Egészségügyi mérnökképzés

MECHANIKA

I. rész: Szilárd testek mechanikája

készítette: Németh Róbert

Munka- és energiatételek I.

- Általánosított erők
- Általánosított elmozdulások

- Statikailag lehetséges erőrendszer
  - egyensúly
- Geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer
  - folytonosság, peremfeltételek

Munka- és energiatételek II.

- Teljes munka: külső + belső $W = W_k + W_b$

$$W_k = \int_e \boldsymbol{f}^T d\,\boldsymbol{e} + \int_S \int_u \boldsymbol{q}^T d\,\boldsymbol{u}\, dS + \int_V \int_u \boldsymbol{g}^T d\,\boldsymbol{u}\, dV$$

$$W_b = -\int_V \int_{\boldsymbol{\varepsilon}} \boldsymbol{\sigma}^T d\,\boldsymbol{\varepsilon}\, dV$$

- Kiegészítő munka: külső + belső $\tilde{W} = \tilde{W}_k + \tilde{W}_b$

$$\tilde{W}_k = \int_f \boldsymbol{e}^T d\,\boldsymbol{f} + \int_S \int_q \boldsymbol{u}^T d\,\boldsymbol{q}\, dS + \int_V \int_g \boldsymbol{u}^T d\,\boldsymbol{g}\, dV$$

$$\tilde{W}_b = -\int_V \int_{\boldsymbol{\sigma}} \boldsymbol{\varepsilon}^T d\,\boldsymbol{\sigma}\, dV$$

Virtuális elmozdulások és a virtuális elmozdulások tétele

- Virtuális elmozdulás: a tényleges elmozdulás egy geometriailag lehetséges variációja
- Tétel: egy statikailag lehetséges erőrendszer bármely virtuális elmozdulásrendszeren végzett munkája 0:

$$\delta W = \boldsymbol{f}^T \delta \boldsymbol{e} + \int_S \boldsymbol{q}^T \delta \boldsymbol{u} \, dS + \int_V \boldsymbol{g}^T \delta \boldsymbol{u} \, dV - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dV = 0$$

- Jelentése egyensúly
- Használata: merev testek egyensúlya

Virtuális erők és a virtuális erők tétele

- Virtuális erők: a tényleges erőrendszer egy statikailag lehetséges variációja
- Tétel: egy geometriailag lehetséges elmozdulásrendszer bármely virtuális erőrendszeren végzett kiegészítő munkája 0:

$$\delta \bar{W} = \boldsymbol{e}^T \delta \boldsymbol{f} + \int_S \boldsymbol{u}^T \delta \boldsymbol{q} \, dS + \int_V \boldsymbol{u}^T \delta \boldsymbol{g} \, dV - \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \delta \boldsymbol{\sigma} \, dV = 0$$

- Jelentése geometriai kompatibilitás
- Használata: elmozdulások számítása

Potenciális energia és szélsőértéktétele

- Teljes potenciál: külső + belső

$$\Pi_k = -W_k \quad , \quad \Pi_b = \frac{1}{2}\int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{\varepsilon})\, dV$$

- Tétel: a geometriailag lehetséges elmozdulás-rendszerek közül az a tényleges, ahol a poten-ciális energiának stacionaritási pontja van.
- Változói elmozdulások (elmozdulásfüggvények) → elmozdulásmódszer
- A változók szerinti (parciális) derivált, illetve variáció eltűnésére felírt egyenletek: egyensúlyi egyenletek

Kiegészítő potenciális energia és minimumtétele

- Teljes kiegészítő potenciál: külső + belső

$$\bar{\Pi} = -\bar{\boldsymbol{e}}^T \boldsymbol{f} - \int_{S_u} \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{q}\, dS - \int_V \bar{\boldsymbol{u}}^T \boldsymbol{g}\, dV + \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{H}\, \boldsymbol{\sigma}\, dV$$

- Tétel: a statikailag lehetséges erőrendszerek közül az a tényleges, ahol a kiegészítő potenciális energiának minimuma van.
- Változói erők → erőmódszer
- A változók szerinti (parciális) derivált, illetve variáció eltűnésére felírt egyenletek: geometriai egyenletek

Stabilitásvizsgálat

- Egyensúlyi helyzet minősítése:

  Mi történik, ha a testet kicsit kitérítjük belőle?

  - Visszatér → stabil egyensúlyi helyzet
  - Tovább mozog → instabil egyensúlyi helyzet
  - Helyben marad → kritikus egyensúlyi helyzet
- A stabilitás vizsgálata:
  - Definíció alapján
  - Potenciális energia vizsgálatával
    - Stabil → minimum
    - Instabil → nyereg, vagy maximum
    - Kritikus → eltűnő második derivált

Anyagmodellek

- Cél a feszültségek és alakváltozások közötti kapcsolat pontosabb leírása
- Időfüggés szerint lehet:
  - Statikus kapcsolat $\sigma(\varepsilon)$
  - Dinamikus kapcsolat $\sigma(\varepsilon, \dot{\varepsilon})$
- Terheléstörténet szerint
  - Rugalmas anyagmodell
  - Rugalmatlan anyagmodell

Rugalmas anyagmodellek I.

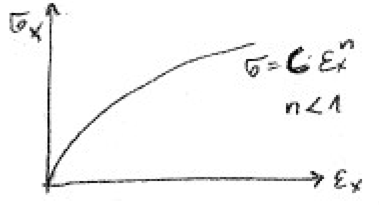
- Rugalmas (elasztikus): egy terhelés-tehermentesítés ciklus után nincsenek maradó alakváltozások
- Általános rugalmas modell:

  a feszültségek az alakváltozások

  függvényében felírhatók:

  $\sigma_x\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\right)$, $\tau_{xy}\left(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\right)$, stb.

- Pl.:

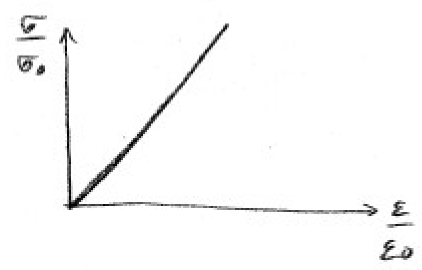


$$\sigma_x\left(\varepsilon_x\right)=C\cdot\varepsilon_x^n$$

Rugalmas anyagmodellek II.

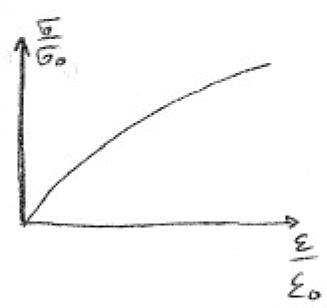
- A kapcsolat esetenként megfordítható
- Pl.: Ramberg-Osgood modell: $$\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_x}{\sigma_0}+\frac{3}{7}\left(\frac{\sigma_x}{\sigma_0}\right)^n$$

$n=1$



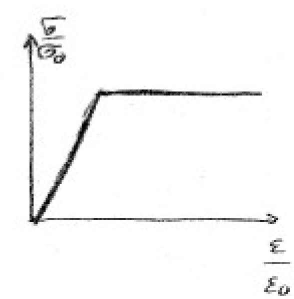
lineáris

$n>1$



nemlineáris

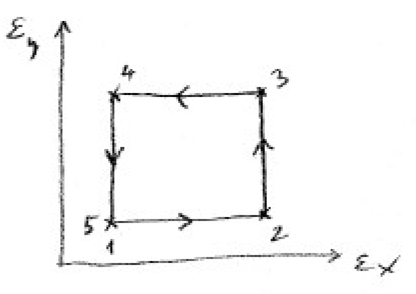
$n\to\infty$



?

Rugalmas anyagmodellek III.

- A számítás során a nemlinearitás miatt nem érvényes az egymásrahalmozás elve → iteratív, ill. növekményes eljárást kell használni
- Többirányú feszültségek vizsgálatánál a függvények felvétele során biztosítani kell, hogy zárt pályán körbehaladva az energiamérleg 0.



Hiperelasztikus anyagmodellek I.

- Energetikai megközelítés

  Alakváltozási energiasűrűség-függvény $\Psi(\boldsymbol{\varepsilon})$

$$\sigma_x = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_x}, \sigma_y = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_y}, \sigma_z = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_z}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \gamma_{xy}}, \tau_{yz} = \tau_{zy} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \gamma_{yz}}, \tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{\partial \Psi(\boldsymbol{\varepsilon})}{\partial \gamma_{xz}}$$

Hiperelasztikus anyagmodellek II.

- Lineárisan rugalmas anyag:

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon} \;\;,\;\; \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\sigma}$$

  C független elemei (anyagi paraméterek):
  - 9x9 = 81
  - Szögtorzulások → 6x6 = 36
  - A kvadratikus alak szimmetriái → 21
- Ortotróp anyag: 3 merőleges szimmetriasík → további zérus elemek ***C***-ben, marad
- Izotróp anyag: 2 anyagi paraméter

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2}\left(\lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 + 2G(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2)\right)$$

Hiperelasztikus anyagmodellek III.

- Az alakváltozási energiasűrűség-függvény változói az alakváltozás-tenzor elemei
  - A tenzor elemei koordinátarendszer-függők, de a pont alakváltozás-állapotát írják le.
  - Felírható az energiafüggvény a tenzor invariánsaival is (más változók, más fv.):

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}) = \Psi(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}) = \hat{\Psi}(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = \bar{\Psi}(I_1', I_2', I_3')$$

- Nagy elmozdulásoknál az elmozdulások, alakváltozások nem lineárisan változnak → más (nemlineáris) alakváltozástenzor kell → más energiafüggvények

Nemlineáris, hiperelasztikus anyagmodellek

- NL-alakváltozások
  - Neo-Hookean:

$$\Psi = \frac{\mu}{2}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + \frac{\kappa}{2}\left(J - 1\right)^2$$

  - Mooney-Rivlin:

$$\Psi = \frac{\mu_1}{2}\left(\bar{I}_1 - 3\right) + \frac{\mu_2}{2}\left(\bar{I}_2 - 3\right) + \frac{\kappa}{2}\left(J - 1\right)^2$$

J - deformációgradiens determinánsa
$\bar{I}_\alpha$ - deviátoros alakváltozástenzor módosított invariánsa

  - Összenyomhatalan anyagok

Képlékeny anyagmodellek I.

Képlékeny:

- terhelés-tehermentesítés más útvonalon
- maradó alakváltozások

- Mikor van az anyag képlékeny állapotban?
  - képlékenységi (folyási) feltétel:

$$f = f\left(\sigma_{ij}, k\right)$$
$$f < 0 \rightarrow \text{ rugalmas}$$
$$f = 0 \rightarrow \text{ képlékeny}$$

  - kifejezhető a főfeszültségekkel is

Képlékeny anyagmodellek II.

- Huber-Mises-Hencky:

  Fémek hidrosztatikus feszültségállapotban nem folynak:

  $$f = \frac{1}{6}\left((\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2\right) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 - \tau_f^2$$

  - a főfeszültségek terében egy henger

- Tresca:

  A középső főfeszültség hatása kisebb, tiszta nyírásra hamarabb folyik meg:

  $$f_1 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 - 4\tau_f^2 \ , \ f_2 = (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 4\tau_f^2 \ , \ f_3 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 - 4\tau_f^2$$

  - hatszög keresztmetszetű hasáb

Képlékeny vizsgálat

- A pont állapota:

$$f<0\ ,\ df\ \text{ tetszőleges} \rightarrow \text{ rugalmas}$$
$$f=0\ ,\ df<0 \rightarrow \text{ rugalmas (tehermentesítés)}$$
$$f=0\ ,\ df=0 \rightarrow \text{ (aktív) képlékeny állapot}$$

- Aktív képlékeny állapotban: $d\,\varepsilon = d\,\varepsilon^e + d\,\varepsilon^p$
  - Drucker-féle posztulátum

$$f(\sigma_{ij}, k)=0 \ \text{ konvex felület}$$
$$d\,\varepsilon^p \ \text{ merőleges az } \ f(\sigma_{ij}, k)=0 \ \text{ felületre}$$

- Növekmények számítása:
  - Prandtl-Reuss egyenletek

Viszkózus anyagok

- Jelenségek
  - kúszás: $\sigma = \text{állandó},\ \varepsilon(t)$
  - ernyedés: $\varepsilon = \text{állandó},\ \sigma(t)$
- A válasz a terhelés módjától és sebességétől is függhet
- Alapvető modellek:
  - rugalmas $\sigma = E\,\varepsilon$
  - képlékeny $\sigma < \sigma_f \rightarrow \varepsilon = 0$
    $\sigma = \sigma_f \rightarrow \dot{\varepsilon} > 0$
  - viszkózus $\sigma = \mu\,\dot{\varepsilon}$

Viszkoelasztikus modellek

- Maxwell-féle v.e. modell (sorba kapcsolva)

$$\sigma^e = \sigma^v = \sigma \qquad \dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{\mu}$$
$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^v$$

  - ernyedést jól írja le, kúszást kevésbé

- Kelvin-Voigt-féle v.e. modell (párhuzamos)

$$\sigma = \sigma^e + \sigma^v \qquad \sigma = E\,\varepsilon + \mu\,\dot{\varepsilon}$$
$$\varepsilon^e = \varepsilon^v = \varepsilon$$

  - kúszás leírására jobb, ernyedésre kevésbé

- Kapcsolt modell
  - legjobb eredmény, legbonyolultabb számítás

További modellek

- Viszkoplasztikus modell

  képlékeny és viszkozus modell összekapcsolása

  - sorba
  - párhuzamosan (Bingham-modell)

- Elaszto-viszkoplasztikus

  - Amint a neve mutatja...