Egészségügyi mérnökképzés

MECHANIKA

I. rész: Szilárd testek mechanikája

készítette: Németh Róbert

Igénybevételek térben I.

- Az alapelv ugyanaz, mint síkban: a keresztmetszet egyik oldalán levő szerkezet-részre ható erőket redukáljuk a keresztmetszetbe.
- Függvényként való ábrázolásuk axonometrikusan, vagy vetülettel oldható meg.

Igénybevételek térben II.

- Az erő felbontása:
  - Normálerő: a km. síkjára merőleges
  - Nyíróerő(k): a km. síkjában (két komponens)
- A nyomaték felbontása:
  - Csavarónyomaték: a tartó tengelyével párhuzamos
  - Hajlítónyomaték(ok): a km. síkjában (két komponens)

Igénybevételek térben III.

- (Központos) húzás-nyomás
- (Tiszta) nyírás
- Csavarás
- Hajlítás
  - Egyenes
  - Ferde
- Külpontos (hajlítással egyidejű) húzás-nyomás
- Hajlítással egyidejű nyírás
- Nyírás és csavarás

Rúdszerkezetek igénybevételei

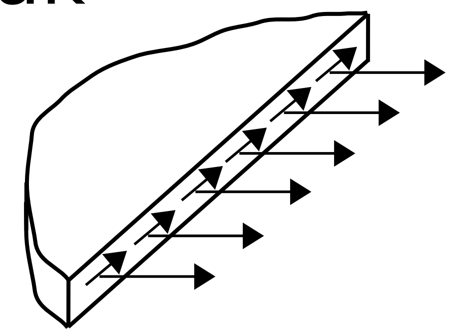
- Rúdszerkezet: egyes elemek hossza lényegesen nagyobb a többi kiterjedésnél
- Térbeli rúdszerkezet
- Síkbeli rúdszerkezet:
  - Keret: erők és eltolódások a rudak közös síkjában (1 hajlítónyomaték)
  - Tartórács: erők és eltolódások a rudak közös síkjára merőlegesen (2 nyomaték)

Felületszerkezetek igénybevételei

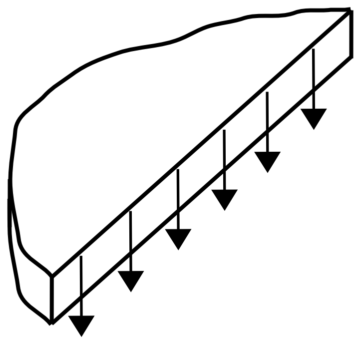
- Felületszerkezet: egyes elemek vastagsága lényegesen kisebb a többi kiterjedésnél
- Az igénybevételek a metszett felületben működő megoszló erők eredőjeként, mint vonal mentén megoszló (fajlagos) erőkként értelmezhetők, így mértékegységük lehet pl. kN/m, ill. kNm/m

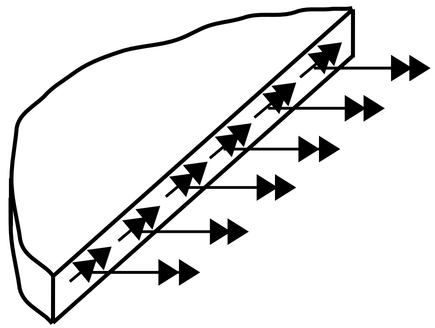
Sík szerkezetek igénybevételei

- Tárcsa: erők a síkban hatnak
    - Normálerő
    - Nyíróerő



- Lemez: erők a síkra merőlegesen hatnak
    - Nyíróerő
    - Hajlítónyomaték
    - Csavarónyomaték





Felületszerkezetek igénybevételei

- Lemezművek: tárcsa- és lemezszerű viselkedés egymásra hatása

  pl.: hajtogatott legyezőszerű alak

- Héjak: az igénybevételek azonosak, de a köztük levő összefüggés bonyolultabb.

Szilárdságtan – bevezetés I.

- Szilárd test:
  korlátozottan alakváltozásra képes anyag

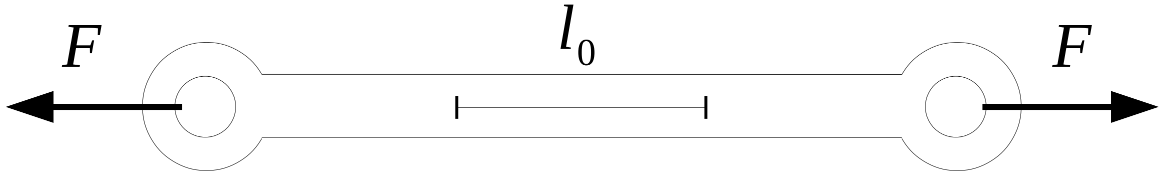
- A szilárdságtan tárgya a szilárd test:
  - alakváltozások
  - elmozdulások
  - feszültségek

Szilárdságtan – bevezetés II.

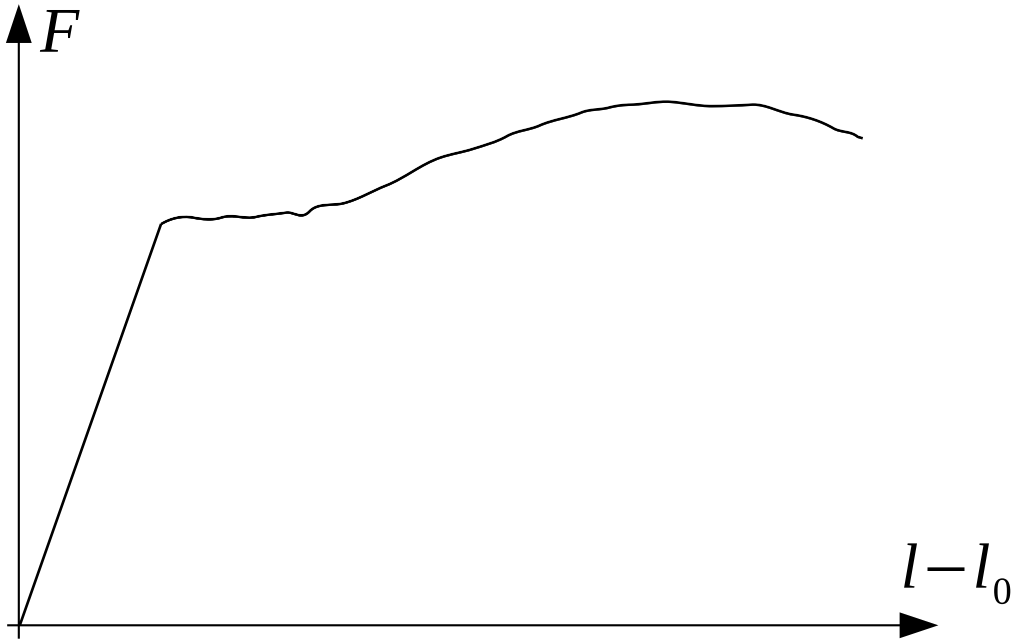
- A kapcsolódó fizikai tulajdonságok a szilárdsági tulajdonságok
- Az anyaggal szemben támasztható szilárdságtani követelmények:
  - szilárdsági (teherbírási)
  - merevségi (használhatósági)
  - stabilitási

Szilárdságtani jelenségek

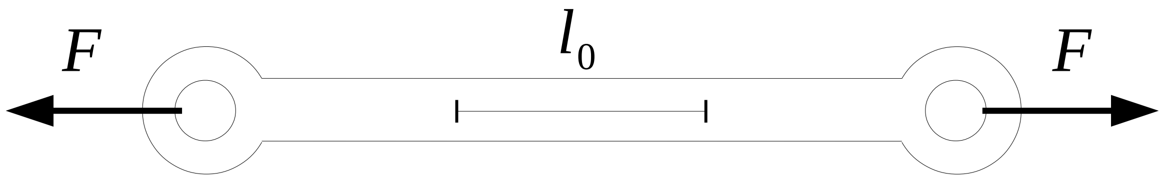
- Húzókísérlet



erő-megnyúlás diagram



Szilárdságtani jelenségek

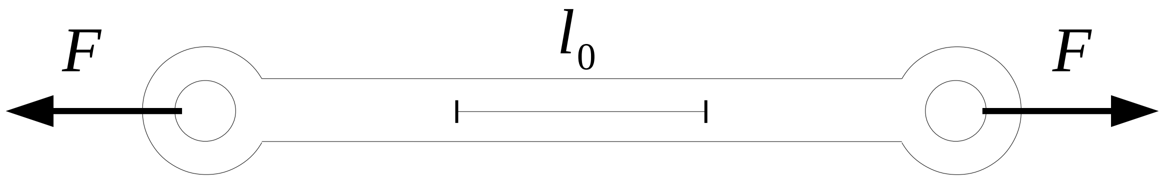


- Húzókísérlet
- Tapasztalatok:
  - Nagyobb keresztmetszet → nagyobb erő
  - Hosszabb l_0 → nagyobb megnyúlás
  - Más anyag → esetleg más görbe

→ fajlagosítás
  - Keresztmetszetre
  - Egységnyi hosszra

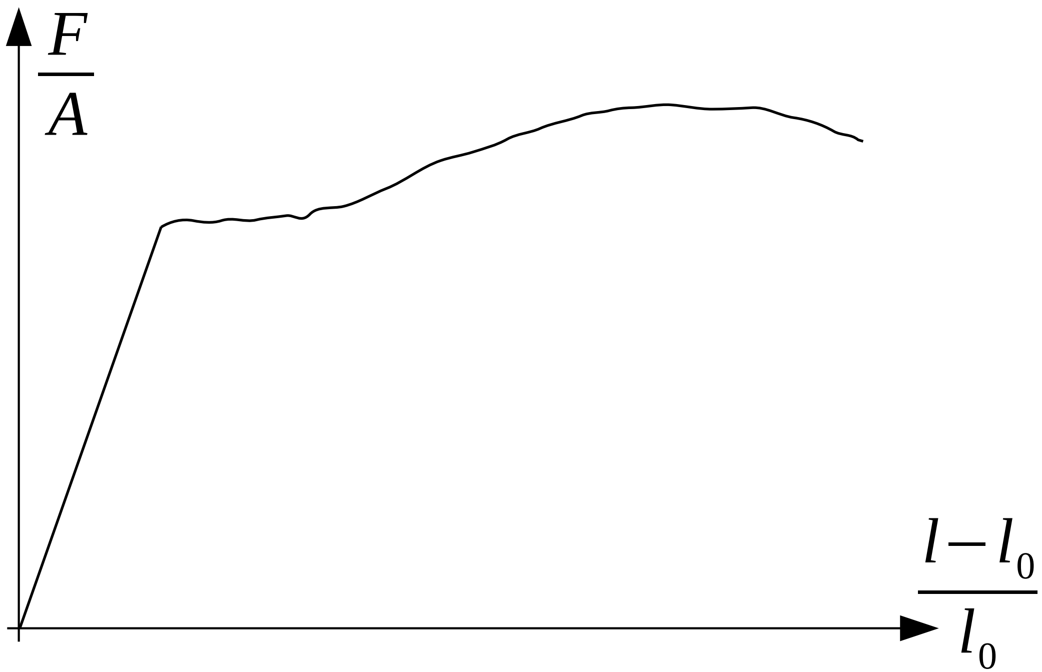
Szilárdságtani jelenségek

- Húzókísérlet



feszültség-alakváltozás diagram

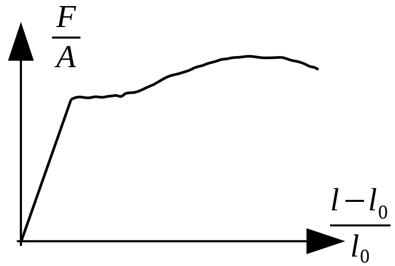
egy anyagra ez már ~ azonos

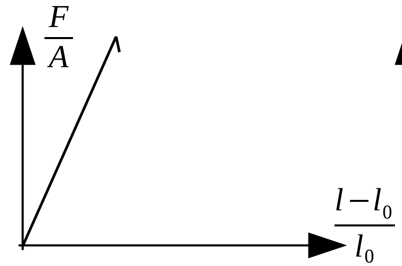


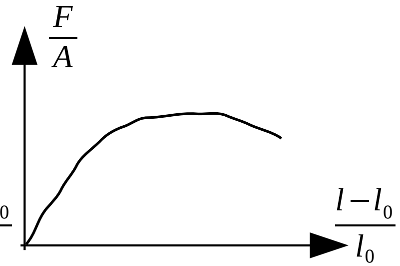
Szilárdságtani jelenségek

A feszültség-alakváltozás diagramot még befolyásolja:

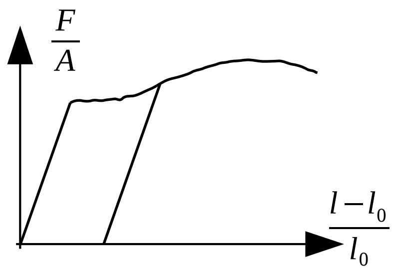
– Anyag

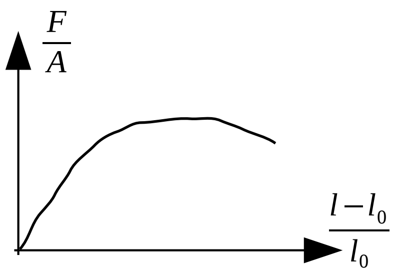


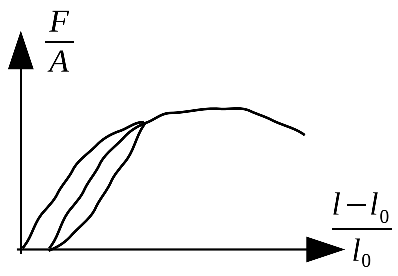


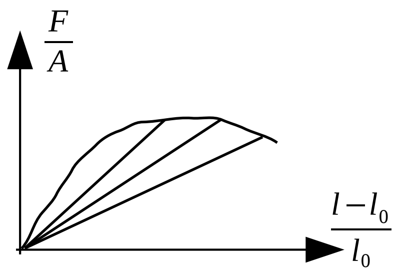


– Terhelés-tehermentesítés ciklusai



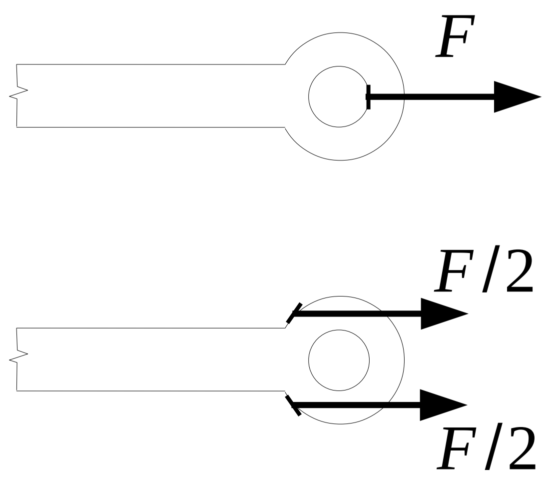


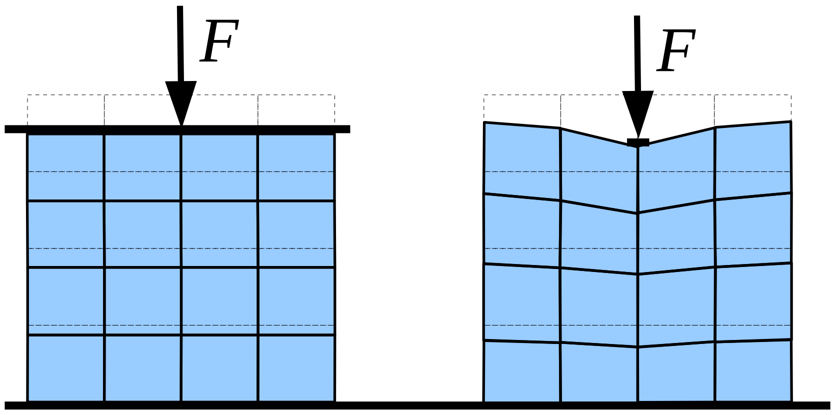




Szilárdságtani jelenségek

Erőbevezetés módja befolyásolja az erőjátékot



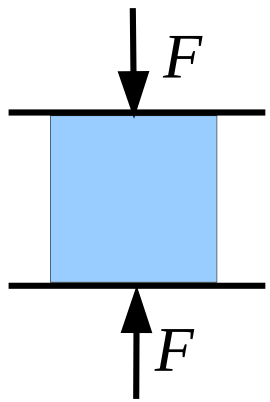


Saint-Venant-elv: az erőbevezetés módja csak annak környezetében befolyásolja a feszültségeket, attól távolabb már nem

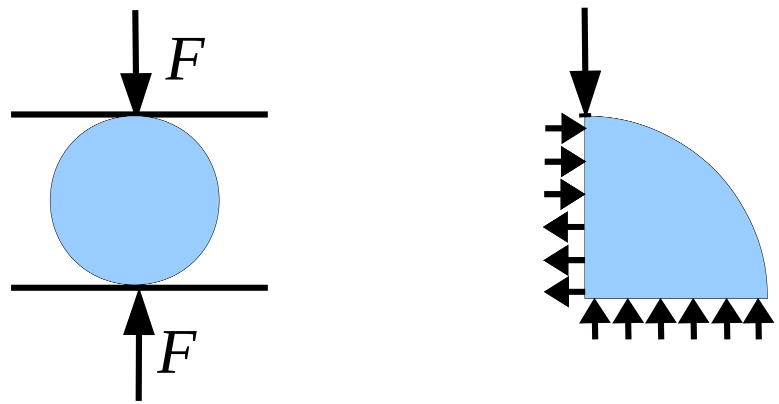
Szilárdságtani jelenségek

Példák további kísérletekre:

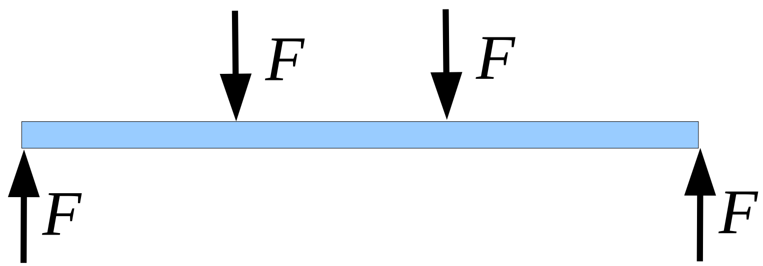
Nyomókísérlet



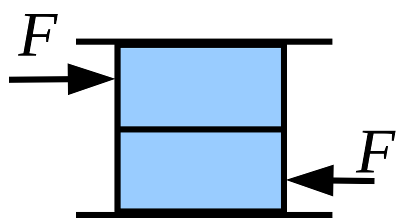
Hasító



Hajlító-húzókísérlet



Nyíró



Szilárdságtan – bevezetés II.

- A kapcsolódó fizikai tulajdonságok a szilárdsági tulajdonságok
- Az anyaggal szemben támasztható szilárdságtani követelmények:
  - szilárdsági (teherbírási)
  - merevségi (használhatósági)
  - stabilitási

Szilárdságtan feladatai

- Az alakváltozásra képes rúd keresztmetszeti igénybevételeiből a keresztmetszet mentén megoszló erők (feszültségek)

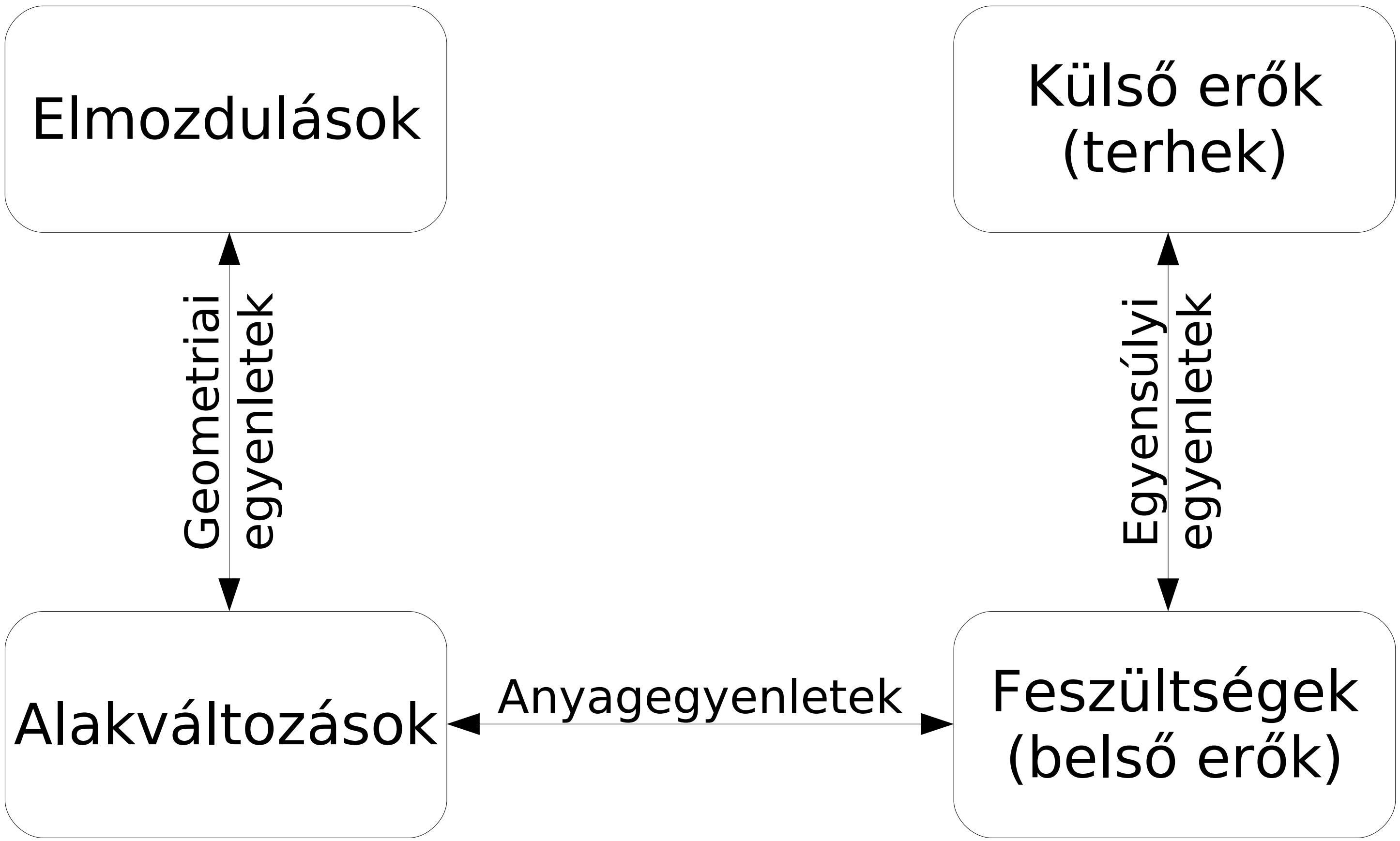
- Az alakváltozások és az elmozdulások számítása

- Egyensúlyi helyzet jellemzése

Szilárdságtan – bevezetés III.

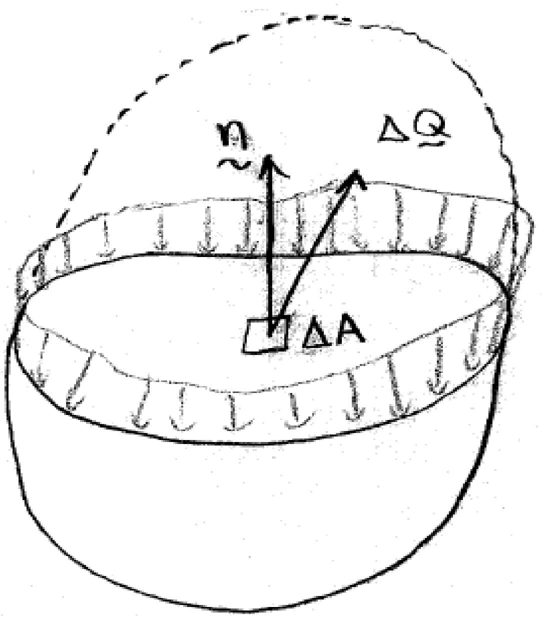
- A vizsgált anyag:
  - Folytonos függvényekkel leírható kontinuum, mely a teret gyűrődés- és hézagmentesen tölti ki.
  - Viselkedése, mikroszerkezete szerint lehet:
    - homogén, vagy inhomogén,
    - izotróp, anizotróp vagy ortotróp,
    - időfüggetlen, vagy időfüggő
    - hőmérsékletfüggetlen, vagy hőmérsékletfüggő
    - a terhelési történettől független, vagy függő
    - stb.

Vizsgált változók, egyenletek



(Mechanikai) Feszültségek I.

- A test részei egyensúlyban vannak. Az ***n*** normálisú elemi felület mentén megoszló erő:



Feszültségvektor:

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dA}$$

nagysága és iránya is
n irányától függ → tenzor

ΔA-t az eredeti, vagy a megváltozott helyzetben nézzük? (nemlinearitás)

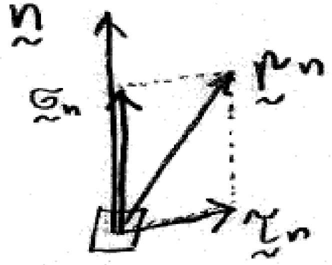
Feszültségek II.

- Feszültségvektor felbontása:

  normál- és nyírófeszültségre

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \parallel \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n \perp \boldsymbol{n}$$



Komponensek számítása:

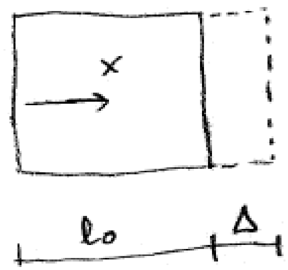
$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \tau_{nt}\,\boldsymbol{t}$$

τ nyírófeszültség indexelése:
első (egyetlen) index: felület normálisa
második index (ha van): irány

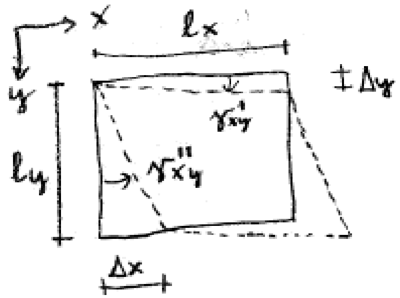
Alakváltozások I.

- Fajlagos nyúlás:



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{l_0}$$

- Fajlagos szögtorzulás:



$$\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} = \frac{\Delta y}{l_x} + \frac{\Delta x}{l_y}$$

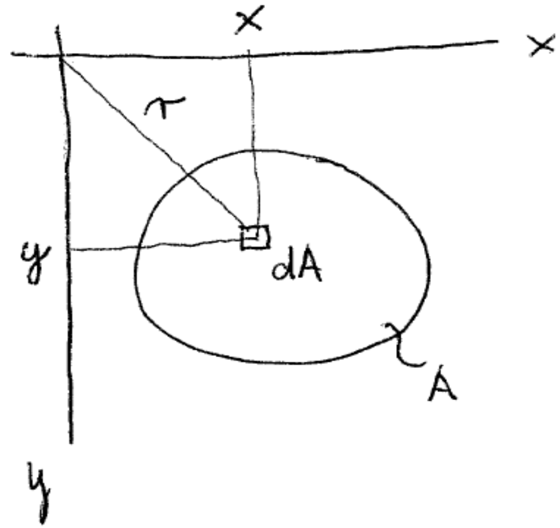
Anyagegyenletek I.

- Anyag
  - homogén
  - izotróp
  - lineárisan rugalmas
  - időfüggetlen anyag
- Teher
  - statikus, kvázi-statikus

Rúdmodell

- Tengely, keresztmetszetek
  - z-vel párhuzamos, ill. xy-síkban
- Anyag
- Sík keresztmetszetek elve
- Megmerevítés elve
- Kis elmozdulások

Rudak keresztmetszeti jellemzői



- Terület

$$A=\int_A dA$$

- Statikai nyomaték

$$S_x=\int_A y\,dA\,,S_y=\int_A x\,dA$$

- Tehetetlenségi nyomaték

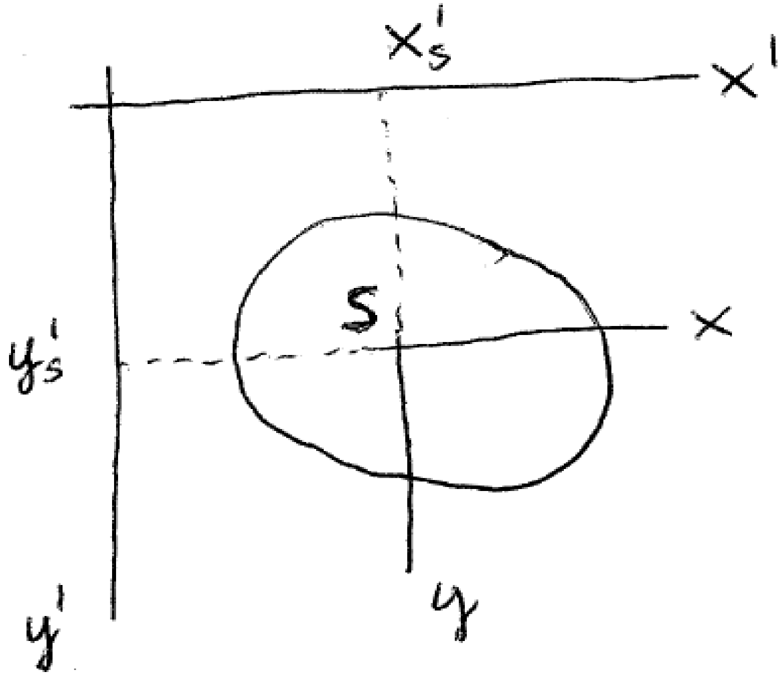
$$I_x=\int_A y^2 dA\ ,\ I_y=\int_A x^2 dA\ ,\ I_0=\int_A r^2 dA=I_x+I_y$$

- Centrifugális nyomaték

$I_{xy}=C_{xy}=\int_A xy\,dA$ (ha x vagy y szimmetriatengely, akkor 0)

Súlypont

- $S_x = S_y = 0$

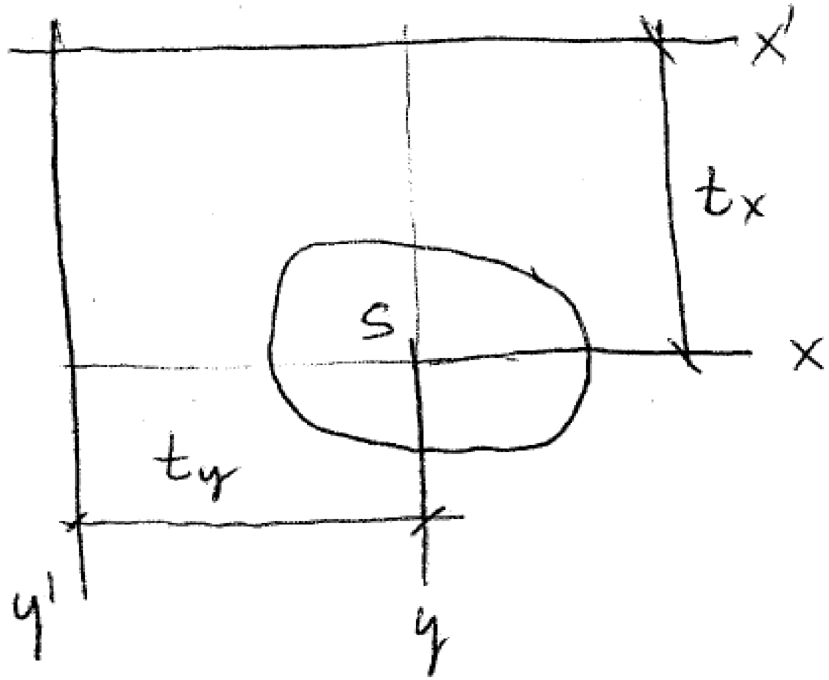


$$x'_S = \frac{\int_A x' \, dA}{\int_A dA} = \frac{S_{y'}}{A}$$

$$y'_S = \frac{\int_A y' \, dA}{\int_A dA} = \frac{S_{x'}}{A}$$

Steiner-tétel

- Koordinátarendszer eltolása



$$S_x = S_y = 0 \quad \text{(súlypont)}$$

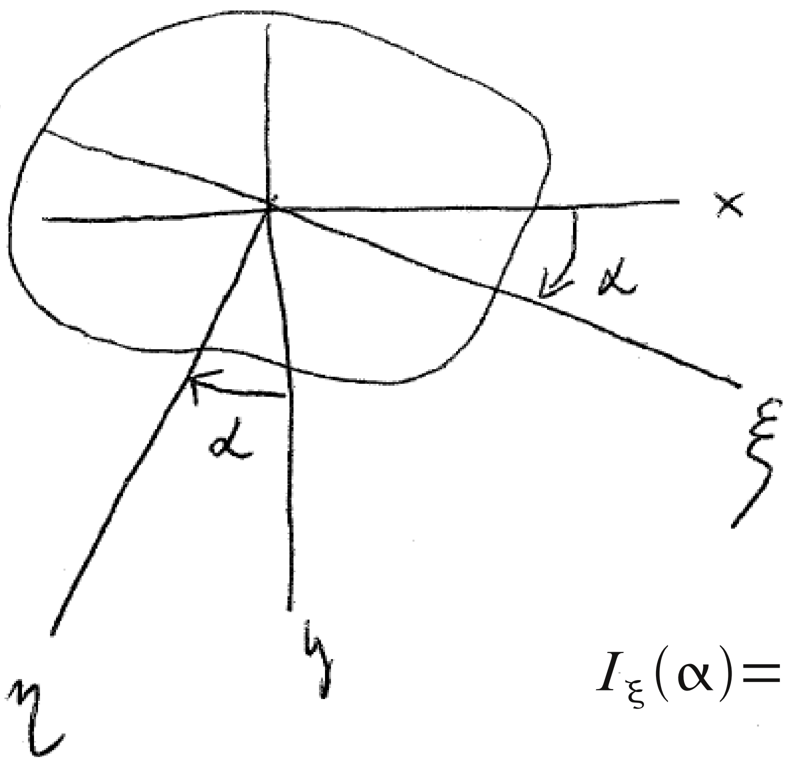
$$I_{x'} = I_x + A \cdot t_x^2$$

$$I_{y'} = I_y + A \cdot t_y^2$$

$$C_{x'y'} = C_{xy} + A \cdot t_x \cdot t_y$$

Inerciaszámítás

- Koordinátarendszer elforgatása



I_x, I_y, C_{xy}, α adott

$I_\xi, I_\eta, C_{\xi\eta} = ?$

$I_\xi = \int_A \eta^2 \, dA$, etc.

$$\xi = x\cos\alpha + y\sin\alpha$$
$$\eta = -x\sin\alpha + y\cos\alpha$$

$$I_\xi(\alpha) = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2}\cos 2\alpha - C_{xy}\sin 2\alpha$$

Főinerciák I.

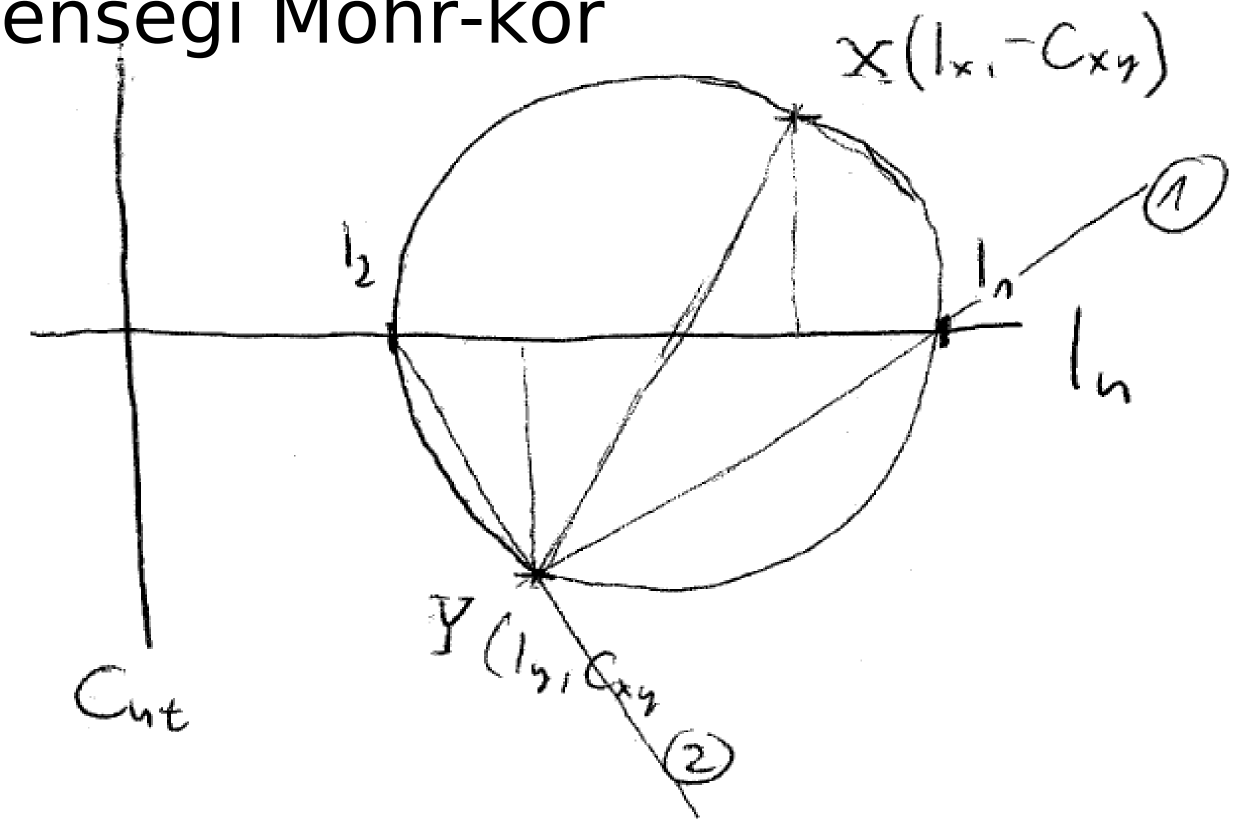
- I_ξ, I_η harmonikus függvények $\rightarrow$ szélsőértékek
- $\dfrac{d\,I_\xi}{d\,\alpha}=0 \rightarrow$ ahol $C_{\xi\eta}(\alpha)=0$
- $\tan 2\alpha_0=\dfrac{-2\,C_{xy}}{I_x-I_y}$, tehetetlenségi főirány $(\alpha_0+k\cdot 90^\circ)$ is megoldás
- $I_\xi(\alpha_0)\rightarrow$ főtehetetlenségi nyomaték $, I_1>I_2$
- Megjegyzések: $C_{12}=0\,!$

  A szimmetriatengely főirány

Főinerciák II.

- $$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + C_{xy}^2}$$

- Tehetetlenségi Mohr-kör



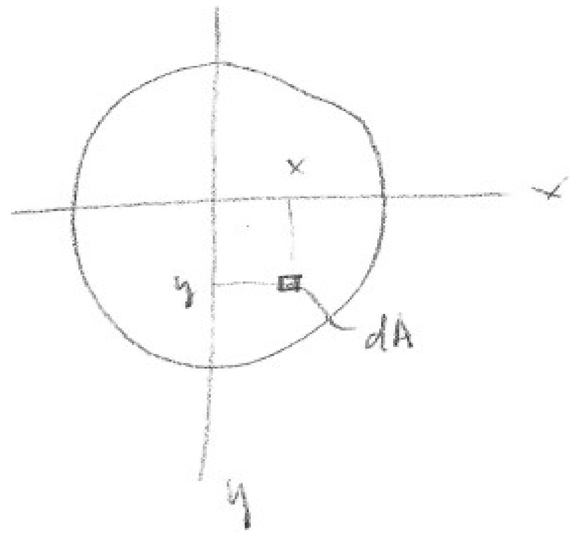
Normálfeszültségek - igénybevételek

Sík km.: $\varepsilon_z = \alpha x + \beta y + \gamma \rightarrow \sigma_z = E \varepsilon_z = a x + b y + c$

$$N = \int_A \sigma_z \, dA$$

$$M_x = \int_A \sigma_z \, y \, dA$$

$$M_y = -\int_A \sigma_z \, x dA$$



$$\begin{aligned} c A &= N \\ a C_{xy} + b I_x &= M_x \\ a I_y + b C_{xy} &= -M_y \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} C_{xy} & I_x \\ I_y & C_{xy} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{C_{xy}^2 - I_x I_y} \begin{bmatrix} C_{xy} & -I_x \\ -I_y & C_{xy} \end{bmatrix}$$

Normálfeszültségek

$$c=\frac{N}{A} \qquad a=\frac{M_x C_{xy}+M_y I_x}{C_{xy}^2-I_x I_y} \qquad b=\frac{-M_x I_y-M_y C_{xy}}{C_{xy}^2-I_x I_y}$$

$$\sigma_z=\frac{N}{A}+\frac{M_x C_{xy}+M_y I_x}{C_{xy}^2-I_x I_y}x+\frac{-M_x I_y-M_y C_{xy}}{C_{xy}^2-I_x I_y}y$$

- Speciális eset: *x* és *y* főirány (C_{xy}=0)

$$\sigma_z=\frac{N}{A}+\frac{M_y}{-I_y}x+\frac{-M_x}{-I_x}y=\frac{N}{A}+\frac{M_x}{I_x}y-\frac{M_y}{I_y}x$$

Semleges tengely

- Def.: ahol a normálfeszültség nulla:

$$0=\frac{N}{A}+\frac{M_x}{I_x}y-\frac{M_y}{I_y}x$$

  - egy egyenes egyenlete

- Speciális eset: normálerő zérus

$$0=\frac{M_x}{I_x}y-\frac{M_y}{I_y}x \rightarrow y=\frac{M_y I_x}{M_x I_y}x$$

  - Nem párhuzamos a nyomatékvektorral → ferde hajlítás
  - *N* csak eltolja ezt az egyenest

Hajlítás és húzás-nyomás

- Legyen $C_{xy}=0$ és $M_y=0$:

$$\sigma_z = \frac{N}{A} + \frac{M_x}{I_x} y$$

  - A semleges tengely M_x-szel párhuzamos → egyenes hajlítás
  - N és M_x eredője egy nem a súlypontban ható erő → külpontos húzás-nyomás
- Speciális eset: $M_x=M_y=0$:

$$\sigma_z = \frac{N}{A}$$

  - Központos húzás-nyomás

Alakváltozások

- Hooke-tv. alapján:

$$\varepsilon_z = \frac{\sigma_z}{E} = \frac{N}{EA} + \frac{M_x C_{xy} + M_y I_x}{E\left(C_{xy}^2 - I_x I_y\right)} x + \frac{-M_x I_y - M_y C_{xy}}{E\left(C_{xy}^2 - I_x I_y\right)} y$$

  – x és y együtthatói:

$$\kappa_y = \frac{M_x C_{xy} + M_y I_x}{E\left(C_{xy}^2 - I_x I_y\right)} \qquad \kappa_x = \frac{-M_x I_y - M_y C_{xy}}{E\left(C_{xy}^2 - I_x I_y\right)}$$

  görbületek (*y*-, *x*-tengelyre) → a keresztmetszet alakváltozása

  – Egyenes hajlítás esetén:

$$\kappa_x = \frac{M_x}{E I_x}$$

Alakváltozások

- Rúd megnyúlása:

$$\Delta l = \int_l \varepsilon_z \, dl = \int_l \frac{N}{EA} \, dl$$

  - Csak a normálerőtől függ
  - Ha a normálerő állandó és a rúd prizmatikus:

$$\Delta l = \frac{N\, l}{E\, A}$$

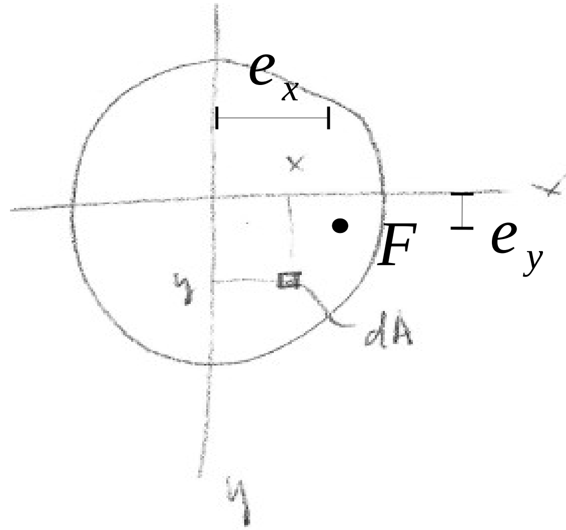
Külpontos húzás-nyomás

- Feladatrészek:
  - Külpontos igénybevételek súlypontba redukálása
  - Súlypontba redukált igénybevételekből feszültségek számítása, szuperponálása
  - Feszültségdiagramok
  - Szélsőértékek keresése
  - Semleges tengely

Semleges tengely, belső mag

- Korábbról:

$$0=\frac{N}{A}+\frac{M_x}{I_x}y-\frac{M_y}{I_y}x$$



- Felhasználva az erő külpontosságát:

$$0=\frac{F}{A}+\frac{F\cdot e_y}{I_x}y-\frac{F\cdot e_x}{I_y}x$$

$$0=\frac{1}{A}+\frac{e_y}{I_x}y-\frac{e_x}{I_y}x$$

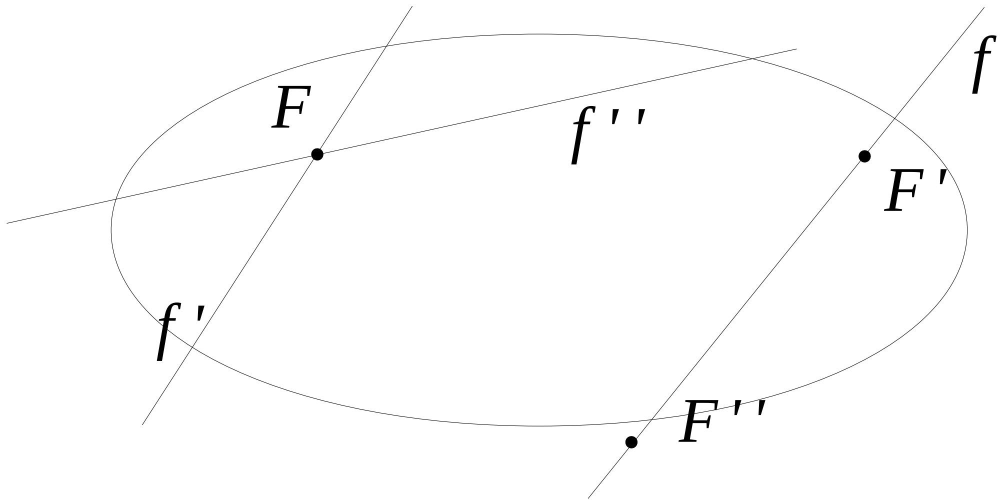
csak az erő helyétől függ, nagyságától nem

Semleges tengely, belső mag

$$0 = \frac{1}{A} + \frac{e_y}{I_x} y - \frac{e_x}{I_y} x$$

- Pólus-antipólus

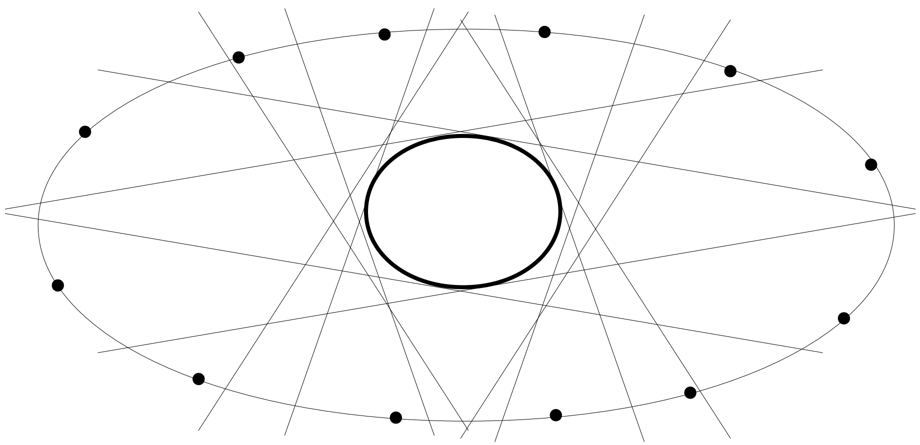
  egy *F* ponthoz tartozó semleges tengely bármely pontján működtetve egy másik erőt az így kapott semleges tengely átmegy az *F* ponton



Semleges tengely, belső mag

Belső mag:

- A keresztmetszet kerületén levő pontokhoz tartozó semleges tengelyek által meghatározott síkidom



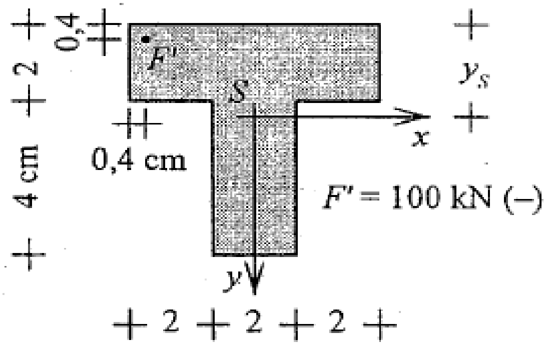
Semleges tengely, belső mag

Belső mag tulajdonságai:

- Erő a belső mag határán: semleges tengely érinti a keresztmetszetet
- Erő a belső magon belül: csak azonos előjelű feszültségek
- Erő a belső magon kívül: egyidejűleg húzó- és nyomófeszültségek

Mintapélda

9. Határozzuk meg a feszültségek szélsőértékeit!



$A = 20\ \text{cm}^2$

$y_S = 2{,}2\ \text{cm}$

$I_x = 57{,}867\ \text{cm}^4$

$I_y = 38{,}667\ \text{cm}^4$

$F' \doteq (N, M_x, M_y)$

(központos erő + nyomatékok):

$M_x = 100 \cdot 0{,}018 = 1{,}8\ \text{kNm}$

$M_y = 100 \cdot 0{,}026 = 2{,}6\ \text{kNm}$

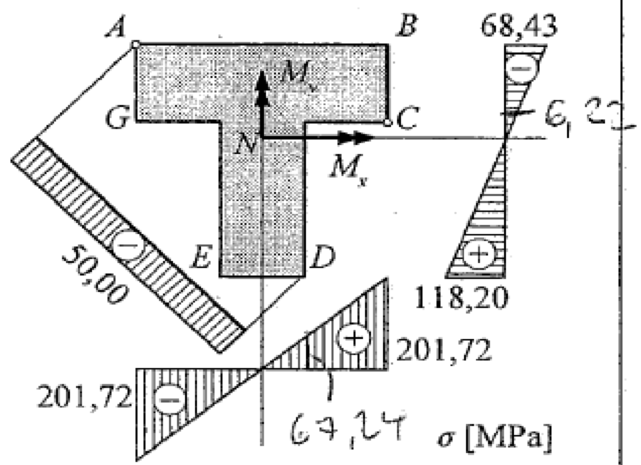
(mint előbb)

A feszültségi szélsőértékek helye változatlan (*A* és *C*), a semleges tengely iránya szintén!

$$\sigma_A = -\frac{100}{20} - \frac{180}{57{,}867} \cdot 2{,}2 - \frac{260}{38{,}667} \cdot 3 = \underline{\underline{-32{,}02\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

$$\sigma_C = -\frac{100}{20} - \frac{180}{57{,}867} \cdot 0{,}2 + \frac{260}{38{,}667} \cdot 3 = \underline{\underline{+14{,}55\ \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}$$

$\sigma_y =$ = 13,54



Megjegyzések:

- a normálerőből származó feszültségi ábra tetszőleges irányban vetíthető,
- a semleges tengely a tiszta hajlításhoz képest önmagával párhuzamosan tolódik el.

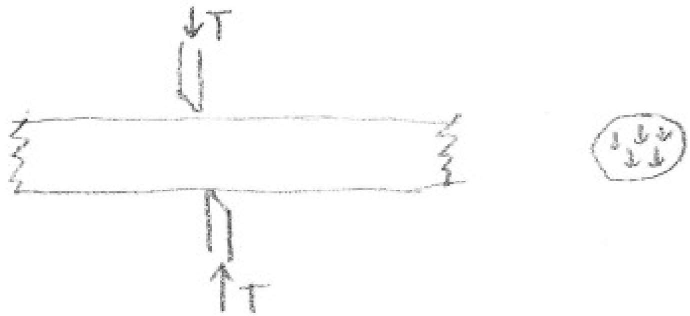
Nyírófeszültségek, igénybevételek

- Nyíróerőből:
  - Tiszta nyírás esetén
  - Hajlítással egyidejű nyírás esetén
- Csavarónyomatékból (csavarásból)
  - Kör(gyűrű) keresztmetszetben
    - Középponttól távolodva lineárisan növekvő
  - Egyéb keresztmetszetben:
    - Gátolatlan csavarás → öblösödés
    - Gátolt csavarás → normálfeszültség

Tiszta nyírás

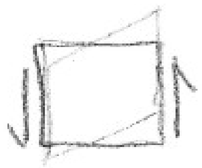
- Feszültség:

$$\tau = \frac{T}{A}$$



- Alakváltozás:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{G\,A}$$



Hajlítással egyidejű nyírás

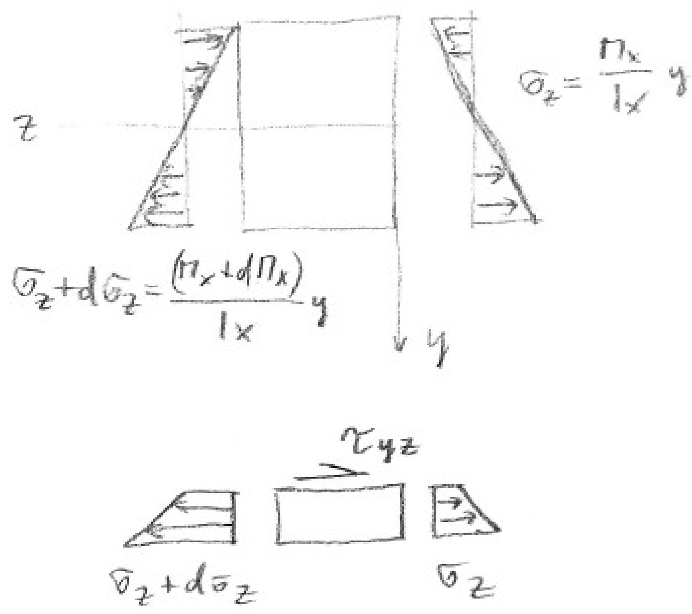
- Nyíróerő → változó hajlítónyomaték → változó normálfeszültség
- Metszet egyensúlya:

$$\sum F_{iz}: \rightarrow \tau_{yz}$$

- Reciprocitás:

$$\tau_{zy} = \tau_{yz} = \frac{S_x T_y}{b I_x}$$

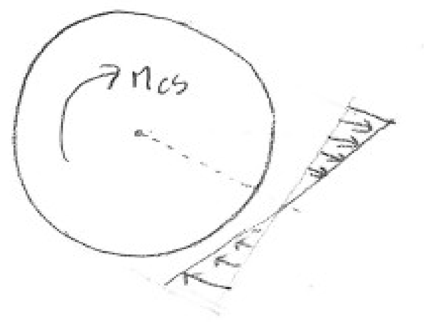
Zsuravszkij-képlet



Kör(gyűrű) csavarása

- Feszültség:

$$\tau_z = \frac{M_{cs}}{I_0} r \text{, ahol } I_0 \text{ a poláris inercia}$$



- Szögtorzulás:

$$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G} = \frac{M_{cs}}{G I_0} r$$

- A keresztmetszet alakváltozása:

$$\kappa_z = \frac{M_{cs}}{G I_0}$$ fajlagos elcsavarodottság