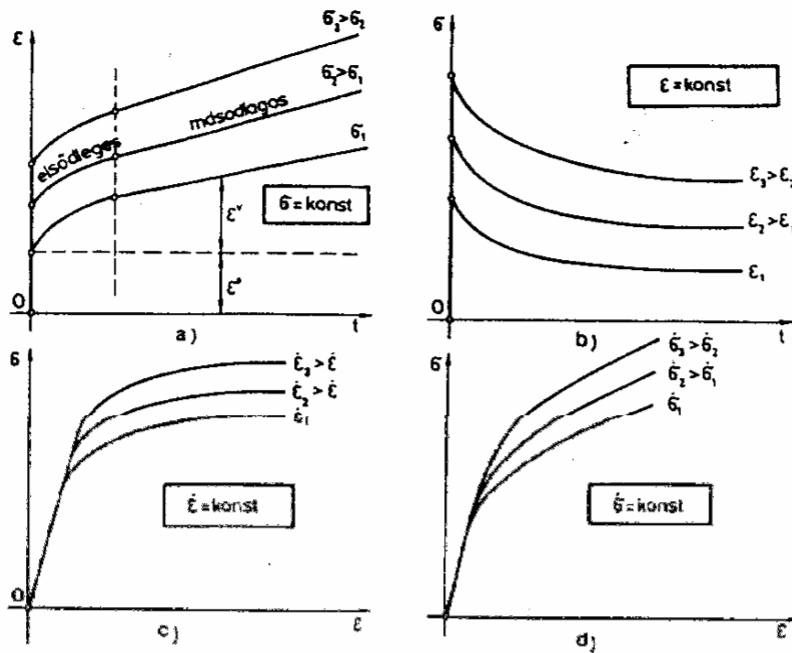
A Prandtl-Reuss anyagegyenletek nemlineárisak, és a feszültségek és alakváltozások növekményeit is tartalmazzák ellentétben a lineárisan rugalmas testek anyagegyenleteitől.

A fenti anyagegyenletek, továbbá a 3.4.2-ben leírt egyensúlyi, valamint a 3.4.4-ben leírt geometriai egyenletek együttesen a lineárisan rugalmas, tökéletesen képlékeny testek alapegyenleteit szolgáltatják.

### 3.6.4. Viszkózus anyagok

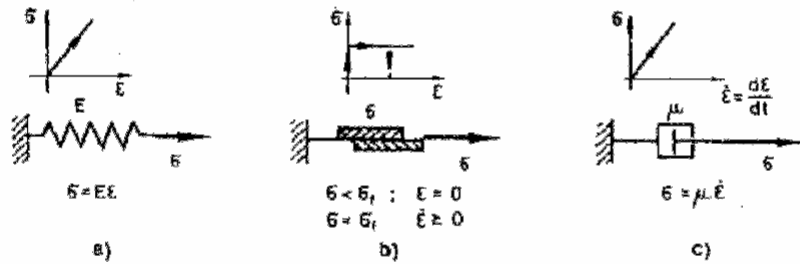
Mindentéig ún. időtől független anyagokkal foglalkoztunk. Az anyagoknak azt a tulajdonságát, hogy szilárdsági viselkedésük a jelenségek időbeli lefolyásától is függ, viszkózitásnak nevezzük. A viszkózus viselkedésnek az a magyarázata, hogy egyes anyagok esetében a kristályos szerkezet átalakulása hosszabb időt vesz igénybe, és ezért a feszültségek, illetve alakváltozások változását csak késve tudják követni.

A kúszás jelensége lép fel, amikor  $\sigma =$  állandó terhelés mellett az alakváltozás az idővel növekszik, relaxáció vagy ernyedés jelensége amikor  $\varepsilon =$  állandó alakváltozás mellett a feszültség az időben csökken.



Ha a kísérletet az alakváltozás, illetőleg a feszültség állandó sebességű változtatása mellett hajtjuk végre, azaz  $\dot{\epsilon} = \text{állandó}$ , illetve  $\dot{\sigma} = \text{állandó}$ , akkor a feszültség-alakváltozás diagram ezen állandóktól függően más és más.

A 3.1.2-ben már megismert lineárisan rugalmas (a) ábra) és tökéletesen képlékeny (b) ábra) anyag modelljei mellé így most egy új modell, a tökéletesen viszkózus anyag modellje is megalkotható.



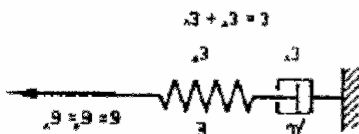
Ez a modell egy viszkózus folyadékkal telt edényből és egy abban elhelyezett dugattyúból áll. A Newton által felállított összefüggés:

$$\sigma = \mu \dot{\epsilon},$$

ahol  $\mu$  a viszkozitási állandó [ $\text{Ns/m}^2$ ].

A fenti egyszerű anyagmodellek párhuzamos és sorba kapcsolása révén sokféle összetett anyagmodellt lehet előállítani.

Ha a rugalmas és a viszkózus anyagmodellt sorba kapcsoljuk, a Maxwell-féle viszkoclasztikus anyagmodellt kapjuk.



$$\sigma = \sigma^e = \sigma^v, \quad \epsilon = \epsilon^e + \epsilon^v$$

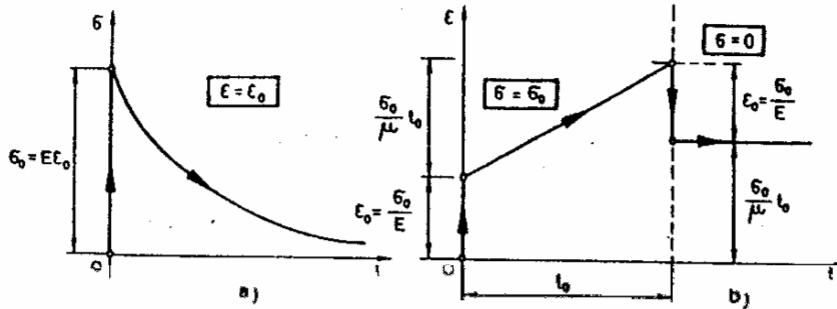
Mivel

$$\epsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \dot{\epsilon}^v = \frac{\sigma}{\mu}$$

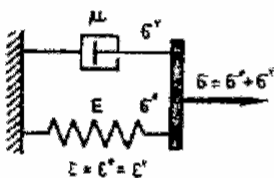
$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$$

### 3. Szilárdságtani alapok

A Maxwell-féle anyagmodell az anyag relaxációját jól le tudja írni, kúszás esetén azonban csak a másodlagos kúszás stádiumát közelíti meg.



Ha rugalmas és a viszkózus anyagmodellt párhuzamosan kapcsoljuk, a Kelvin-Voigt-féle viszkoelasztikus anyagmodellt kapjuk.



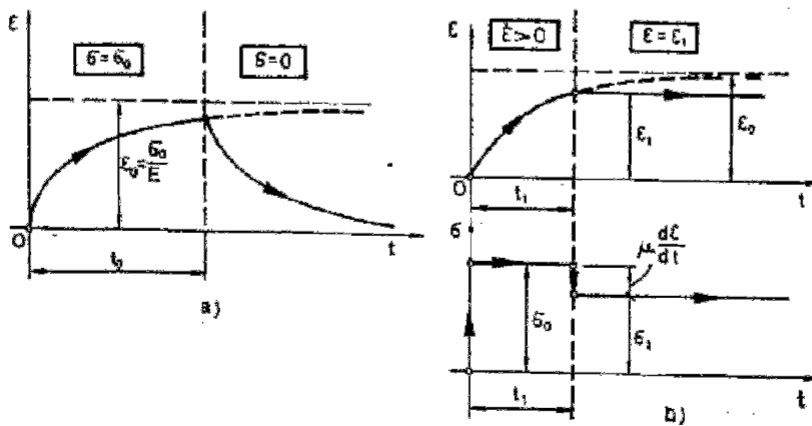
$$\epsilon = \epsilon^e = \epsilon^v \quad \sigma = \sigma^e + \sigma^v$$

Mivel

$$\sigma^e = E \epsilon, \quad \sigma^v = \mu \dot{\epsilon},$$

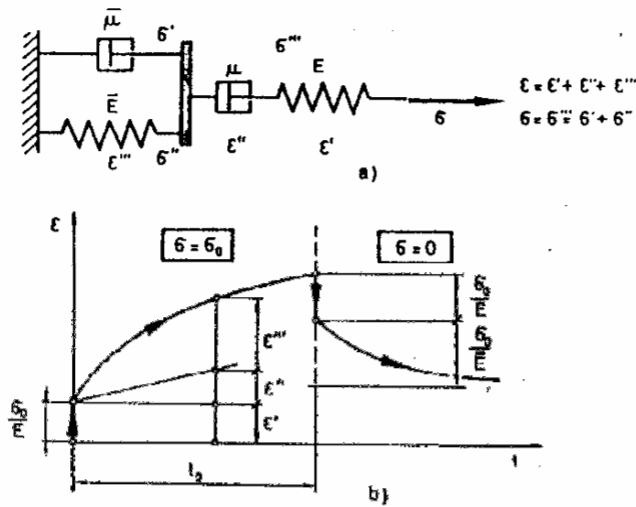
$$\sigma = E \epsilon + \mu \dot{\epsilon}.$$

A Kelvin-Voigt-féle anyagmodell elég jól leírja az elsődleges kúszást és a tehermentesítés után létrejövő viszkózus alakváltozásokat, a relaxáció jellemzésére azonban nem alkalmas.

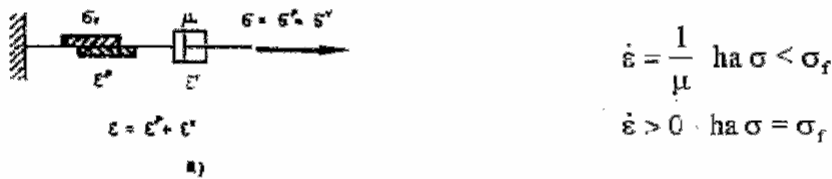


### 3. Szilárdságtani alapok

A Maxwell- és a Kelvin-Voigt-féle modellek sorba kapcsolásával egy tökéletesebb összetett anyagmodellt állíthatunk elő. Ez a modell jól megközelíti a viszkózus anyagok tényleges viselkedését, de már egyszerű feladatok megoldásánál is bonyolult számításokra vezet.



A képlékeny és viszkózus modellt sorba kapcsolva egy viszkoplasztikus modellt kapunk.



A képlékeny és viszkózus modell párhuzamos kapcsolása a Bingham-féle viszkoplasztikus anyagmodellt szolgáltatja.



Eszerint az anyag folyási határa az anyag viszkozitása következtében megnő.

### 3. Szilárdságtani alapok

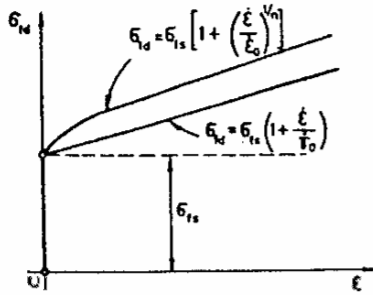
$$\sigma_{fd} = \sigma_{fs} \left( 1 + \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right),$$

ahol  $\sigma_{fd}$  a dinamikus folyási határ,  $\sigma_{fs}$  a statikus folyási határ  $\dot{\gamma}_0$  pedig anyagállandó (acél esetén  $\dot{\gamma}_0 \approx 100 - 200 / \text{sec}$ ).

Pontosabb vizsgálatokhoz a nemlineáris képlet:

$$\sigma_{fd} = \sigma_{fs} \left[ 1 + \left( \frac{\dot{\epsilon}}{\dot{\epsilon}_0} \right)^{1/n} \right]$$

az  $\epsilon_0$  és az anyagállandók (acél esetén  $\epsilon_0 = 40 / \text{sec}$  és  $n = 5$ )

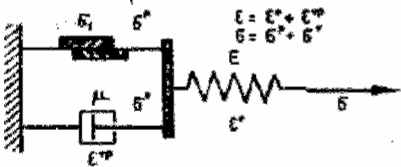


A Bingham-féle viszkoplasztikus modell és a rugalmas modell sorbakapcsolása adja a rugalmas-viszkoplasztikus anyag tulajdonságait leíró modellt:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^{vp} \quad \sigma = \sigma^p + \sigma^v.$$

$$\text{Ha } \sigma < \sigma_f, \text{ akkor } \epsilon^{vp} = 0 \quad \epsilon = \epsilon^e = \frac{\sigma}{E}.$$

$$\text{Ha } \sigma \geq \sigma_f, \text{ akkor } \epsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \dot{\epsilon}^{vp} = \frac{\sigma^v}{\mu}, \quad \sigma^p = \sigma_f, \quad \sigma^v = \sigma - \sigma_f$$



tehát

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{1}{\mu} (\sigma - \sigma_f).$$

Ez az anyag a folyási határ elérése előtt teljesen rugalmasan viselkedik, képlékeny állapotban viszont a viszkózus tulajdonságok is érvényesülnek.

3.6.5. Anyagmodellek összefoglalása

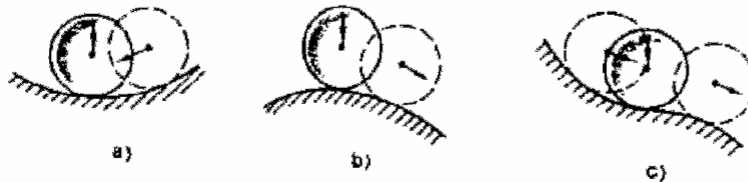
A legfontosabb anyagmodelleket és a hozzájuk tartozó anyagegyenletek összefoglalását az alábbi táblázat adja.

Anyag	Modell	Anyagegyenlet
lineárisan rugalmas (Hooke)		$\sigma = E\epsilon$
ideálisan képlékeny (Saint-Venant)		$\epsilon = 0, \text{ ha } \sigma < \sigma_0$ $\dot{\epsilon} \geq 0, \text{ ha } \sigma = \sigma_0$
ideálisan viszkózus (Newton)		$\dot{\sigma} = \mu \dot{\epsilon}$
lineárisan rugalmas, ideálisan képlékeny		$\epsilon = \frac{\sigma}{E}, \text{ ha } \sigma < \sigma_0$ $\dot{\epsilon} \geq 0, \text{ ha } \sigma = \sigma_0$
merev, keményedő		$\epsilon = 0, \text{ ha } \sigma < \sigma_0$ $\dot{\epsilon} = \frac{\sigma - \sigma_0}{E'}, \text{ ha } \sigma \geq \sigma_0$
viszkoelasztikus (Maxwell)		$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$
viszkoelasztikus (Kelvin-Voigt)		$\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon} + \mu\epsilon$
viszkoplasztikus		$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{\mu}, \text{ ha } \sigma < \sigma_0$ $\dot{\epsilon} \geq 0, \text{ ha } \sigma = \sigma_0$
viszkoplasztikus (Bingham)		$\dot{\epsilon} = 0, \text{ ha } \sigma < \sigma_0$ $\dot{\sigma} = \mu\dot{\epsilon}, \text{ ha } \sigma \geq \sigma_0$

3.7. AZ EGYENSÚLY STABILITÁSÁNAK VIZSGÁLATA

3.7.1. Alapfogalmak

Az alábbi ábrán a golyók hengerfelületén helyezkednek el és feltételezzük, hogy csak az ábra síkjával párhuzamosan mozdulhatnak el. Mivel három esetben egyensúly van, de az egyensúlyi állapotok különbözőek.





A kinematikai megfontolás esetén kis kitérés után vizsgáljuk, hogy visszatér-e a golyó az eredeti helyzetébe azaz egyensúlyi állapota stabilis, vagy labilis.

Az egyensúlyi állapot energetikai jellemzésének a 3.5.3-ban leírt potenciális energia képezi az alapját.

Ha minden  $\frac{d^2\pi}{de^2} > 0$ , akkor a potenciális energiának minimuma van és ilyenkor az egyensúlyi helyzet

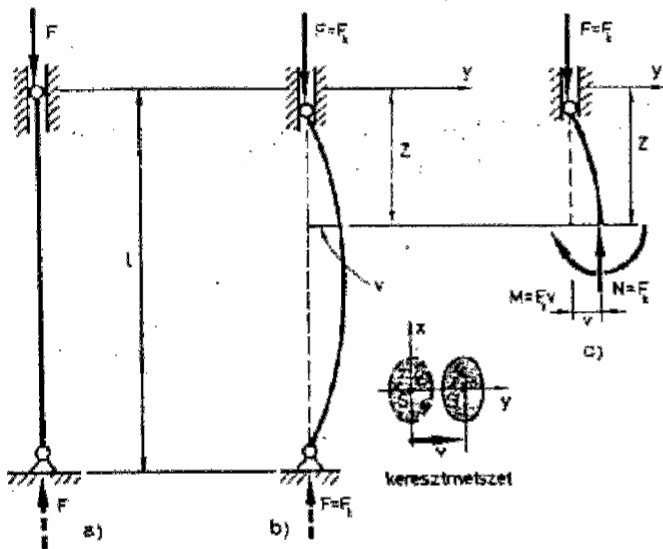
biztosan stabilis. Ha van olyan  $\frac{d^2\pi}{de^2} > 0$ , akkor az egyensúlyi állapot biztosan labilis. Ha számos  $\frac{d^2\pi}{de^2} \geq 0$ ,

de van olyan  $\frac{d^2\pi}{de^2} = 0$ , akkor kritikus és a magasabbrendű variációk döntenek el, hogy labilis-e vagy stabilis.

Az egyensúlyi vizsgálat csak a kritikus egyensúlyi állapottal foglalkozik.

### 3.7.2. Szilárd rúd kihajlása

A kihajláselmélet klasszikus feladata a központosan nyomott, egyenes tengelyű, prizmatikus, lineárisan rugalmas anyagú rúd vizsgálata.



A rugalmas vonal differenciálegyenlete

$$\frac{d^2v}{dz^2} = -\frac{M}{EJ}$$

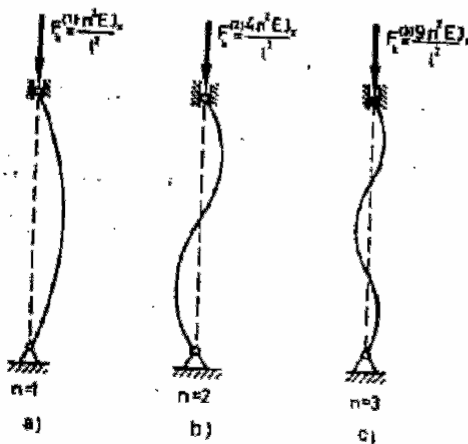
Mivel  $M = Fv$ , így

$$\frac{d^2v}{dz^2} + \frac{F}{EI_x} v = \frac{d^2v}{dz^2} + \alpha^2 v = 0,$$

a rugalmas rúd kihajlásának differenciál egyenlete, melynek megoldása

$$v = A \sin n \frac{z}{\beta}, (n = 1, 2, 3, \dots)$$

A lehetséges megoldások közül nyilvánvalóan annak van jelentősége, amelyhez a legkisebb kritikus erő tartozik. A legkisebb kritikus erőhöz tartozó kritikus állapotban a rúd kihajlása a keresztmetszet 2. tehetetlenségi főtengelyére merőleges síkban következik be.



Csuklókkal megtámasztott rúd esetén

$$F_k = \frac{\pi^2 EJ_2}{\ell^2},$$

az ún. Euler féle kritikus erő és ebből

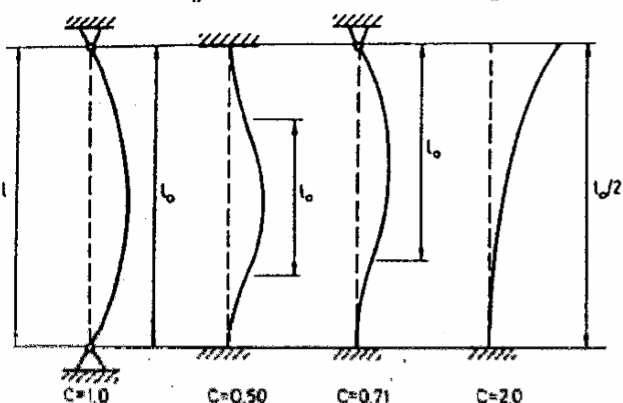
$$\sigma_k = \frac{F_k}{A} = \frac{\pi^2 EJ_2}{\ell^2 A} = \frac{\pi E i_2^2}{\ell^2} = \frac{\pi E}{\lambda^2},$$

a kritikus feszültség és  $\lambda$  a karcsúsági tényező.

$$A \lambda_n = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_A}}, \text{ ahol } \lambda_n \text{ a } \sigma_A \text{ arányossági}$$

határhoz tartozó határkarcsúsági tényező.

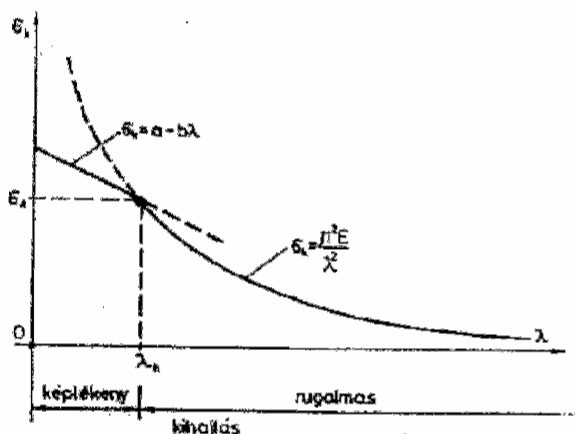
Ha  $\lambda \geq \lambda_n$  akkor karcsú, ha  $\lambda < \lambda_n$  akkor zömök rúdról beszélünk.



A különböző megtámasztási feltételekhez más-más kihajlási alakok tartoznak.

$$F_k = \frac{\pi EJ}{(c\ell)^2}$$

A karcsúság függvényében a  $\sigma_k$  kritikus feszültséget az alábbi ábra mutatja  $\lambda < \lambda_n$  esetében képlékeny  $\lambda \geq \lambda_n$  esetében rugalmas kihajlásról beszélünk



Ha  $\lambda < \lambda_n$  akkor

$$\sigma_k = a - b\lambda,$$

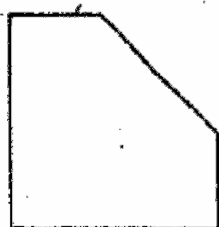
ahol a és b anyagállandók,  
ha  $\lambda \geq \lambda_n$ , akkor

$$\sigma_k = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

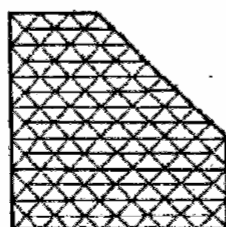
### 3.8. A FESZÜLTSGSZÁMÍTÁS NUMERIKUS MÓDSZEREI

#### 3.8.1. Végeselem módszer

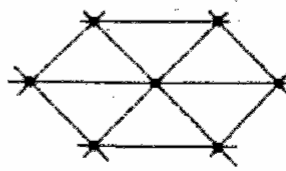
Az eljárás matematikai összefüggéseit a következő mechanikai megfontolások útján juthatunk el. A vizsgálandó tartományt felosztjuk tetszőleges, a teljes tartományt egyszeresen lefedő tartományokra. Egy ilyen résztartományt nevezünk végeselemnek. A végeselemek oldalain és kitüntetett pontjaikon (pl. sarokpontok) illeszkednek egymáshoz.



a)



b)



c)

### 3. Szilárdságtani alapok

A vizsgált szerkezetnek az adott teher hatására bekövetkező elmozdulását leíró függvényt olyan függvényrendszerrel közelítjük, amely legalább annyi részből áll, ahány véges elemre osztottuk a tartományt. Egy elmozdulásfüggvény a legtöbb elem felett zérus értékű, de az elem felett van zérustól különböző értéke is. Egy ilyen függvény valamelyik ún. teljes függvényt tartalmazza, egyelőre ismeretlen együtthatókkal szorozva. Az ismeretlen együtthatók a csomópontok elmozdulásai lesznek.

Az ismeretlen együtthatók - csomóponti elmozdulások - meghatározására szolgáló egyenleteket a **potenciális energia állandóértékűségének tétele** vagy a **virtuális elmozdulások tétele** segítségével tudjuk felírni, ezzel a csomópontokhoz tartozó egyensúlyi egyenletrendszerhez jutunk.

Egy csomópont elmozdulásait az  $e$  vektorba foglaljuk össze, összetevőinek száma a csomópont szabadságfokának felel meg. Az elem egy belső pontjának elmozdulásait az elmozdulásfüggvény adja meg:  $u$ . Az elmozdulásfüggvény és a csomóponti elmozdulások közötti összefüggés

$$u = N e.$$

Az elem tetszőleges pontjának elmozdulásából az ugyanitt ébredő alakváltozások a geometriai egyenletek segítségével számíthatók. Ha az ehhez szükséges differenciálást egy  $L$  operátor segítségével írjuk le, akkor

$$\varepsilon = L u = L N e = B e,$$

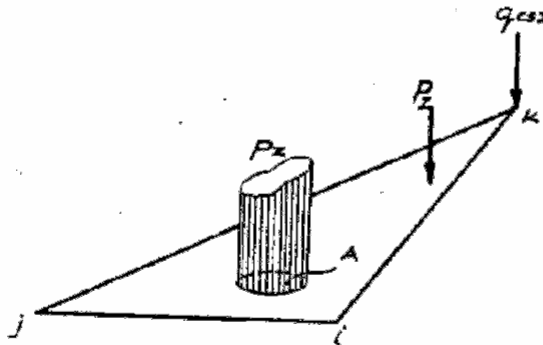
ahol

$$B = L N.$$

Az  $\varepsilon$  alakváltozás a teljes alakváltozást jelöli, amely a rugalmas és a kinematikai teher okozta alakváltozásokból tevődhet össze. Tétélezzük fel, hogy az utóbbi zérus, így a feszültség-alakváltozás közötti összefüggést a Hooke-törvény adja:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}.$$

A külső erők potenciáljának felírásához tekintsük az ábrán látható terheket (ezek fajtája, dimenziója értelemszerűen bővíthető, illetve szűkíthető)  $q$  közvetlenül a csomópontot terheli,  $P$  az  $ijk$  elemet terhelő koncentrált erőt,  $p$  pedig az elem működő megoszló terhet jelöli (az ábrán ezek  $z$  irányúak)



$$\pi_k = -e^T q_{cs} - u_p^T P - \int_A u^T p dA,$$

itt  $u_p$  a  $P_i$  erők alatti elmozdulást jelenti. Mivel  $u = N e$ , így

$$\pi_k = -e^T (q_{cs} + N_P^T P + \int_A N^T p dA).$$

A belső erők potenciálja:

$$\pi_b = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} dV.$$

Mivel  $\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{B}} \mathbf{e}$ , így

$$\pi_b = \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV \mathbf{e}.$$

Ha a  $\pi = \pi_k + \pi_b$  teljes potenciált az ismeretlen  $\mathbf{e}$  elmozdulások szerint differenciáljuk, zérust kell kapni az állandó értékűség tétele értelmében. Végrehajtva

$$-\mathbf{q}_{cs} - \mathbf{N}_P^T \mathbf{P} - \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA + \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV \mathbf{e} = 0$$

egyensúlyi egyenletet kapjuk, röviden

$$\mathbf{K} \mathbf{e} = \mathbf{t},$$

ahol a  $\mathbf{t}$  tehervektor

$$\mathbf{t} = \mathbf{q}_{cs} + \mathbf{N}_P^T \mathbf{P} + \int_A \mathbf{N}^T \mathbf{p} dA$$

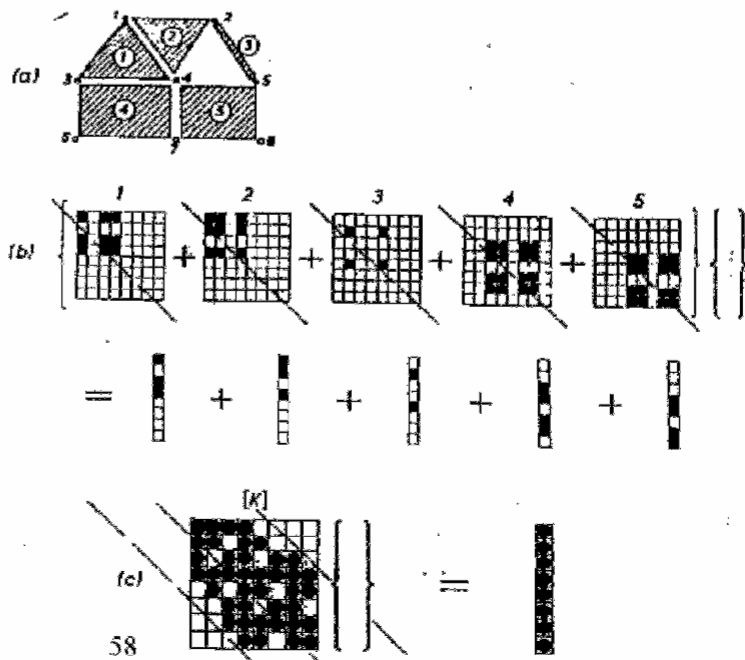
és  $\mathbf{K}$  a szerkezet merevségi mátrixa

$$\mathbf{K} = - \int_V \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV$$

Célszerű az integrálást elemenként végrehajtani és összegezni  $n$  elemre

$$\mathbf{K} = - \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \underline{\underline{B}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{B}} dV = - \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i,$$

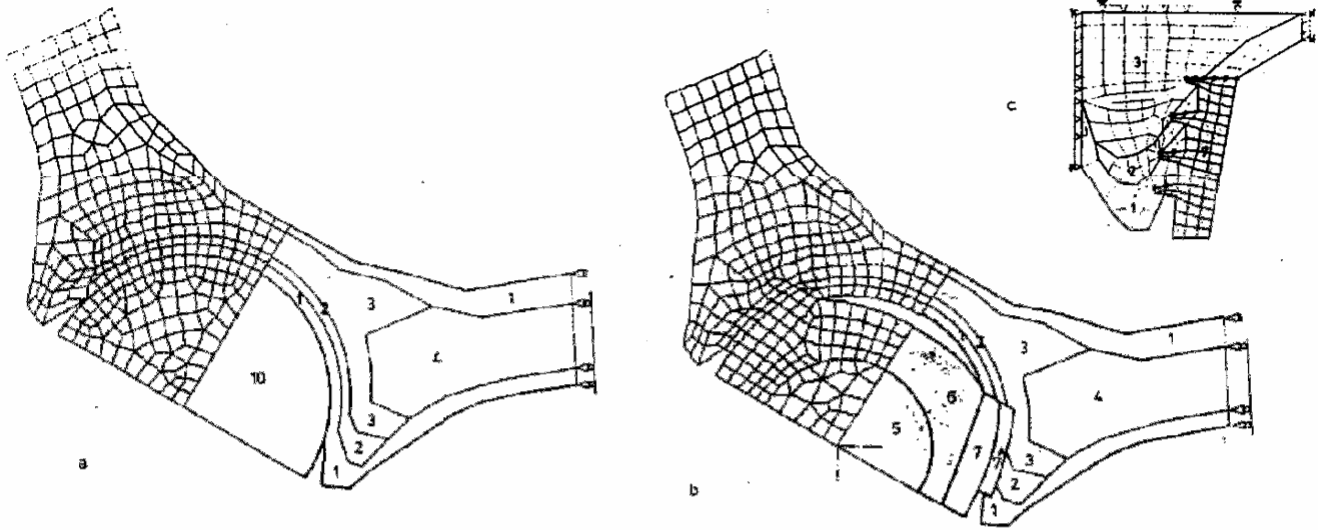
ahol  $\mathbf{K}_i$  egy elem merevségi mátrixa.



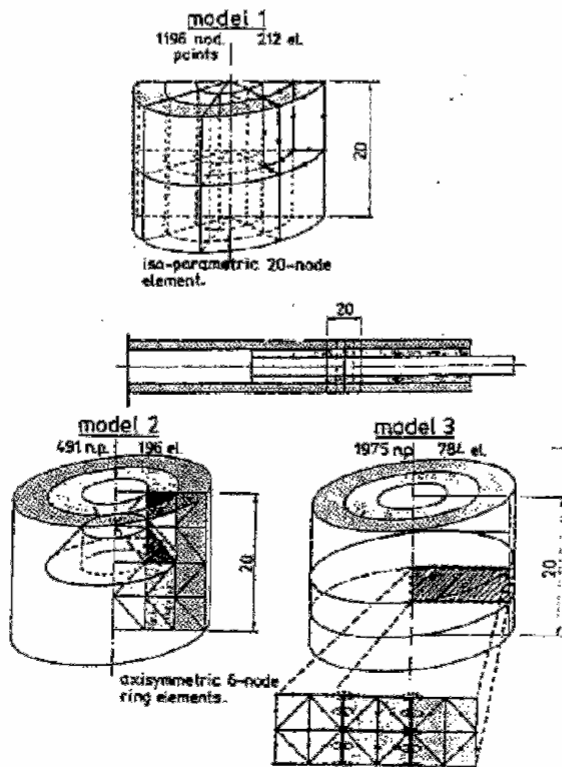
### 3. Szilárdságtani alapok

Az egyenletrendszer megoldása után a csomóponti elmozdulások és az elmozdulásfüggvény ismeretében egy tetszőleges elemen belüli pont alakváltozásai és feszültségei más számíthatóak.

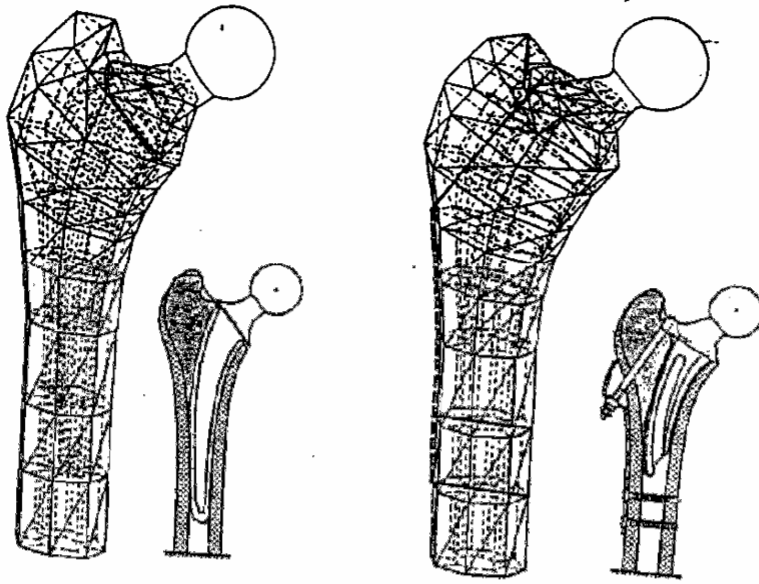
**Csípőizület, illetve csípőprotézis 2 D modellje**



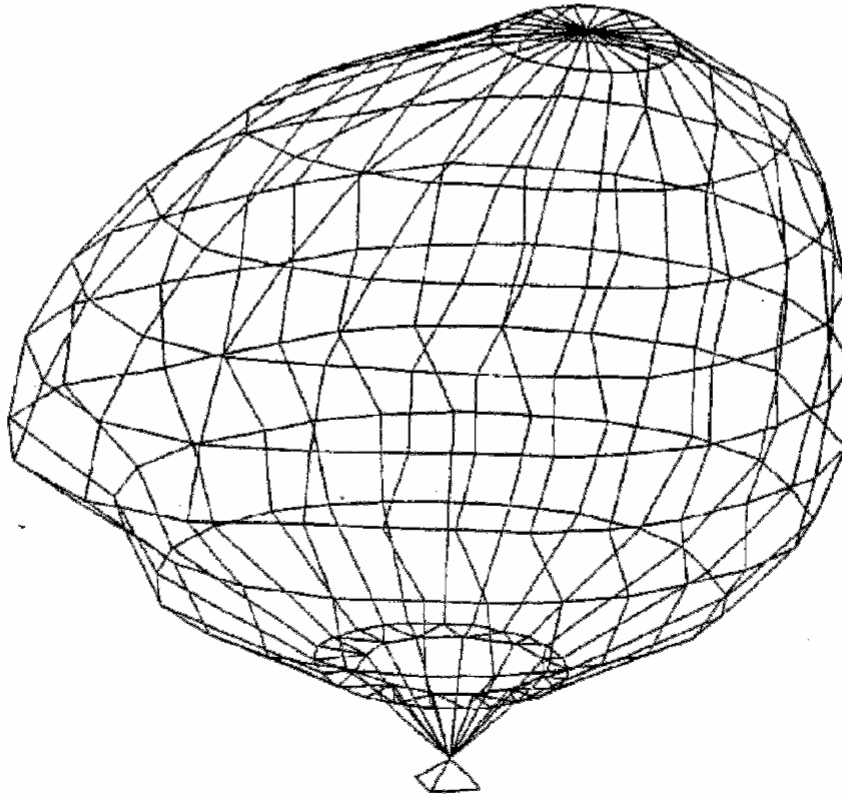
**A femur + protézis tengelyszimmetrikus modelljének véges elemes modelljei**



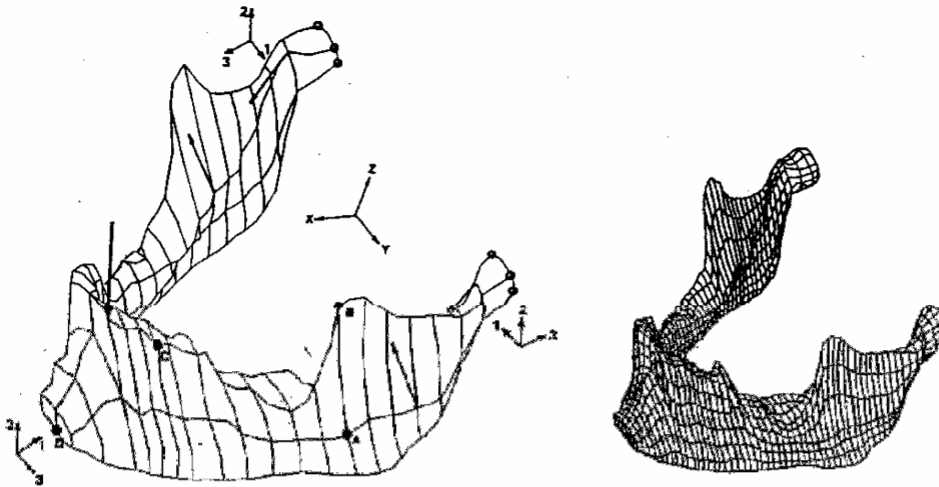
A femur + protézis 3D modellje



Agykoponya véges elemes modellje



Állkapocs durvább és finomabb véges elemes modellje

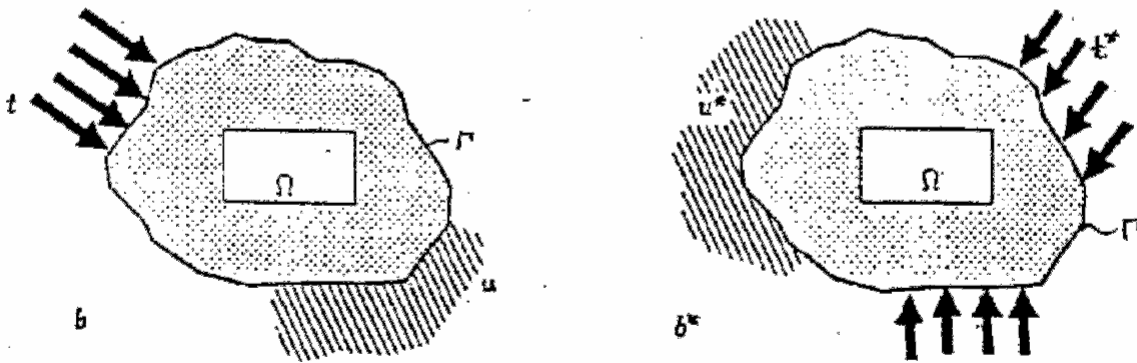


3.8.2. Peremelemes módszer

A végelem módszer "tartományi" módszer, ahol a tartomány felosztásával, a tartományon értelmezett közelítőfüggvények alkalmazásával - amelyek részben egzaktul kielégítik a peremfeltételeket - majd a tartományok feletti integrálok kiértékelésével és összegzésével jutunk el a teljes feladat egyensúlyi egyenletrendszeréhez.

Másféle lehetőséget jelent olyan közelítőfüggvények alkalmazása, amelyek kielégítik a vizsgált tartományra vonatkozó differenciálegyenletet, a peremfeltételeket viszont nem, itt a tartományon felvett alapg megoldások olyan lineáris kombinációját keressük, amely a kerületi feltételeket csak valamilyen jól definiálható hibával elégíti ki. A feladat differenciálegyenletét integrálátalakításokkal peremintegrál alakra transzformáljuk és így a feladat dimenziószámát eggyel csökkentjük.

Legyen két tetszőleges terhelési eset A és B és a hozzájuk tartozó elmozdulások, felület és térfogati erők A esetben  $u, t, b$ , B esetben  $u^*, t^*, b^*$ . Jelölje a térfogatot  $\Omega$  a peremet pedig  $\Gamma$ .

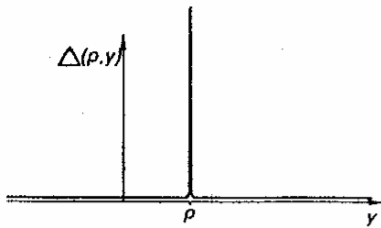


A Maxwell-Betti elv szerint az A terhelés munkája a B terhelés elmozdulásain ugyanakkora mint a B terhelés munkája az A okozta elmozdulásokon.

$$\int_{\Omega} b^* u d\Omega + \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t d\Gamma + \int_{\Omega} u^* b d\Omega$$

### 3. Szilárdságtani alapok

Legyen A az aktuális tehelés, amire a feladat megoldását keressük, a B terhelést tetszőlegesen választhatjuk legyen egy pontszerű egységforrás az ún. Dirac-féle delta függvény egy p helyen.



Ha  $y \neq p$ , akkor  $\Delta(p, y) = 0$

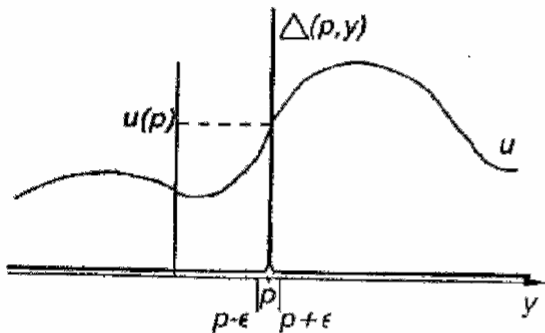
Ha  $y = p$ , akkor  $\Delta(p, y) = \infty$  és

$$\int_{\Omega} \Delta(p, y) d\Omega = 1$$

Ekkor a bal oldal első tagja

$$\int_{\Omega} \Delta(p, y) u d\Omega$$

alakban írható. Mivel a Dirac-féle delta függvény  $y = p$  kivételével zérus, az integrált a következő alakban írhatjuk



$$\int_{\Omega} \Delta(p, y) u d\Omega = \int_{p-\epsilon}^{p+\epsilon} \Delta(p, y) u dV$$

Mivel az integrál ezen a helyen egységnyi, így az elmozdulás p helye értéke  $u(p)$  módon írható és az integrál erre egyszerűsödik

$$\int_{\Omega} \Delta(p, y) u dV = u(p)$$

Ugyanakkor a Dirac-féle delta függvényhez tartozó  $u^*$  és  $t^*$  ismertek mint az ún. alapmegoldások, síkbeli feladatnál  $u^*$  az  $\ln(1/r)$ , háromdimenziós feladatnál az  $(1/r)$  függvénye,  $t^*$  pedig

$$t^* = \frac{\delta u^*}{\delta r} \frac{\delta r}{\delta u}$$

módon ugyancsak ismert. Itt  $r$  a pontszerű egységforrás és a vizsgált hely közötti távolság.

Az eredeti integrálegyenlet ha feltételezzük, hogy az aktuális teher esetében a térfogati erők zérus értékűek ( $b=0$ ), akkor

$$u(p) + \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t d\Gamma$$

Ebben az egyenletben az első tag kivételével minden más csak a peremen értelmezett. Ugyanakkor ennek a pontszerű erőforrásnak a helye is tetszőleges, így válasszuk azt is a peremen. Az eredeti alakot megtartva egy-egy  $c(p)$  szorzó behozatalát jelenti, amely értéke a forrásnak a peremhez képest elfoglalt helyétől függ.

$$c(p) u(p) + \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t d\Gamma,$$

az ún. peremintegrál egyenlet. Ha a fiktív pontszerű erőforrás a peremen belül van akkor  $c(p)=1$ , ha teljesen a peremen kívül lenne akkor nincs hatása, azaz  $c(p)=0$ , síma peremen  $c(p)=0,5$ , de a perem töréspontjainál komplikáltabb meghatározni.

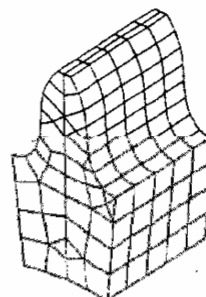
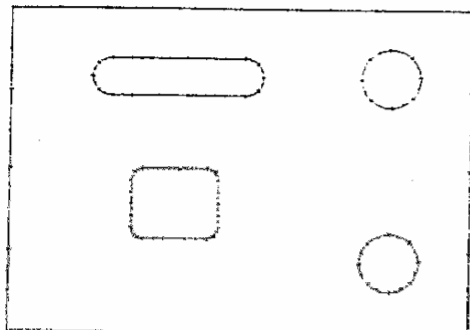


### 3. Szilárdságtani alapok

Az integrálegyenletet általában numerikusan oldjuk meg. Ekkor felosztjuk a peremet úgynevezett peremelemekre, amelyeken már kiszámítható az integrál, így az integrálegyenlet új alakja:

$$c(p) u(p) + \sum_{\text{elem} \Gamma} \int t^* u d\Gamma_{\text{elem}} = \sum_{\text{elem} \Gamma} \int u^* t d\Gamma_{\text{elem}}$$

Kétdimenziós probléma pereme vonaldarabokból, háromdimenziósé felületelemekből áll.



Az integrálegyenlet az alábbi mátrix egyenletté írható át

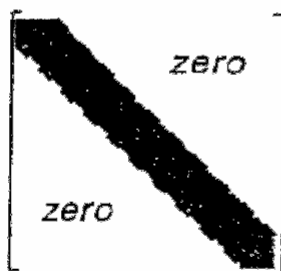
$$H u = G t$$

Az előírt peremfeltételeket figyelembevéve, azaz a peremen vagy az  $u$  vagy a  $t$  vektorok megfelelő elemei kötöttek, az ismeretlenek egy közös  $x$  vektorba gyűjthetők, a kerületi feltételeknek megfelelő tagok pedig egy  $z$  vektorba, így

$$A x = z$$

mátrixegyenletet kell megoldani.

Az igaz, hogy a végelem módszer (FEM) alkalmazása szimmetrikus sávmátrixot eredményez, amelyhez speciális megoldó algoritmusok tartoznak és ezzel szemben a peremelemes módszer (BEM) együtthatómátrixa tele mátrix, de a mátrixok mérete ugyanazon problémához alapvetően különböző.



FEM



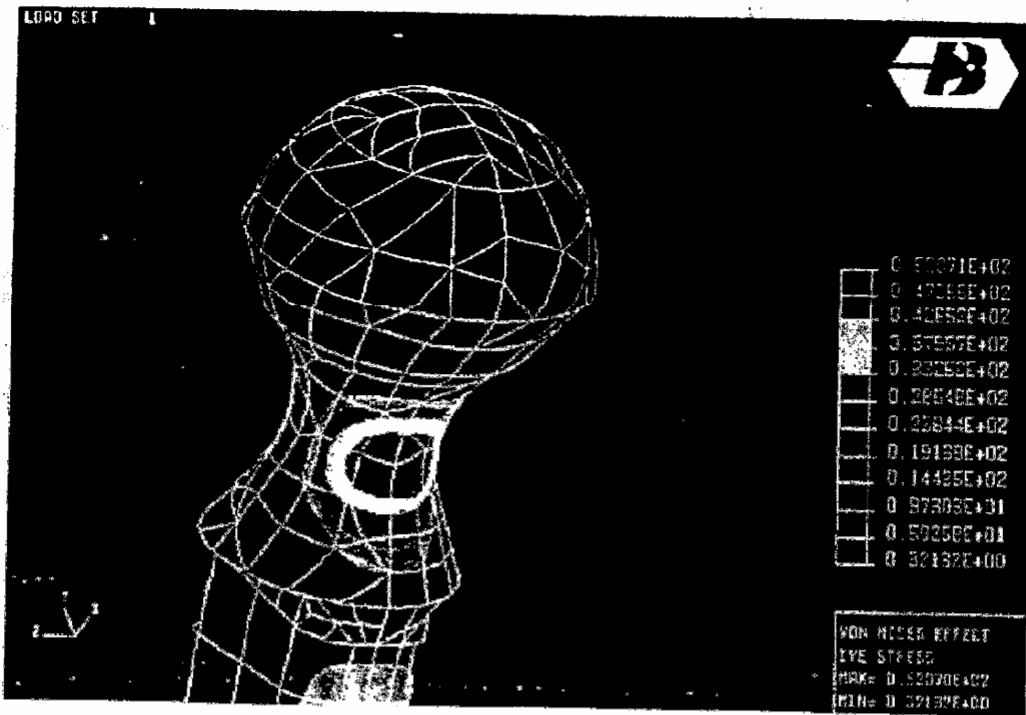
BEM

Az egyenletrendszer megoldása után ismertté válnak - perem minden csomópontjában az elmozdulások és feszültségek, visszatérve az

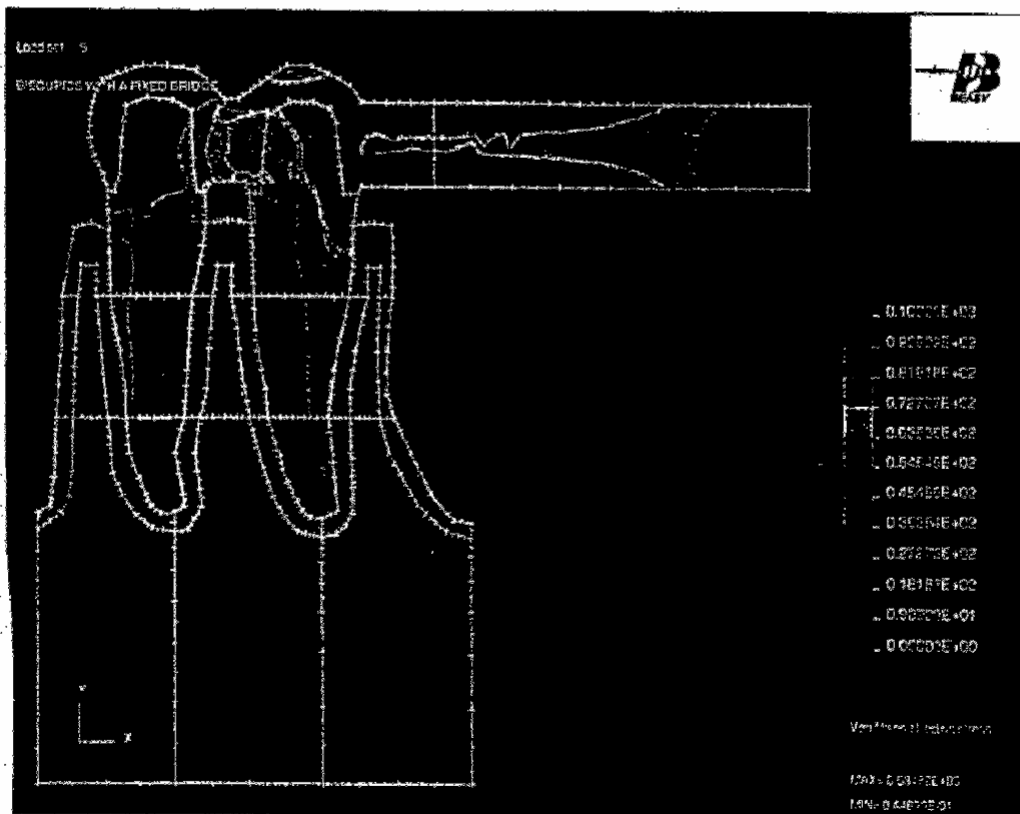
$$u(p) + \int_{\Gamma} t^* u d\Gamma = \int_{\Gamma} u^* t d\Gamma$$

egyenletre egy tetszőleges belső pont elmozdulásai, illetve a pont környezetének elmozdulásainak ismeretében a ponthoz tartozó alakváltozások, majd a feszültségek is számíthatók.

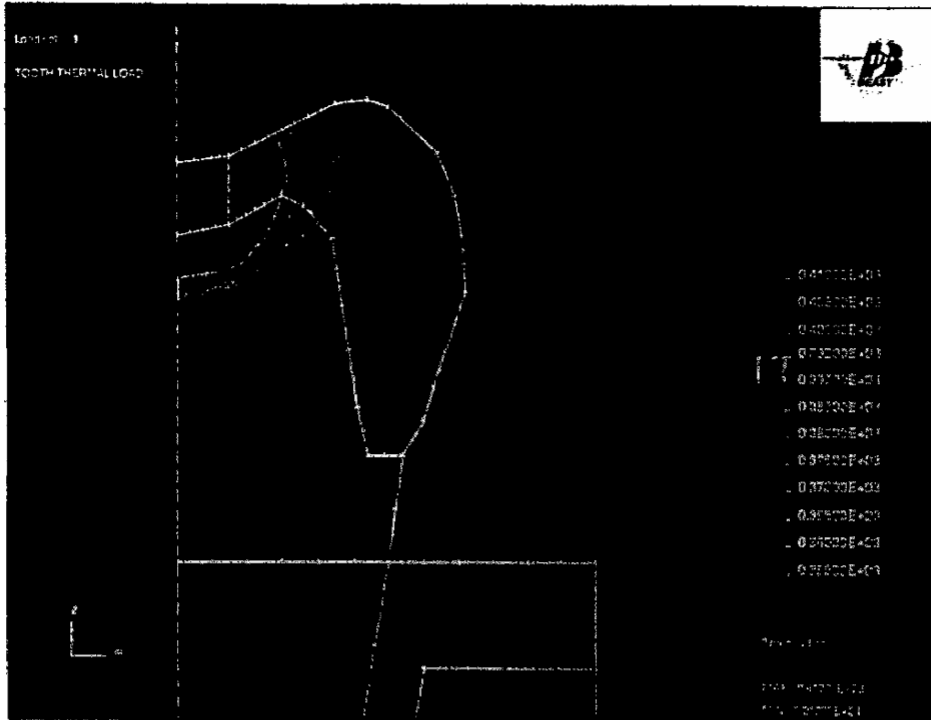
Protézis feszültségvizsgálata



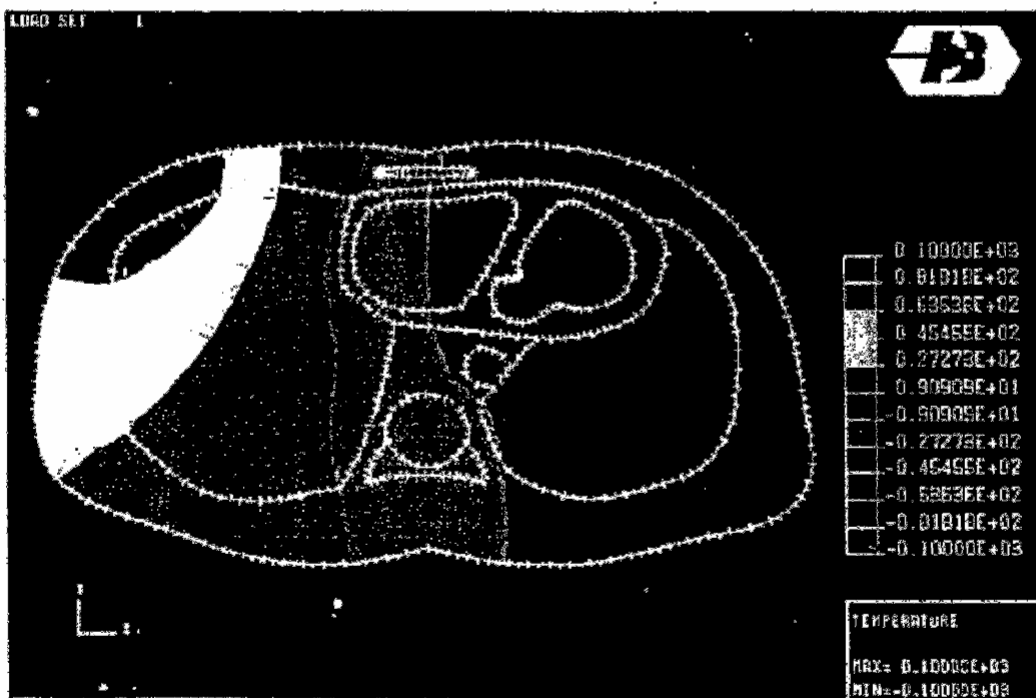
Két fogon felfekvő hid feszültségvizsgálata



Fog hőmérsékletterhelése



Az emberi test keresztmetszetének hőmérsékletvizsgálata



Irodalom a 3. fejezethez

Kaliszky-Kurutzné-Szilágyi: Mechanika II. Tankönyvkiadó  
 Lovas-Szilágyi: Szilárdságtan példatár J-9-1179  
 Palotás: Mérnöki Kézikönyv I. Műszaki Könyvkiadó