

Egészségügyi mérnökképzés

BIOMECHANIKA

epito.bme.hu/BMEEOTMOM04

Előadók:

Kiss Rita (MOGI)

Németh Róbert (TM)

Till Sára (HDR)

A félév tartalma

- Szilárd testek mechanikája (kb. 7 hét)
- Áramlástan (kb. 4 hét)
- Mozgásvizsgálatok (kb. 3 hét)

Számonkérés:

Írásbeli vizsga

A fél félév tartalma

- Alapfogalmak, erők és hatások
- Egyensúlyozás
- Igénybevételek, igénybevételi ábrák
- Szilárdságtani alapfogalmak
- Feszültségek, elmozdulások számítása
- Rugalmasságtani alapfogalmak
- Munka- és energiatételek, numerikus módszerek (VEM) alapjai

Egészségügyi mérnökképzés

MECHANIKA

I. rész: Szilárd testek mechanikája

készítette: Németh Róbert

Mechanika

A mechanika a

- mozgásokkal
- mozgást okozó hatásokkal (erőkkel)

foglalkozó tudomány

- Folyadékok és gázok mechanikája
(áramlástan)
- Szilárd testek mechanikája
(+merev testek)

Szilárd testek mechanikája osztályozása

Dinamika

- Kinematika (a mozgás leírása)
- Kinetika (a mozgás okainak vizsgálata)

Speciális eset, ha nincs mozgás:

Statika

- merev testek
- szilárd testek

Ismétlés

- Mértékegységek, SI-rendszer:
 - alapegységek: m, kg, s, A, K, mol, cd
 - származtatott egységek: $N = \text{kg m} / \text{s}^2$
 - prefixumok:
 - d~, c~, m~, ..., k~, M~, G~, ...
- Koordináta-rendszerek
 - balkezes (balsodrású) krsz.:
 - hüvelykujj (x)
 - mutatóujj (y)
 - középső ujj (z)



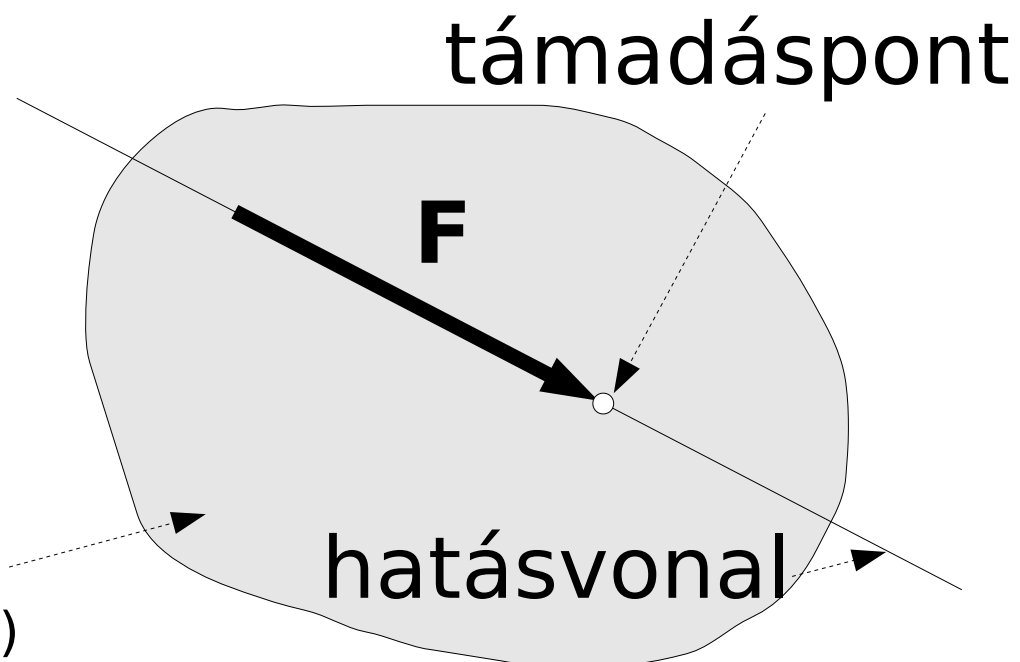
Az erő

Olyan hatás, mely a testek alakját, mozgását megváltoztathatja

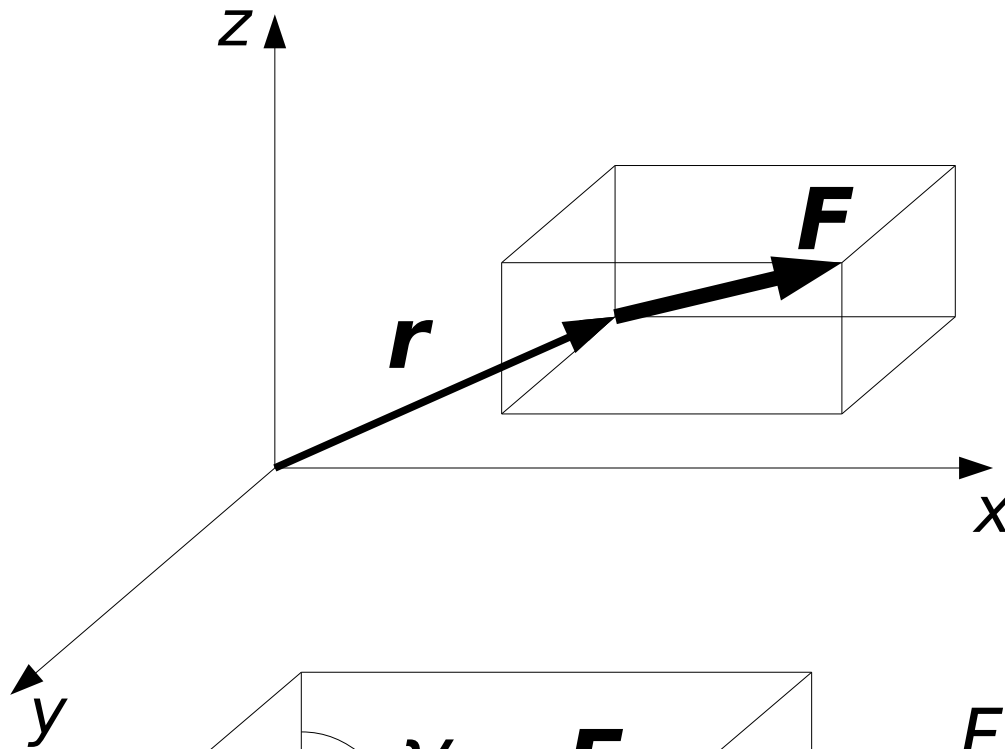
Kötött vektormennyiség, van:

- nagysága
- iránya (hatásvonala)
- értelme
- támadáspontja

merev test
(amire az erő hat)

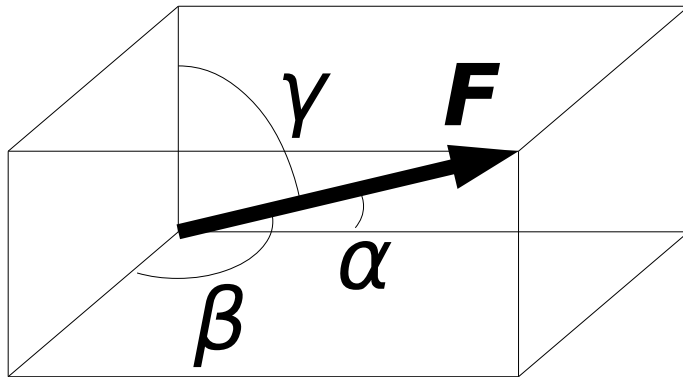


Az erő megadása



$$\mathbf{r} = (r_x, r_y, r_z)$$

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$$



$$F_x = F \cos \alpha$$

$$F_y = F \cos \beta$$

$$F_z = F \cos \gamma$$

$$(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1)$$

$F = 0$: zéruserő

Az erők osztályozása

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none">• távolba ható• közelbe ható | <ul style="list-style-type: none">• külső erők• belső erők |
| <ul style="list-style-type: none">• koncentrált• megoszló<ul style="list-style-type: none">- vonal mentén- felület mentén- térfogat mentén | <ul style="list-style-type: none">• aktív erők• passzív erők (reakcióerők) |

Erőrendszerek

Több erő hat egy testre: erőrendszer.

Jelölése felsorolással: (F_1, F_2, \dots, F_n)

Spec. esetek:

- síkbeli erőrendszer
- térbeli erőrendszer
- közös metszéspontú erőrendszer
- párhuzamos erőrendszer

Általános eset: szétszórt erőrendszer

Egyenértékűség, eredő

Eredő:

egyetlen, az erőrendszerrel azonos hatású erő:

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) \doteq R$$

Egyenértékű erőrendszerek:

$$(F_1, F_2, \dots, F_n) \doteq R \text{ és } (P_1, P_2, \dots, P_n) \doteq R,$$

$$\text{akkor } (F_1, F_2, \dots, F_n) \doteq (P_1, P_2, \dots, P_n)$$

Egyensúly: $(F_1, F_2, \dots, F_n) \doteq 0$

Ellentett: $(F, -F) \doteq 0$ $(R, -R) \doteq 0$

Merev testre ható erők I.

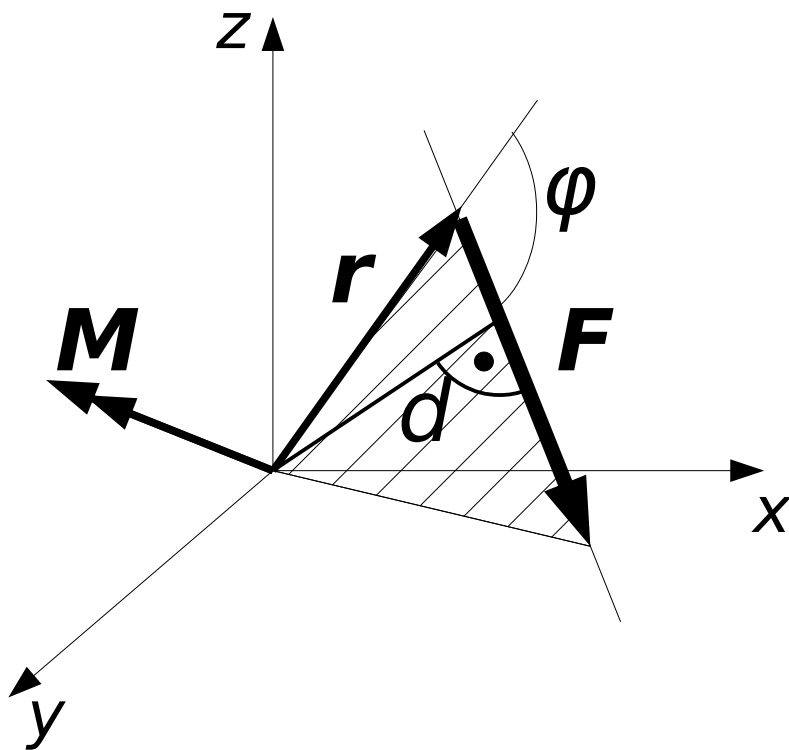
- Alaptételek
 - két, közös metszéspontú erő eredője a metszésponton átmenő erő, vektora a vektorösszeg
 - a hatásvonal mentén való eltolás az erő statikai hatását nem befolyásolja
 - eredőt az erők egyesítésének sorrendje nem befolyásolja
 - egyensúlyi erőrendszer hozzáadása nem változtatja meg az erőrendszer eredőjét

Merev testre ható erők II.

- További tételek
 - két erő egyensúlya
(azonos hatásvonal, nagyság, ellentétes irány)
 - három erő egyensúlya
(közös metszéspont, zárt vektorháromszög)
 - hatás-ellenhatás törvénye

Erő statikai nyomatéka egy pontra I.

Legyen \mathbf{r} a kiválasztott pontból az F erő hatásvonalának egy pontjába mutató vektor



Def.: $\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

$$|\mathbf{M}| = M = F \cdot r \cdot \sin \varphi$$

$$M = F \cdot d$$

Erő

kar

Erő statikai nyomatéka egy pontra

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

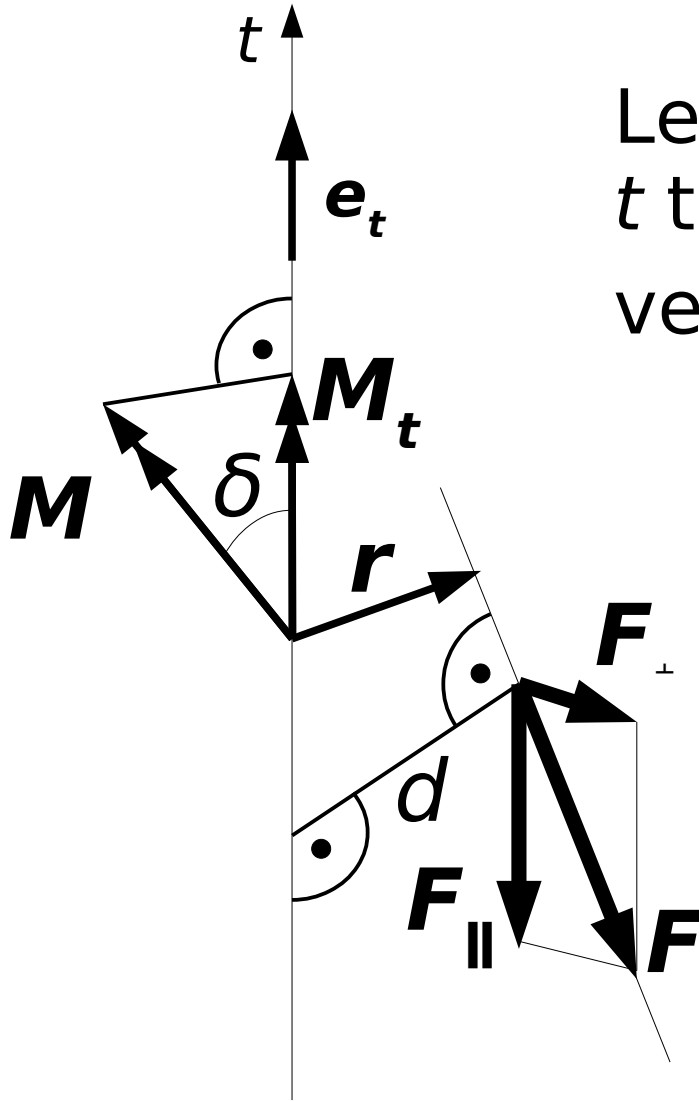
$$\mathbf{M} = (r_y F_z - r_z F_y) \mathbf{i} + (r_z F_x - r_x F_z) \mathbf{j} + (r_x F_y - r_y F_x) \mathbf{k}$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} F_z r_y - F_y r_z \\ F_x r_z - F_z r_x \\ F_y r_x - F_x r_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_z \end{bmatrix}$$

ha \mathbf{F} és \mathbf{r} az xy -síkban fekszik: $F_z=0, r_z=0$, így
 $M_x=0, M_y=0$

Erő statikai nyomatéka egy tengelyre

Legyen \mathbf{M} az F erő nyomatéka a t tengely egy pontjára, \mathbf{e}_t egy t -vel párhuzamos egységvektor.



$$\text{Def.: } \mathbf{M}_t = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_t) \mathbf{e}_t$$

$$M_t = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_t = M \cdot \cos \delta$$

$$M_t = (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{e}_t = (\mathbf{e}_t \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{F} = \dots$$

$$|M_t| = F_\perp \cdot d$$

A tengellyel párhuzamos erő nem forgat a tengely körül.

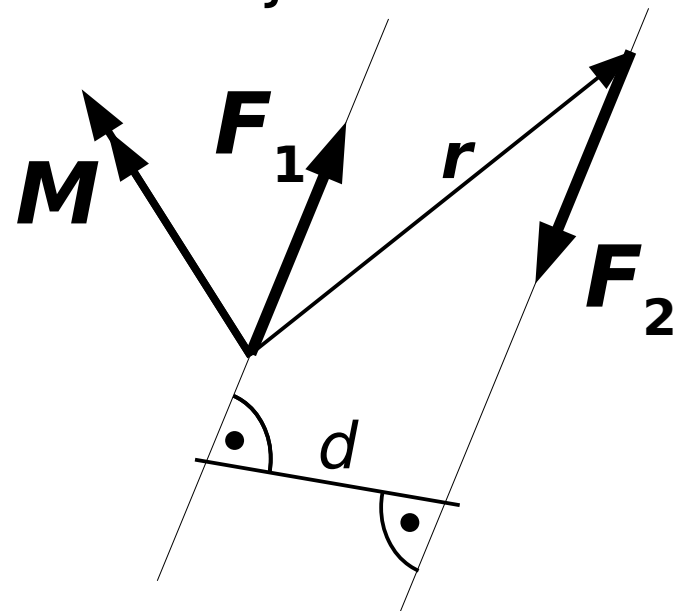
Erőpár

Két, párhuzamos, nem közös hatásvonalú, ellentétes irányú, azonos nagyságú erő eredője.

$$(F_1, F_2) \doteq M$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

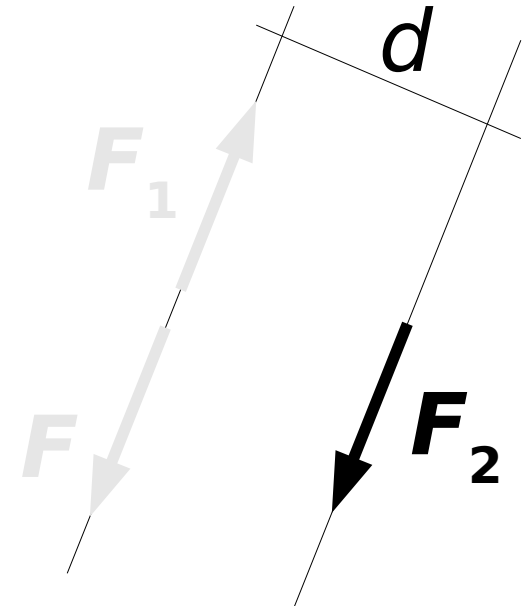
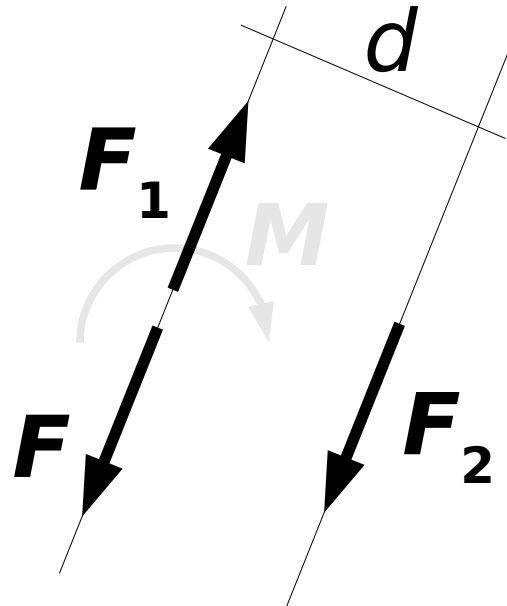
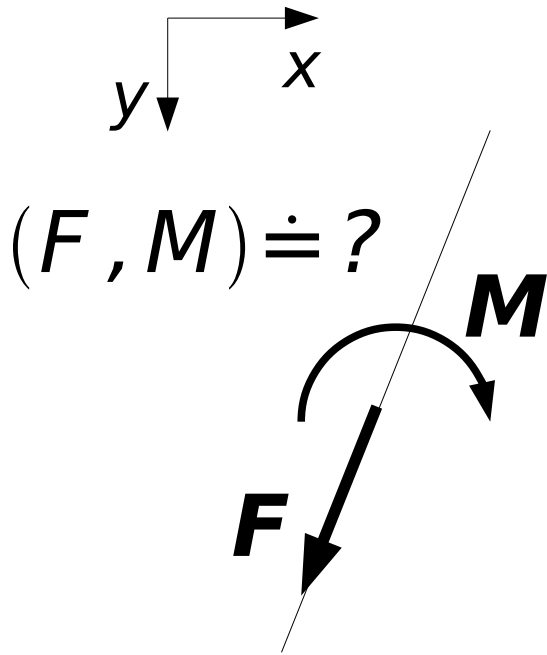
$$|\mathbf{M}| = |\mathbf{F}| \cdot d$$



Az *erőpár* egyenértékű egy *nyomatékkal*, aminek a nagysága független a helyétől, *szabad vektor*.

A nyomaték felbontható rá merőleges két erőre, a nagyságuk, vagy a távolságuk szabadon vehető fel.

Erő és erőpár eredője



$$(F, M) \doteq R$$

$$|F| = |F_1| = |F_2|$$

$$(F, F_1, F_2) \doteq R$$

$$M \doteq (F_1, F_2)$$

$$d = \frac{M}{F}$$

$$(F, F_1) \doteq 0$$

$$F_1 \doteq -F$$

$$(F_2) \doteq R$$

Műveletek erőkkkel

Feladatok:

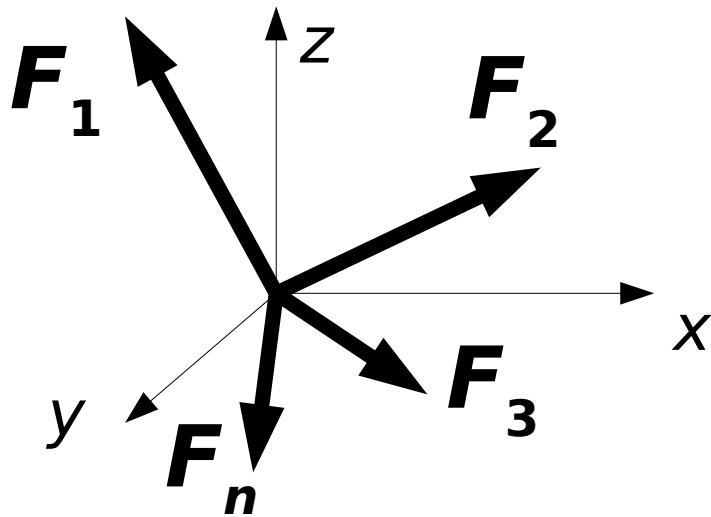
- Eredő meghatározása $(F_i, M_j) \doteq ?$
- Egyensúlyozás $(F_i, M_j, ?) \doteq 0$

Módszerek:

- számítással,
- szerkesztéssel,
- grafoanalitikusan.

Közös metszéspontú erőrendszer eredője

Az eredő egy, a közös metszésponton átmenő erő.



$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$$

$$(F_1, F_2) \doteq R_2$$

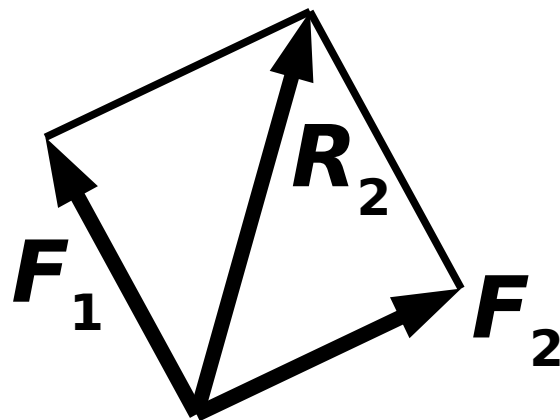
$$(R_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$$

$$(R_2, F_3) \doteq R_3$$

$$(R_3, \dots, F_n) \doteq R$$

⋮

$$(R_{n-1}, F_n) \doteq R$$

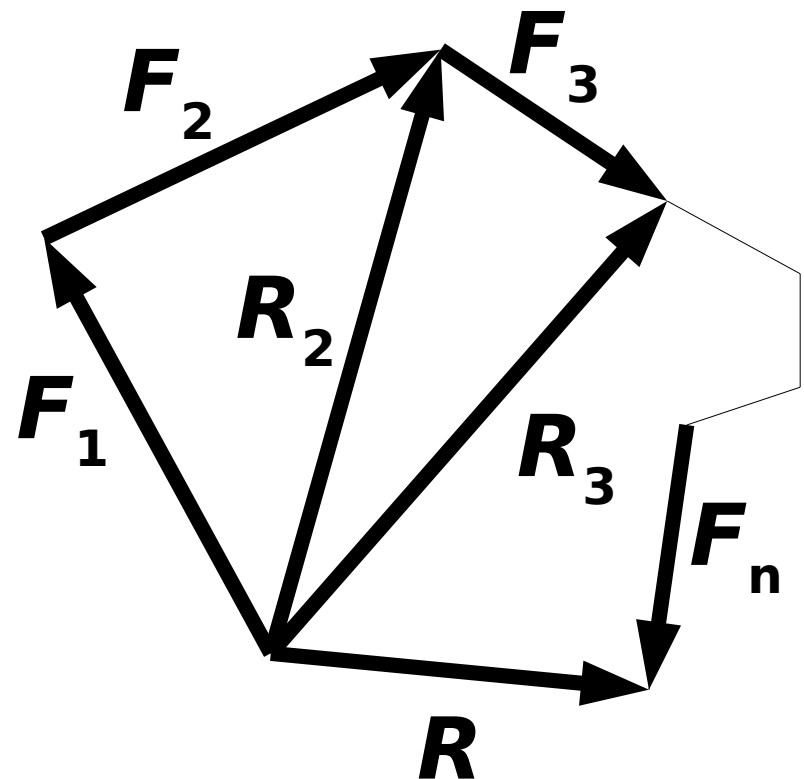
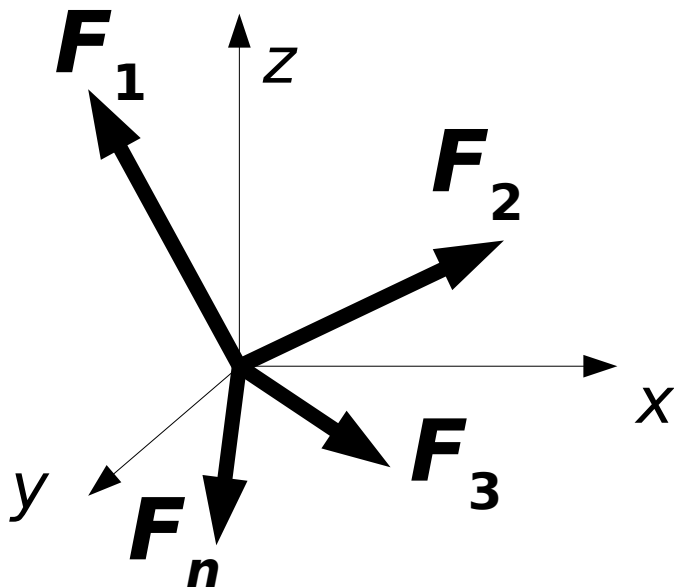


Közös metszéspontú erőrsz. eredője grafikusan

Vektortétel:

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots + \mathbf{F}_n = \mathbf{R}$$

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{R}$$



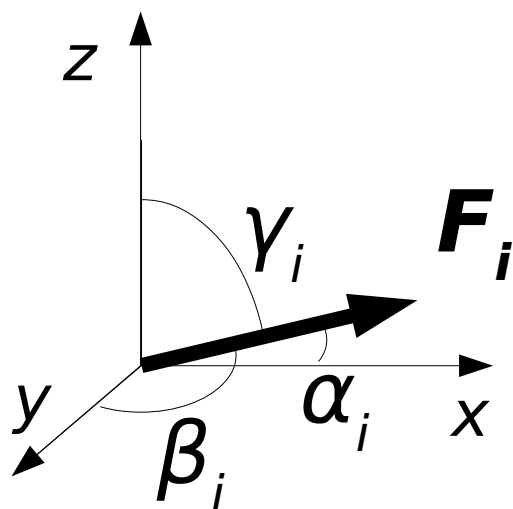
Közös metszéspontú erőrsz. eredője számítással

$$(F_1, F_2, F_3, \dots, F_n) \doteq R$$

Vetülettétel: $\sum F_{ix} : \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha_R = R_x$

$$\sum F_{iy} : \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = R \cos \beta_R = R_y$$

$$\sum F_{iz} : \sum_{i=1}^n F_i \cos \gamma_i = R \cos \gamma_R = R_z$$



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

egyensúly: $R_x = R_y = R_z = 0$

Közös metszéspontú erőrendszer eredője síkban

Legyen az összes erő az xy -síkban.

Ekkor $F_{iz}=0$ minden i -re, így $R_z=0$.

$$\sum F_{ix} : \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = R \cos \alpha_R = R_x$$

$$\sum F_{iy} : \sum_{i=1}^n F_i \cos \beta_i = R \cos \beta_R = R_y$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

egyensúly: $R_x = R_y = 0$

Erőpárok eredője

A nyomaték szabad vektor, eltolhatók egy közös metszéspontba. Az eredő egy, a közös metszésponton átmenő nyomatékvektor.

$$\sum M_{ix} : \sum_{i=1}^m M_i \cos \alpha_i = M_R \cos \alpha_R = M_{Rx}$$

$$\sum M_{iy} : \sum_{i=1}^m M_i \cos \beta_i = M_R \cos \beta_R = M_{Ry}$$

$$\sum M_{iz} : \sum_{i=1}^m M_i \cos \gamma_i = M_R \cos \gamma_R = M_{Rz}$$

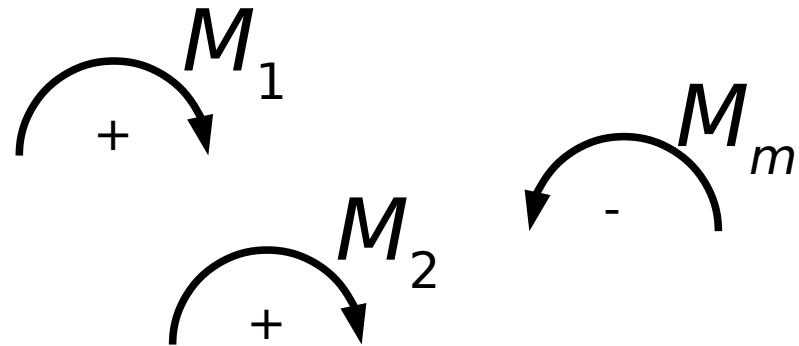
$$M_R = \sqrt{M_{Rx}^2 + M_{Ry}^2 + M_{Rz}^2}$$

Erőpárok eredője síkbeli feladatnál

A síkban fekvő erők nyomatékai a sík pontjaira a síkra merőleges nyomatékvektorokat eredményeznek, csak a merőleges irány

$$(M_1, M_2, M_3, \dots, M_m) \doteq M_R$$

$$\sum M_{iz} : \sum_{i=1}^m M_i = M_R$$



Szétszórt erőrendszer I.

- Mi az eredő?

$$(F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, \dots, M_m) \doteq ?$$

– Társerő, társnyomaték:

$$(F_1, F_2, \dots, F_n, M_1, \dots, M_m) \doteq (F_A, M_A)$$

$$\sum \mathbf{F}: \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_A$$

$$\sum \mathbf{M}: \sum_{i=1}^n \mathbf{r}_{Ai} \times \mathbf{F}_i + \sum_{i=1}^m \mathbf{M}_i = \mathbf{M}_A$$

\mathbf{M}_A függ az A pont helyétől, de $\mathbf{M}_A \cdot \mathbf{F}_A = \text{áll.}$

Szétszórt erőrendszer II.

- Mi az eredő?

$F_A = 0$ és $M_A = 0$ Egyensúly

$F_A = 0$ és $M_A \neq 0$ Nyomaték

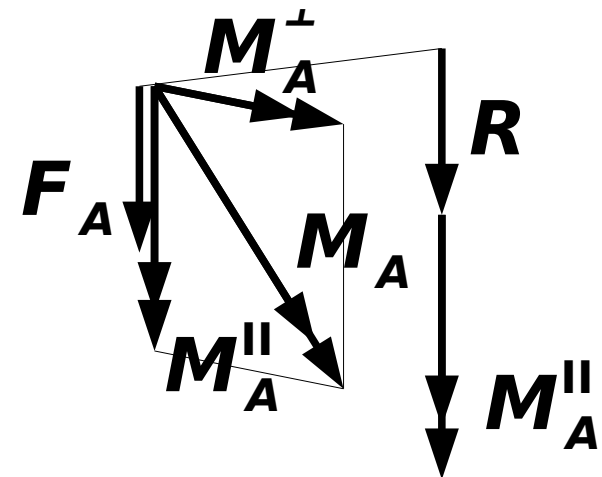
$F_A \neq 0$ és $M_A = 0$ Erő

$F_A \neq 0$ és $M_A \neq 0$ Erő, vagy erőcsavar

$$M_A = M_A^{\parallel} + M_A^{\perp}$$

$$(F_A, M_A^{\perp}) \doteq R$$

$$(F_A, M_A) \doteq (R, M_A^{\parallel})$$



Eredő lehetséges esetei

- Az eredő:
 - Egyensúly: $\mathbf{F}_A = \mathbf{0}$ és $\mathbf{M}_A = \mathbf{0}$
 - Nyomaték: $\mathbf{F}_A = \mathbf{0}$ és $\mathbf{M}_A \neq \mathbf{0}$
 - Erő: $\mathbf{F}_A \neq \mathbf{0}$ és $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{0}$
 - Erőcsavar: $\mathbf{F}_A \cdot \mathbf{M}_A \neq \mathbf{0}$

Párhuzamos térbeli erőrendszer

- Legyen az erők iránya z
- Felírható egyenletek:

$$\begin{aligned} \sum F_{iz} \\ \sum M_{ix} \\ \sum M_{iy} \end{aligned}$$

- Az eredő lehet:
 - Erő
 - Nyomaték
 - Egyensúly

Szétszórt síkbeli erőrendszer

- Legyen az erők síkja xy
- Felírható egyenletek:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} \\ \sum F_{iy} \\ \sum M_{iz} (= \sum M_i^O) \end{aligned}$$

- Az eredő lehet:
 - Erő
 - Nyomaték
 - Egyensúly

Párhuzamos síkbeli erőrendszer

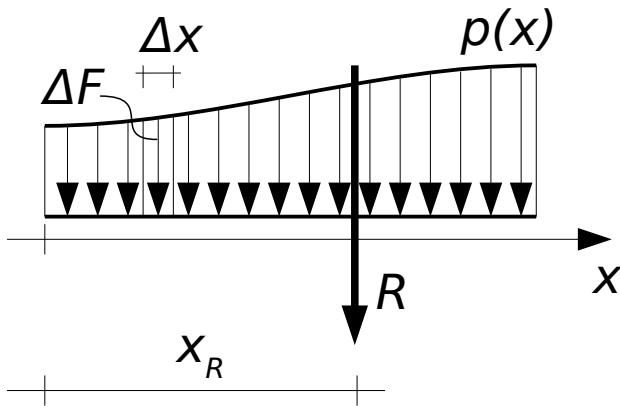
- Legyen az erők síkja xy , az erők iránya y
- Felírható egyenletek:

$$\sum F_{iy}$$
$$\sum M_{iz} (= \sum M_i^O)$$

- Az eredő lehet:
 - Erő
 - Nyomaték
 - Egyensúly

Síkbeli megoszló erők

- Végtelen kicsiny erők végtelen közel egymáshoz:



$$p(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{dF}{dx}$$

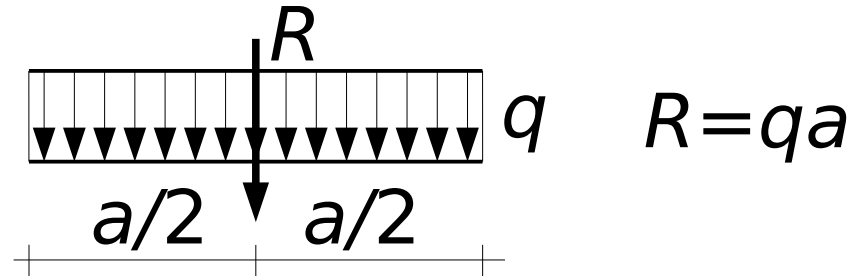
$$\sum F_{iy}: \int p(x) dx = R$$

$$\sum M_i^0: \int p(x) x dx = R x_R$$

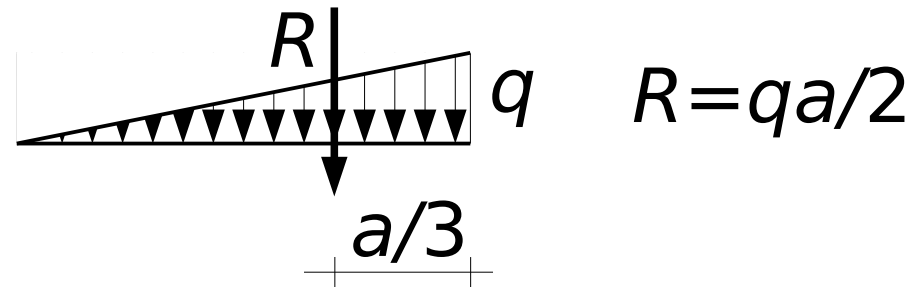
$$x_R = \frac{\int p(x) x dx}{\int p(x) dx}$$

Megoszló erők eredője

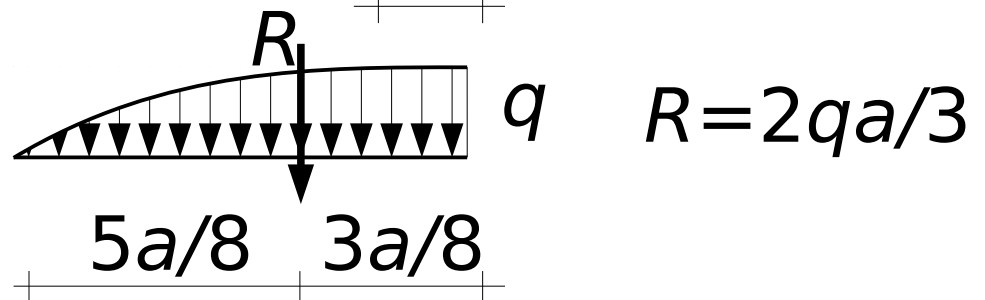
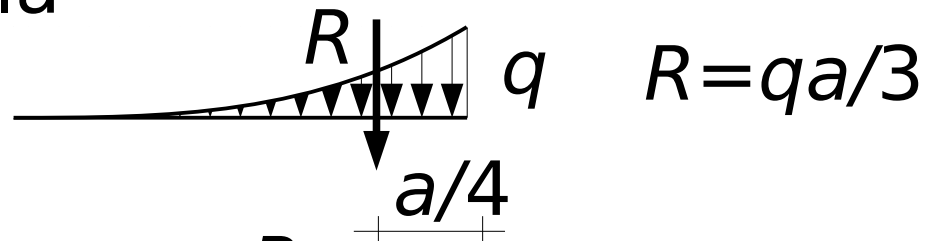
- állandó



- lineárisan változó



- másodfokú parabola
az egyik érintő
vízszintes!

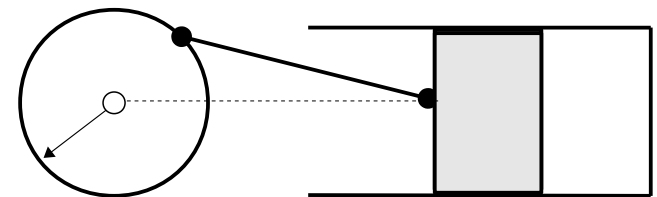


Szerkezetek

Egy vagy több *merev test*ből álló, *kényszerekkel* egymáshoz ill. a „földhöz” kapcsolt alakzatok

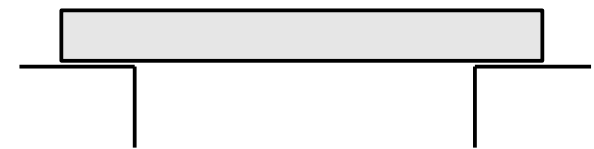
Fő funkció alapján:

- **Mechanizmus**
mozgások megvalósítása



- **Tartó**
teherhordásra alkalmas

- egyszerű (1 merev test)
- összetett (több)



Kényszerek

- Összekötött elemek egy vagy több egymáshoz képesti elmozdulását (eltolódás, vagy elfordulás) megakadályozza

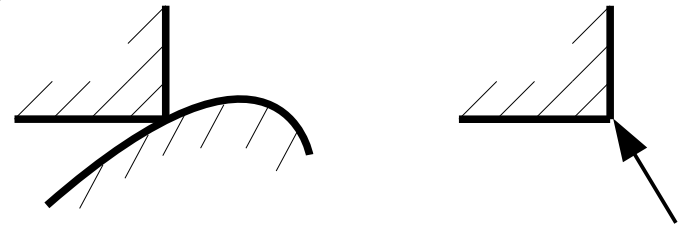
Meggátolt elmozdulások száma a *szabadsági fok* (statikai)

A gátolt eltolódás(ok) irányában erő(k) lépnek fel, a gátolt elfordulás(ok) tengelye(i) körül forgatónyomaték(ok) lépnek fel.

Ezeket hívjuk reakcióerőnek ill. -nyomatéknak

1 szabadságfokú kényszerek

- egyszerű megtámasztás



- görgős megtámasztás



- támasztórúd (kötél)

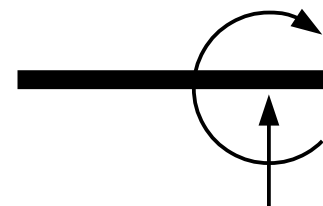


Többszabadságfokú kényszerek

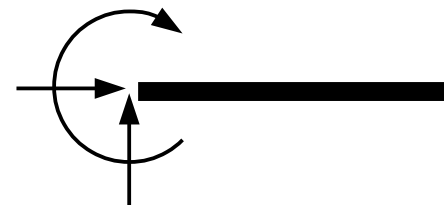
- csukló



- vezetékek



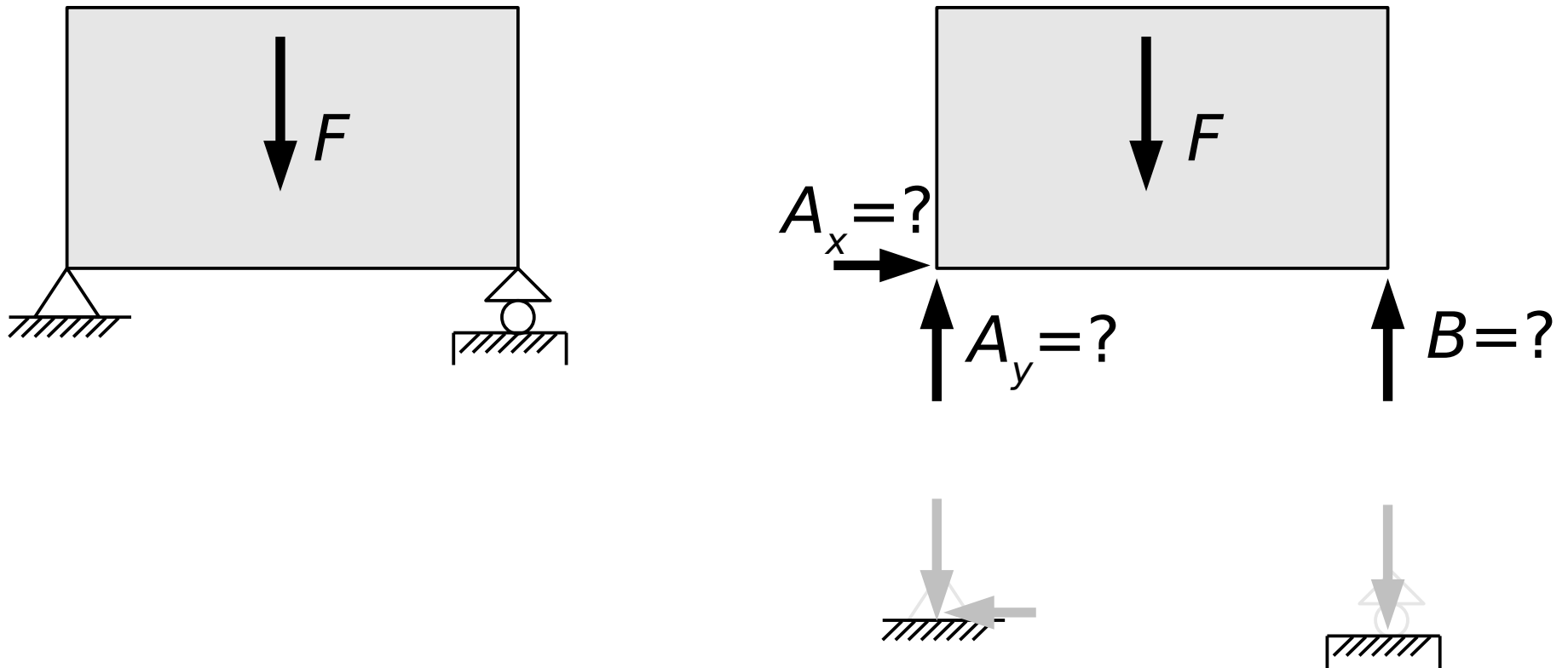
- merev befogás



- egyéb (pl. gömbcsukló)

Egyszerű tartók reakcióinak számítása

- Elv: elkülönítés elve



A testre ható összes erő egyensúlyi erőrendszer alkot

Megoldás menete

1. Vázlat (feladat elolvasása)
2. Elkülönítés
3. Egyensúlyi kijelentés
4. Ismeretlenek számbavétele
5. Egyensúlyi egyenletek felírása, megoldása (ellenőrzés)

Feladat megoldhatósága (statikai határozottság)

- Statikailag határozott: egyértelmű megoldás

Ami nem határozott, az lehet:

- Statikailag határozatlan: nem egyértelmű a megoldás
- Statikailag túlhatározott: nincs megoldás (mozog a szerkezet.)

Független egyenletek és ismeretlenek száma *segít*.

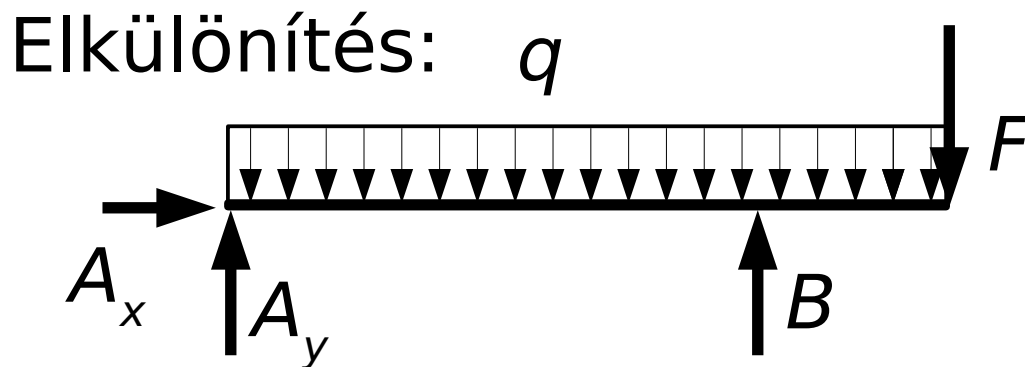
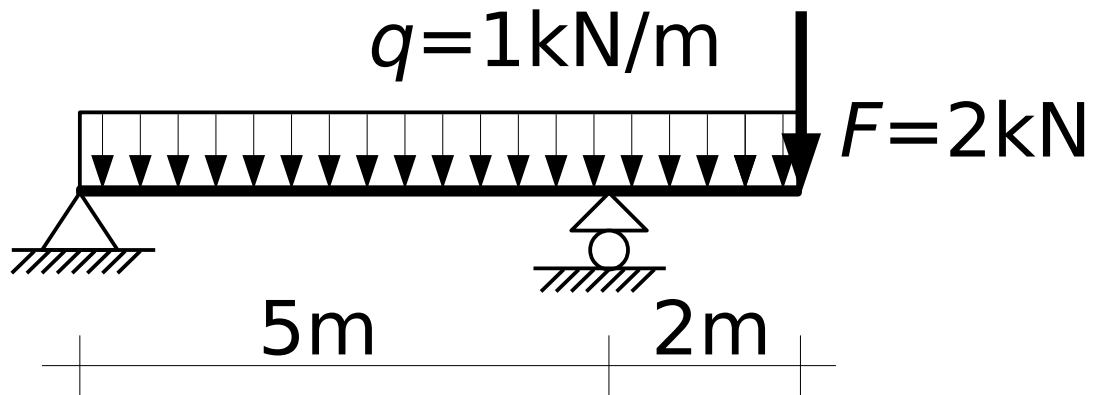
Szerkezet statikai határozottsága (bármilyen teher esetén)

- Statikailag határozott: egyértelmű megoldás mindig
- Statikailag határozatlan: nem egyértelmű megoldás
- Statikailag túlhatározott: van, hogy nincs megoldás (lehet, hogy mozog)
- Statikailag határozatlan és túlhatározott: a tehertől függ, hogy mozog-e.

Független egyenletek és ismeretlenek száma *segít*.

Egyszerű tartók: 1. példa

- Kéttámaszú tartó



Egy. kij.:

$$((q), F, A, B) \doteq 0$$

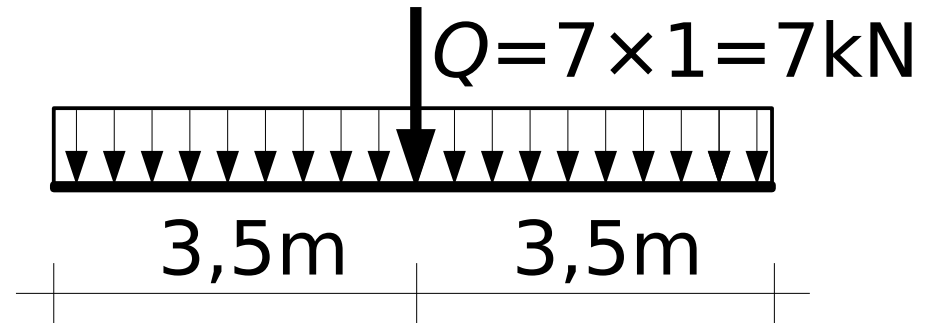
Ismeretlenek:

$$A_x = ?, A_y = ?, B = ?$$

Egyszerű tartók: 1. példa

$$\sum F_{ix}: A_x = 0$$

$$A_x = 0 \text{ kN}$$



$$\sum M_i^A: +7 \cdot 3,5 + 2 \cdot 7 - B \cdot 5 = 0$$

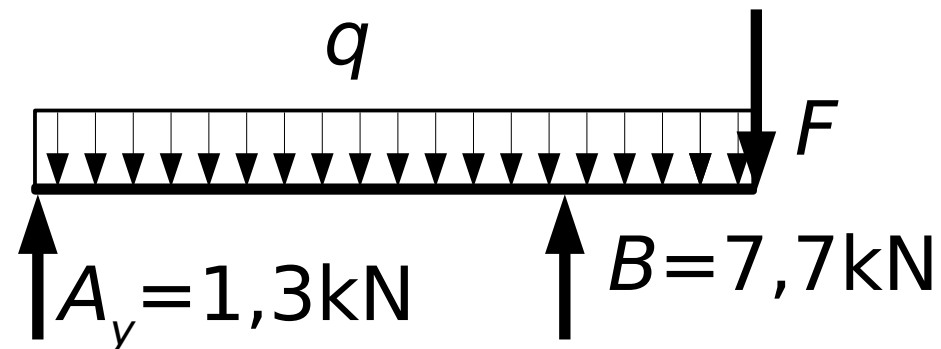
$$B = +7,700 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^B: -7 \cdot 1,5 + 2 \cdot 2 + A_y \cdot 5 = 0$$

$$A_y = +1,300 \text{ kN} (\uparrow)$$

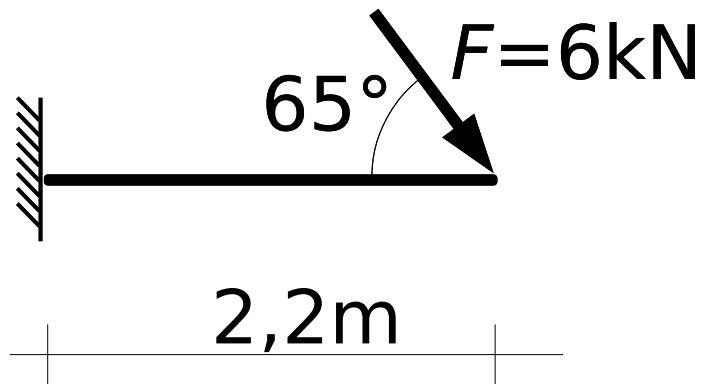
Ellenőrzés:

$$\sum F_{iy}: +7 + 2 - 1,3 - 7,7 = 0$$

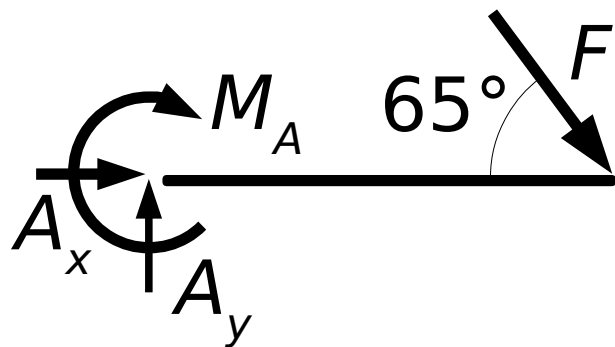


Egyszerű tartók: 2. példa

- Mereven befogott konzol



Elkülönítés:



$$\text{Egy. kij.: } (F, A, M_A) \doteq 0$$

$$\text{Ism.: } A_x = ?, A_y = ?, M_A = ?$$

$$\sum F_{ix}: 6 \cdot \cos 65^\circ + A_x = 0$$

$$A_x = -2,536 \text{ kN} (\leftarrow)$$

$$\sum F_{iy}: +6 \cdot \sin 65^\circ - A_y = 0$$

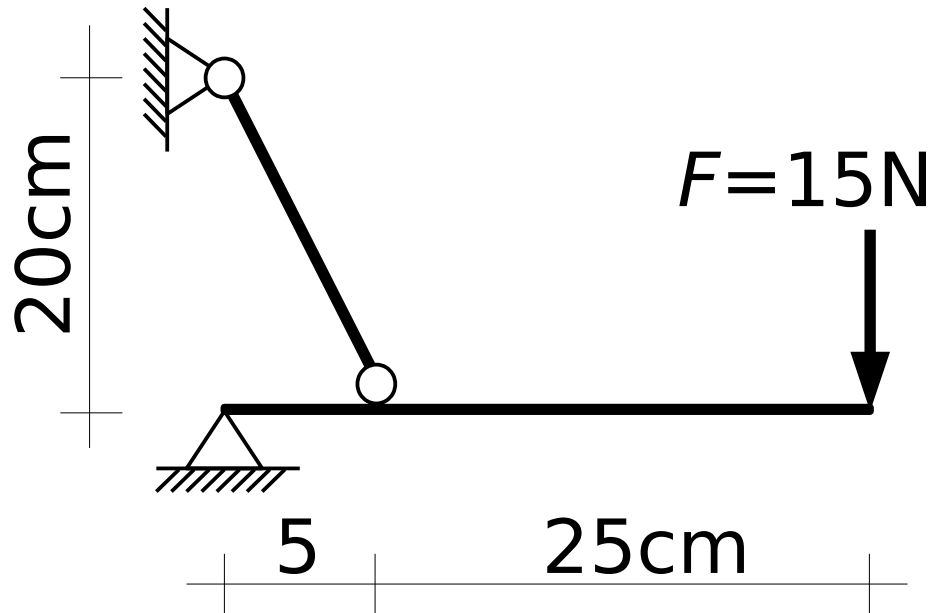
$$A_y = +5,438 \text{ kN} (\uparrow)$$

$$\sum M_i^A: +6 \cdot \sin 65^\circ \cdot 2,2 + M_A = 0$$

$$M_A = -11,96 \text{ kNm} (\curvearrowright)$$

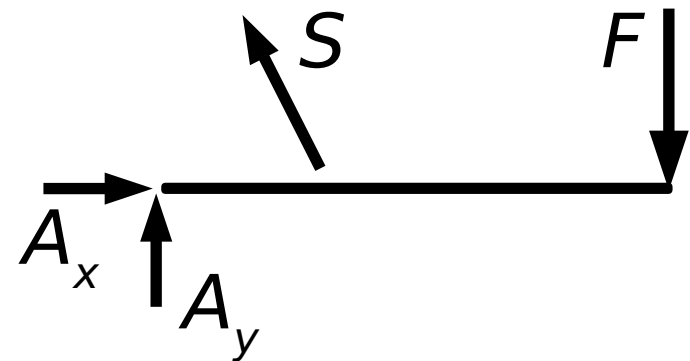
Egyszerű tartók: 3. példa

- Csuklóval és rúddal megtámasztott alkar



$$L_s = \sqrt{5^2 + 20^2} = 20,62\text{ cm}$$

Elkülönítés:



Egy. kij.:

$$(F, A, S) \doteq 0$$

Ismeretlenek:

$$A_x = ?, A_y = ?, S = ?$$

Egyszerű tartók: 3. példa

$$\sum M_i^A: +15 \cdot 30 - S \frac{20}{20,62} \cdot 5 = 0$$

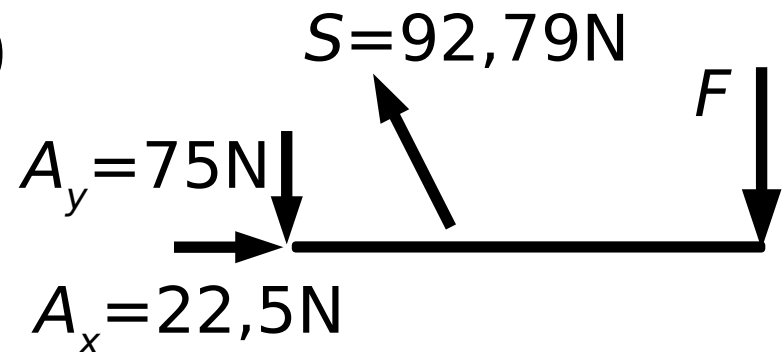
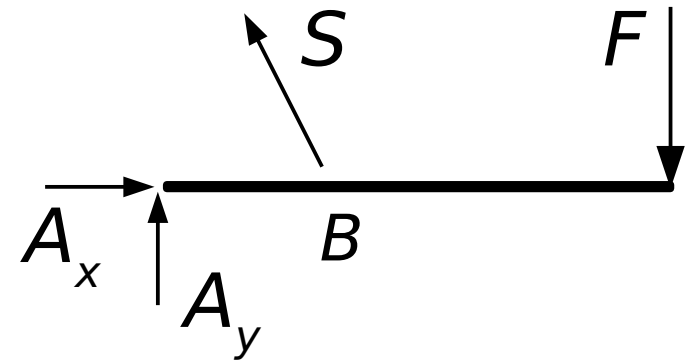
$$S = +92,79 \text{ N} (\nearrow)$$

$$\sum M_i^B: +15 \cdot 25 + A_y \cdot 5 = 0$$

$$A_y = -75,00 \text{ N} (\downarrow)$$

$$\sum F_{ix}: +A_x - 92,79 \cdot \frac{5}{20,62} = 0$$

$$A_x = +22,50 \text{ N} (\rightarrow)$$



Összetett tartók reakciói

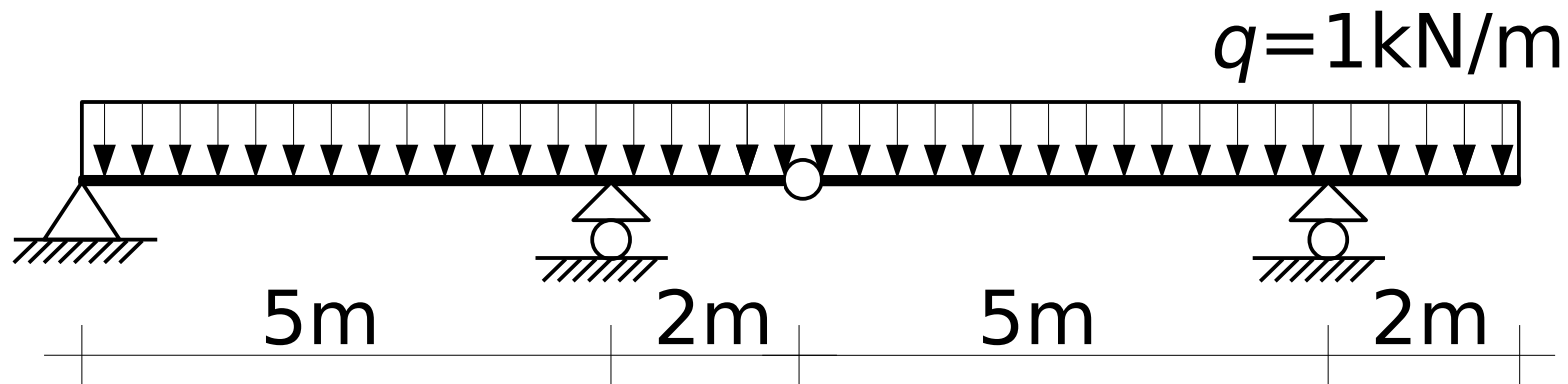
- Az elv itt is az elkülönítés.

„Ha minden alkotó test külön-külön egyensúlyban van, akkor az egész szerkezet és bármely része is egyensúlyban van.”

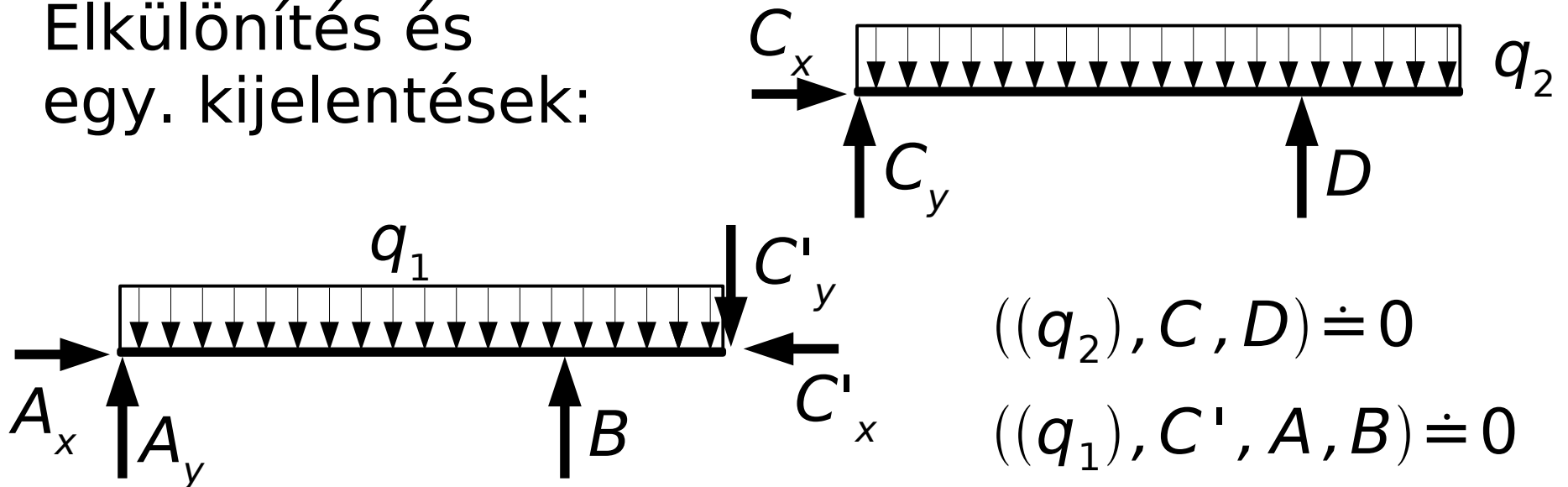
- A megoldás menete ugyanaz, mint az egyszerű tartónál de belső reakciók is lesznek.

Összetett tartók: 1. példa

- Gerber-tartó

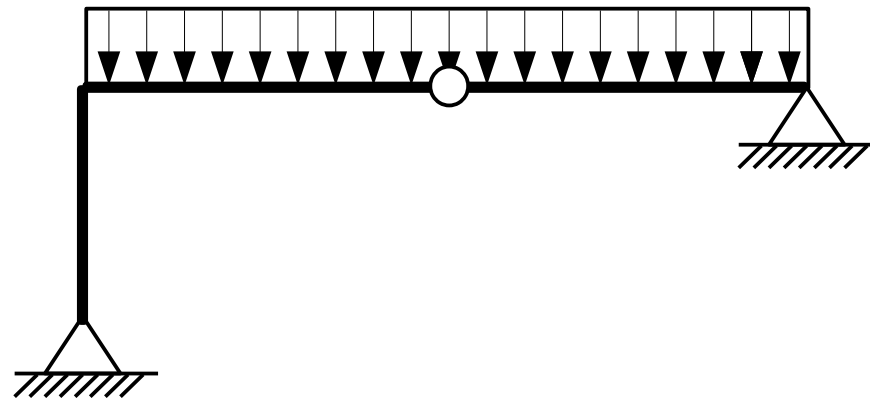


Elkülönítés és
egy. kijelentések:

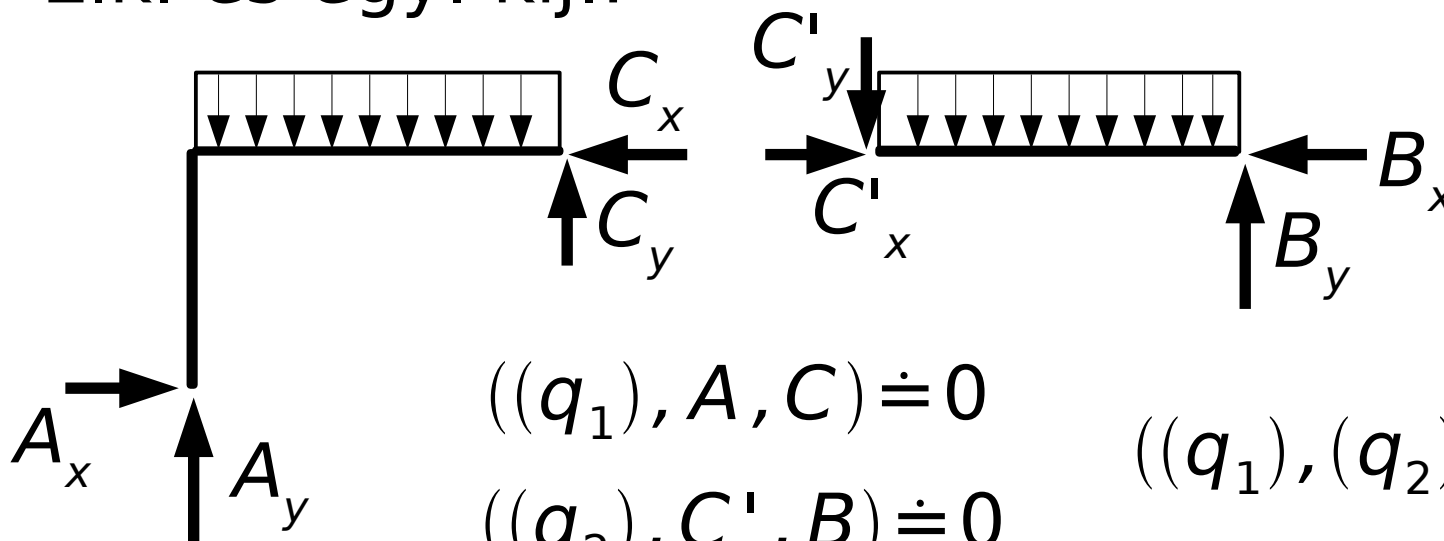


Összetett tartók: 2. példa

- Háromcsuklós tartó



Elk. és egy. kij.:



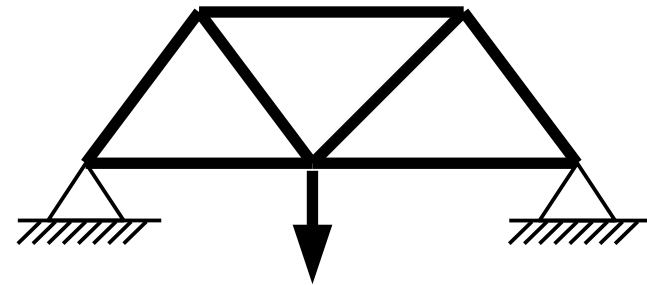
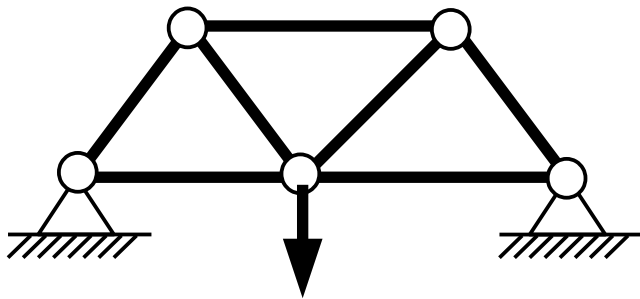
$$((q_1), A, C) \doteq 0$$

$$((q_2), C', B) \doteq 0$$

$$((q_1), (q_2), A, B) \doteq 0$$

Rácsos tartók

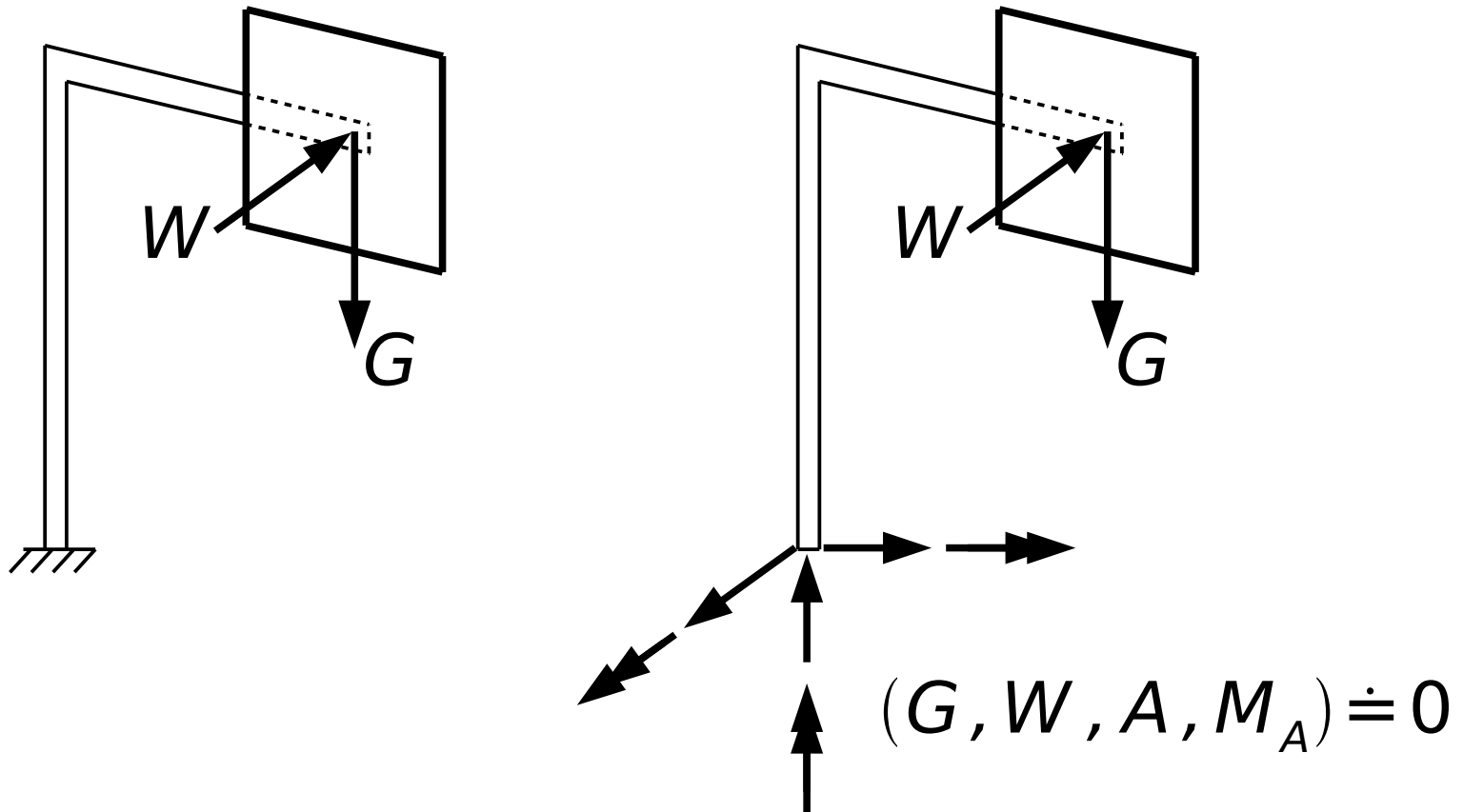
- Korlátozás:
 - csak rudak és csuklók alkotják
 - terhelés a csuklókon koncentrált erővel



- Megoldási módszerek:
 - minden csomópont egyensúlya
 - átmetszéses módszerek

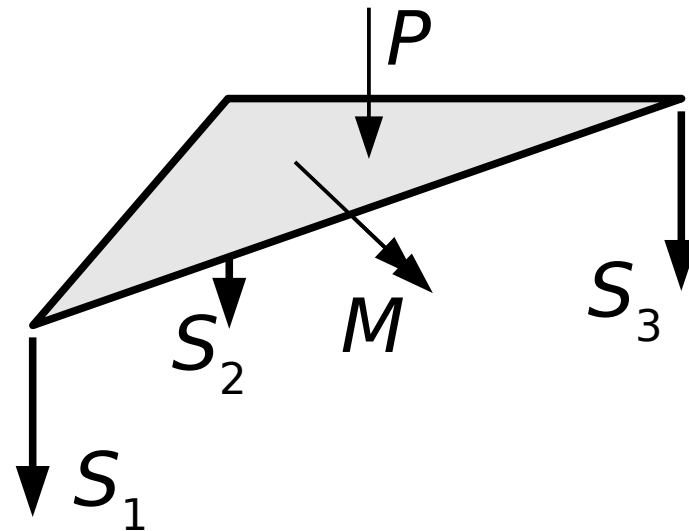
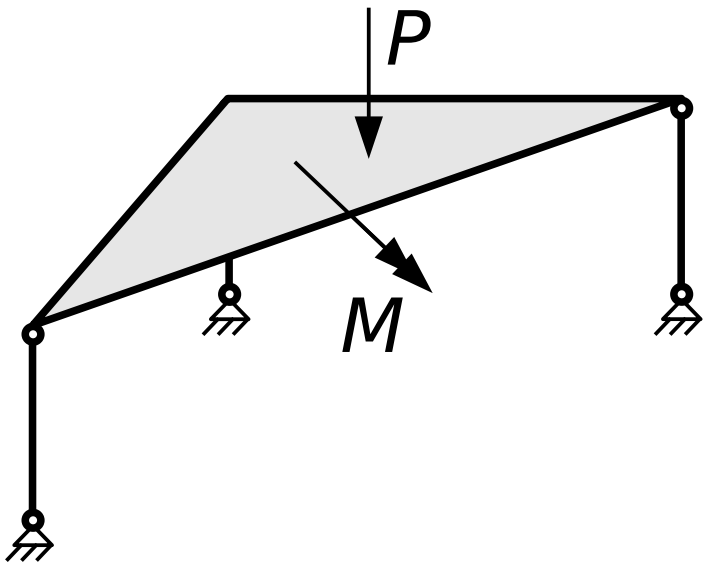
Térbeli szerkezetek I.

- Merev befogás (közlekedési tábla)



Térbeli szerkezetek II.

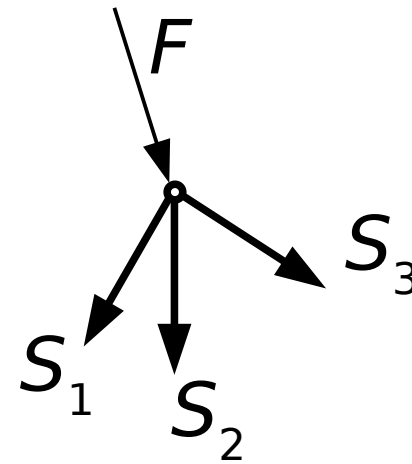
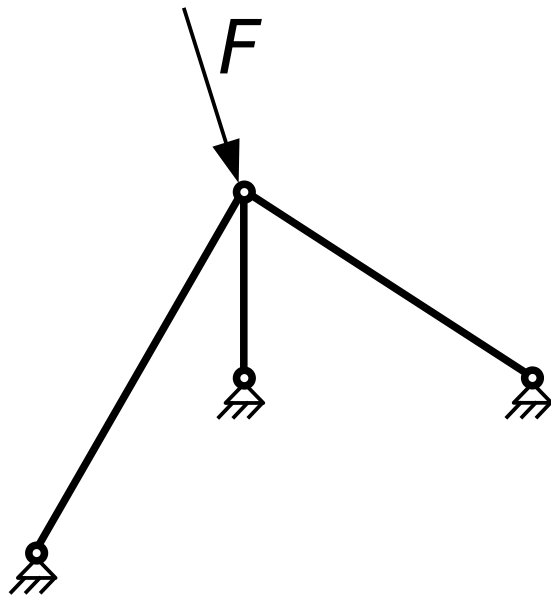
- Párhuzamos térbeli erők (asztallap)



$$(P, W, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$$

Térbeli szerkezetek III.

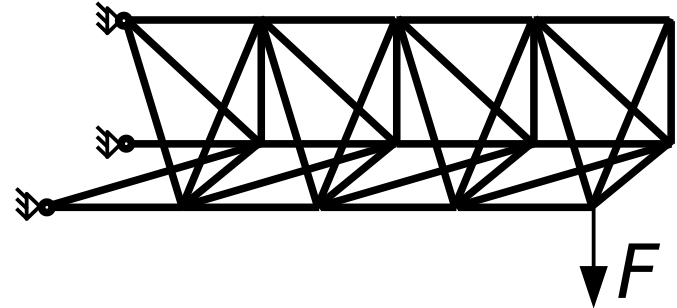
- Közös metszéspontú térbeli erők
(háromlábú bakállvány)



$$(F, S_1, S_2, S_3) \doteq 0$$

Térbeli szerkezetek IV.

- Térbeli rácsos tartó
- Héjszerkezetek
- Tárcsák
- Lemezűvek
- stb.



Számítás: számítógépes módszerek