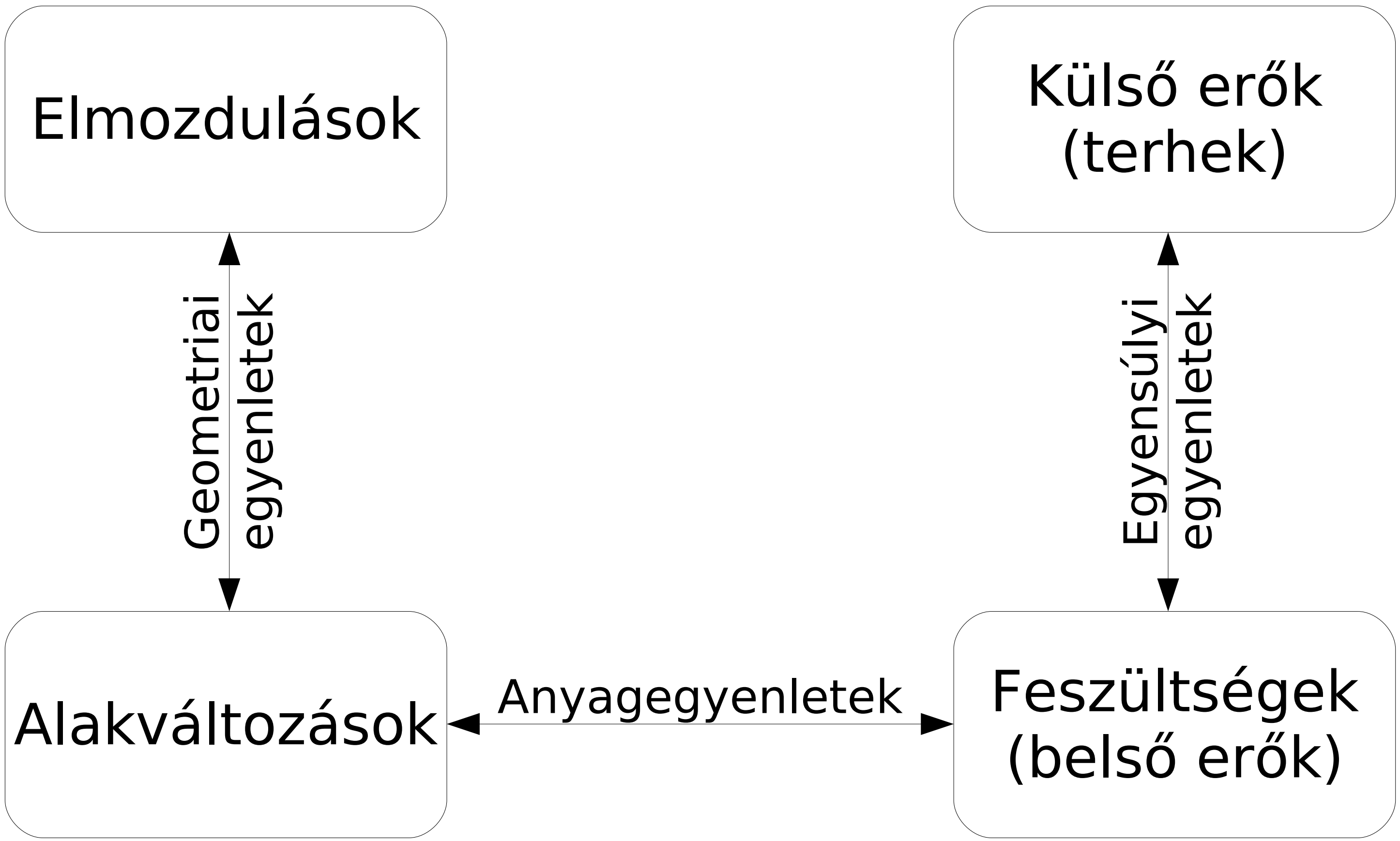
Egészségügyi mérnökképzés

MECHANIKA

I. rész: Szilárd testek mechanikája

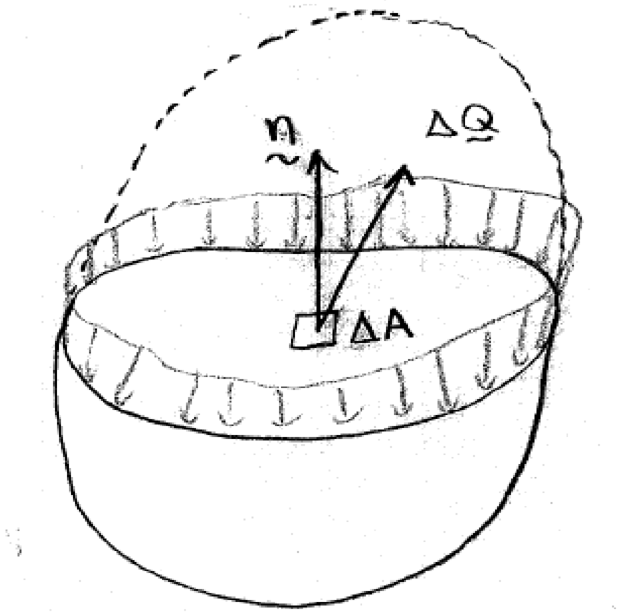
készítette: Németh Róbert

Rugalmasságtanban vizsgált változók, egyenletek



(Mechanikai) Feszültségek I.

- A test részei egyensúlyban vannak. Az ***n*** normálisú elemi felület mentén megoszló erő:



Feszültségvektor:

$$\boldsymbol{p}_n = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta \boldsymbol{Q}}{\Delta A} = \frac{d\boldsymbol{Q}}{dA}$$

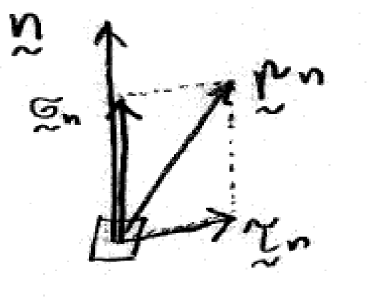
nagysága és iránya is
n irányától függ → tenzor

ΔA-t az eredeti, vagy a megváltozott helyzetben nézzük? (nemlinearitás)

Feszültségek II.

- Feszültségvektor felbontása:

  normál- és nyírófeszültségre



$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n \parallel \boldsymbol{n}, \quad \boldsymbol{\tau}_n \perp \boldsymbol{n}$$

Komponensek számítása:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n})\,\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \tau_{nt}\,\boldsymbol{t}$$

τ nyírófeszültség indexelése:
első (egyetlen) index: felület normálisa
második index (ha van): irány

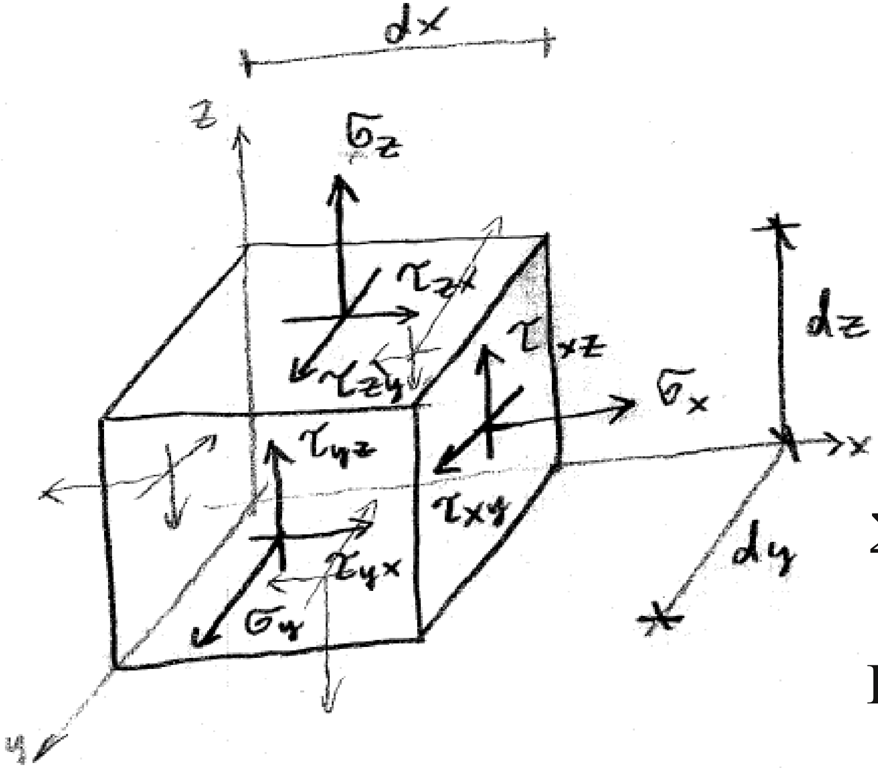
Feszültségek III.

- Keressük egy pontban az *összes irány*hoz tartozó feszültségvektort.
  - Ez a pont *feszültségállapota*.
  - A feszültségállapot leírásának eszköze a *feszültségtenzor*.

- Keressük a test *összes pont*jában a feszültségállapotot → *feszültségmező*
  - Hely (és idő) függvénye

Feszültségállapot és -tenzor I.

- Az elemi hasábra ható feszültségkomponensek:



$$\Sigma M_{ix} \rightarrow (\tau_{yz}\, dx\, dz)\, dy - (\tau_{zy}\, dx\, dy)\, dz = 0$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \rightarrow \text{ reciprocitás elve}$$

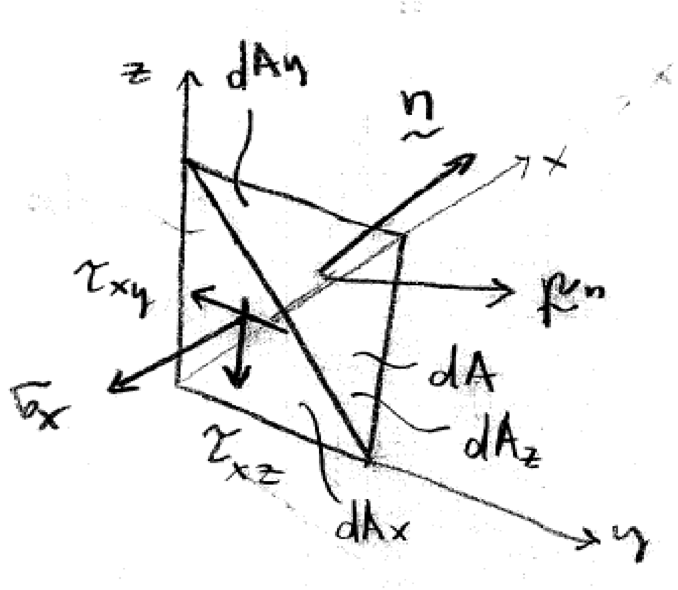
Hasonló elven:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}$$

$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

Feszültségállapot és -tenzor II.

- Az elemi tetraéder egyensúlya:



$$\Sigma F_{ix} : p_{nx}\, dA - \sigma_x\, dA_x - \tau_{yx}\, dA_y - \tau_{zx}\, dA_z = 0$$
$$\Sigma F_{iy} : p_{ny}\, dA - \tau_{xy}\, dA_x - \sigma_y\, dA_y - \tau_{zy}\, dA_z = 0$$
$$\Sigma F_{iz} : p_{nz}\, dA - \tau_{xz}\, dA_x - \tau_{yz}\, dA_y - \sigma_z\, dA_z = 0$$

$$\boldsymbol{p}_n = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_x & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{n} = \begin{bmatrix} dA_x / dA \\ dA_y / dA \\ dA_z / dA \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$

Feszültségállapot és -tenzor III.

- $$\boldsymbol{p}_n = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$$
  ahol $\boldsymbol{F}$ a feszültségtenzor
- a reciprocitás elve miatt $\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{F}$
- a fenti formula koordinátarendszertől független
- az $\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix}$ mátrixos alakra csak a

  vektor komponenseinek számításához van szükség

Feszültségkomponensek

- Komponensek számítása:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = (\boldsymbol{p}_n \cdot \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \left((\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n})\cdot\boldsymbol{n}\right)\boldsymbol{n} = (\boldsymbol{n}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}\,\boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \sigma_n \boldsymbol{n}$$

$$\boldsymbol{\tau}_n = \boldsymbol{p}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n} - \sigma_n \boldsymbol{n}$$

- $\boldsymbol{\tau}_n = \left(\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{n}$
- Mit jelent $\boldsymbol{\tau}_n = 0$? (matematikailag)
- $\mathbf{0} = \left(\boldsymbol{F} - \sigma_n \boldsymbol{E}\right)\cdot\boldsymbol{n} \rightarrow$ hom. lin. egy.rsz., sajátértékfeladat

  $\boldsymbol{n}$ az $\boldsymbol{F}$ tenzor sajátvektora, σ_n az $\boldsymbol{F}$ tenzor sajátértéke.

Mechanikailag: olyan $\boldsymbol{n}$ irány, amerre csak normálfeszültség (σ_n) lép fel.

Feszültségi főirányok, főfeszültségek I.

- Megoldás menete: $det\left(\boldsymbol{F}-\sigma_n \boldsymbol{E}\right)=0 \rightarrow$ harmadfokú egy.
- Három megoldás: $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \rightarrow$ *főfeszültségek*
- A hozzájuk tartozó $\boldsymbol{n}$ vektorok: $\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2, \boldsymbol{n}_3 \rightarrow$ *főirányok*

(A levezetésből következően: $\boldsymbol{\tau}_{n_1}=\boldsymbol{\tau}_{n_2}=\boldsymbol{\tau}_{n_3}=0$)

- A feszültségtenzor mátrixos alakja az $\{\boldsymbol{n}_{1,} \boldsymbol{n}_{2,} \boldsymbol{n}_3\}$ vektorok által meghatározott koordinátarendszerben:

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{feszültségi ellipszoid}$$

Feszültségi főirányok, főfeszültségek II.

- A főfeszültségek a feszültségtenzor és így a pont feszültségállapotának jellemzői, krsz.től függetlenek

- Az ilyen mennyiségek a tenzor *invariánsai*. További invariánsok:

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3,$$
$$I_2 = -(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1),$$
$$I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$$

Feszültségállapotok

- Lineáris → egyetlen nemzérus főfeszültség
- Síkbeli → két nemzérus főfeszültség

$$\sigma_{1,2\,?!}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\ ,\ \mathrm{tg}\,2\alpha_0=\frac{-2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}$$

- Térbeli → három nemzérus főfeszültség

- Hidrosztatikus → $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_3$
- Deviátoros → $\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0\,(=I_1)$

Feszültségtenzorok

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_0 + \boldsymbol{F}_d$$

- Hidrosztatikus (gömbi): $\boldsymbol{F}_0$
- Deviátoros: $\boldsymbol{F}_d$ (tiszta nyírás)

$$\boldsymbol{F}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{F}_d = \begin{bmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{bmatrix}$$

- $\boldsymbol{F}_d$ invariánsai:

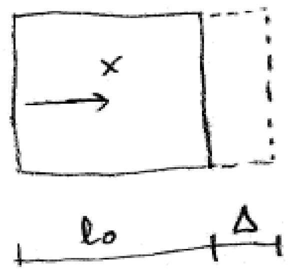
$$J_1 = 0, J_2 = \frac{1}{2}\left(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2\right), J_3 = s_1 s_2 s_3, \text{ stb.}$$

Főfeszültségi trajektóriák

- Minden pontban létezik az egymásra merőleges feszültségi főirány
- Egy olyan görbe, mely minden pontjában az érintő az ottani főirány → *trajektória*
- Végtelen (x2) ilyen vonal van → vonalsereg
- Használat: fotoelasztikus kísérlet

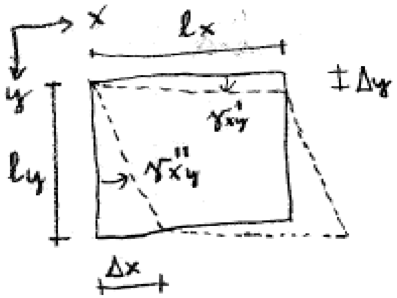
Alakváltozások I.

- Fajlagos nyúlás:



$$\varepsilon_x = \frac{\Delta}{l_0}$$

- Fajlagos szögtorzulás:



$$\gamma_{xy} = \gamma'_{xy} + \gamma''_{xy} = \frac{\Delta y}{l_x} + \frac{\Delta x}{l_y}$$

Alakváltozások II.

- Egy pont eltolódásai, és annak testen belüli változása (elmozdulásgradiens):

$$\boldsymbol{u}(x, y, z) = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0 = \begin{bmatrix} u(x, y, z) \\ v(x, y, z) \\ w(x, y, z) \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = \frac{d\,\boldsymbol{u}(x, y, z)}{d\,\boldsymbol{x}}$$

- Az ***f*** gradiens tartalmazza a merevtest-szerű elfordulásokat is!

Alakváltozások III.

- Bontsuk fel ***f***-t szimmetrikus és antimetrikus tagok összegére:

$$\boldsymbol{f}(x,y,z)=\boldsymbol{A}(x,y,z)+\boldsymbol{f}_m(x,y,z)$$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=\frac{\boldsymbol{f}(x,y,z)+\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}(x,y,z)}{2}\quad,\quad\left(\boldsymbol{f}_m=\frac{\boldsymbol{f}-\boldsymbol{f}^{\mathrm{T}}}{2}\right)$$

- Az ***A*** mátrix az alakváltozás-tenzort ábrázolja.
- Elemei:

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} \varepsilon_x & \frac{\gamma_{yx}}{2} & \frac{\gamma_{zx}}{2} \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} & \varepsilon_y & \frac{\gamma_{zy}}{2} \\ \frac{\gamma_{xz}}{2} & \frac{\gamma_{yz}}{2} & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

Alakváltozástenzor I.

- Alakváltozás-tenzor elemei:

$$\varepsilon_x = \frac{du(x,y,z)}{dx}, \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{du(x,y,z)}{dy} + \frac{dv(x,y,z)}{dx}$$

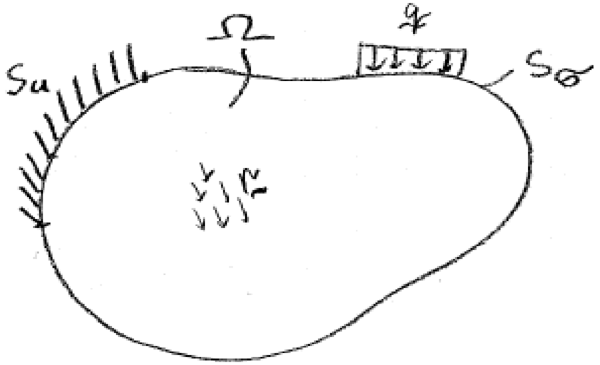
$$\varepsilon_y = \frac{dv(x,y,z)}{dy}, \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{dv(x,y,z)}{dz} + \frac{dw(x,y,z)}{dy}$$

$$\varepsilon_z = \frac{dw(x,y,z)}{dz}, \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = \frac{dw(x,y,z)}{dx} + \frac{du(x,y,z)}{dz}$$

Alakváltozástenzor II.

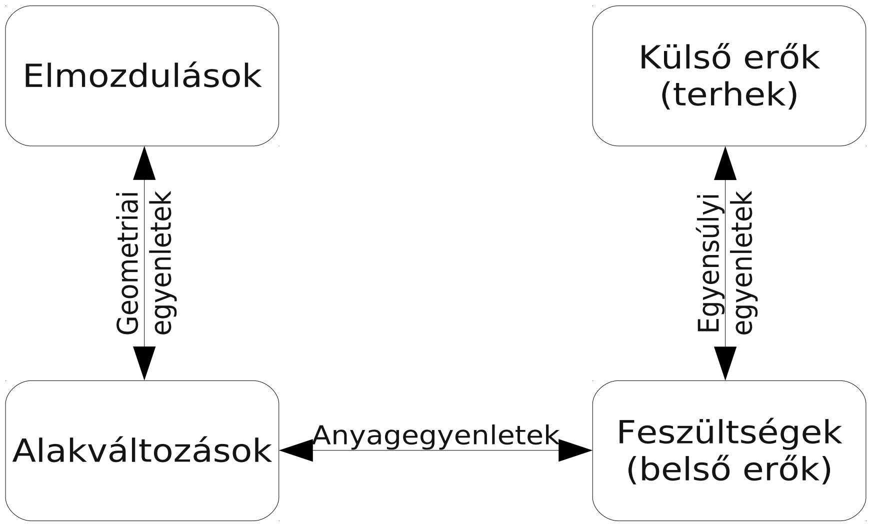
- Tenzor, tehát:
  - Irányfüggőség: (nyúlási) főirányok, főnyúlások
  - Invariánsok
  - Alakváltozásállapotok
    - lineáris, síkbeli, térbeli
    - gömbi, deviátoros

Vizsgált tartomány, mezők, egyenletek



$$u(x,y,z)$$
$$v(x,y,z)$$
$$w(x,y,z)$$

$$p_x(x,y,z)$$
$$p_y(x,y,z)$$
$$p_z(x,y,z)$$

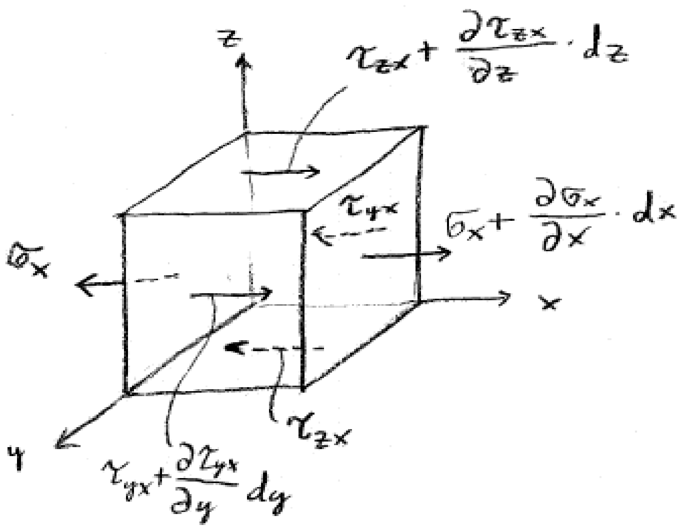


$$\varepsilon_x(x,y,z), \gamma_{xy}(x,y,z)$$
$$\varepsilon_y(x,y,z), \gamma_{yz}(x,y,z)$$
$$\varepsilon_z(x,y,z), \gamma_{zx}(x,y,z)$$

$$\sigma_x(x,y,z), \tau_{xy}(x,y,z)$$
$$\sigma_y(x,y,z), \tau_{yz}(x,y,z)$$
$$\sigma_z(x,y,z), \tau_{zx}(x,y,z)$$

Egyensúlyi egyenletek I.

- Az elemi hasáb egyensúlya egy irányban:



$$\Sigma F_{ix}:$$

$$-\sigma_x \, dy \, dz + \left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy \, dz -$$
$$-\tau_{yx} \, dx \, dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx \, dz -$$
$$-\tau_{zx} \, dx \, dy + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx \, dy +$$
$$+ p_x \, dx \, dy \, dz = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_x = 0$$

- (nyomatéki egyensúly a reciprocitás elvéből)

Egyensúlyi egyenletek II.

- Mezőegyenletek:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + p_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + p_y = 0 \qquad \boldsymbol{L}^* \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + p_z = 0$$

- Peremfeltételek:

Az S perem azon S_σ részén, ahol feszültség van előírva:

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{q}$$

Geometriai egyenletek I.

- Mezőegyenletek:

$$\varepsilon_x(x,y,z)=\frac{du(x,y,z)}{dx},\ \gamma_{xy}(x,y,z)=\frac{du(x,y,z)}{dy}+\frac{dv(x,y,z)}{dx}$$

$$\varepsilon_y(x,y,z)=\frac{dv(x,y,z)}{dy},\ \gamma_{yz}(x,y,z)=\frac{dv(x,y,z)}{dz}+\frac{dw(x,y,z)}{dy}$$

$$\varepsilon_z(x,y,z)=\frac{dw(x,y,z)}{dz},\ \gamma_{zx}(x,y,z)=\frac{dw(x,y,z)}{dx}+\frac{du(x,y,z)}{dz}$$

- Peremfeltételek:

Az S perem azon S_u részén, ahol eltolódás van előírva:

$$\boldsymbol{u}(x_u,y_u,z_u)=\boldsymbol{u}_0$$

Geometriai egyenletek II.

- Az alakváltozások nem vehetők fel tetszőlegesen → *kompatibilitás*:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} \qquad 2\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(+\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Anyagegyenletek I.

- Anyag
  - homogén
  - izotróp
  - lineárisan rugalmas
  - időfüggetlen anyag
- Teher
  - statikus, kvázi-statikus

Anyagegyenletek II.

- Hooke-törvény:

engedékenység

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

merevség

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & & & \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & \frac{-\nu}{E} & & \mathbf{0} & \\ \frac{-\nu}{E} & \frac{-\nu}{E} & \frac{1}{E} & & & \\ & & & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ & & & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & \lambda & \lambda & & & \\ \lambda & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & \lambda & & \mathbf{0} & \\ \lambda & \lambda & \lambda \frac{1-\nu}{\nu} & & & \\ & & & G & 0 & 0 \\ & \mathbf{0} & & 0 & G & 0 \\ & & & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{bmatrix}$$

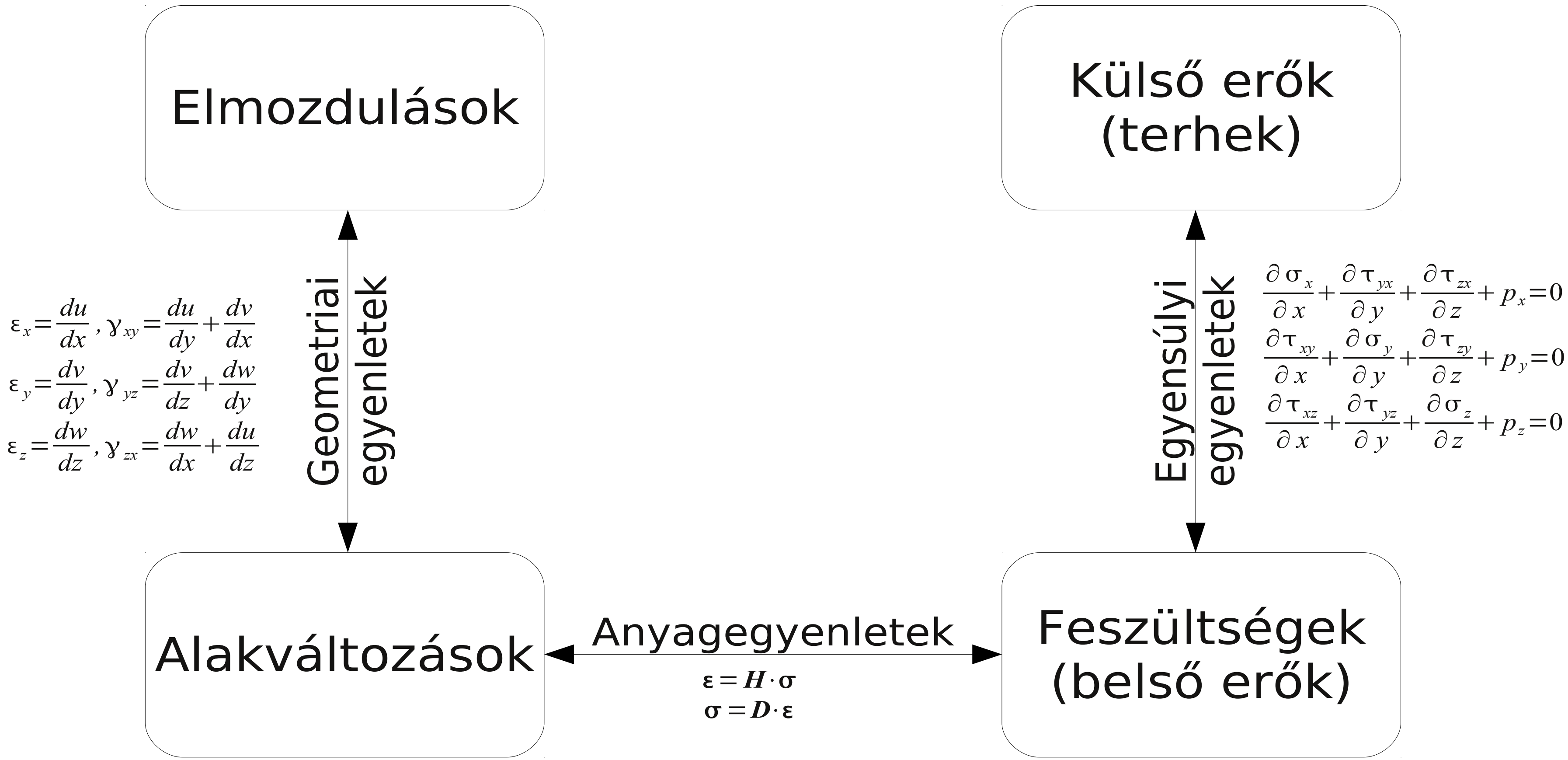
Anyagállandók

- E: rugalmassági modulusz
- G: nyírási modulusz
- ν : Poisson-tényező (harántkontrakció)
- λ : Lamé-féle állandó

Nem függetlenek, pl.:

$$G=\frac{E}{2(1+\nu)} \quad , \quad \lambda=\frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

Egyenletek összefoglalva



Megoldás I. (erőmódszer)

- Elmozdulások kiküszöbölésével (és $\boldsymbol{p}=\mathbf{0}$)

$$(1+\nu)\Delta\sigma_x+\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{xy}+\frac{\partial^2 s}{\partial x\partial y}=0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_y+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{yz}+\frac{\partial^2 s}{\partial y\partial z}=0$$

$$(1+\nu)\Delta\sigma_z+\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}=0 \qquad (1+\nu)\Delta\tau_{zx}+\frac{\partial^2 s}{\partial z\partial x}=0$$

$$\text{ahol}\quad \Delta=\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\quad,\quad s=\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z$$

Beltrami-egyenletek

Megoldás II. (elmozdulásmódszer)

- Feszültségeket, alakváltozásokat kiküszöbölve

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial x}+G\Delta u+p_x=0$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial y}+G\Delta v+p_y=0$$

$$(\lambda+G)\frac{\partial e}{\partial z}+G\Delta w+p_z=0$$

ahol $e=\varepsilon_x+\varepsilon_y+\varepsilon_z \rightarrow$ fajlagos térfogatváltozás

Lamé-egyenletek