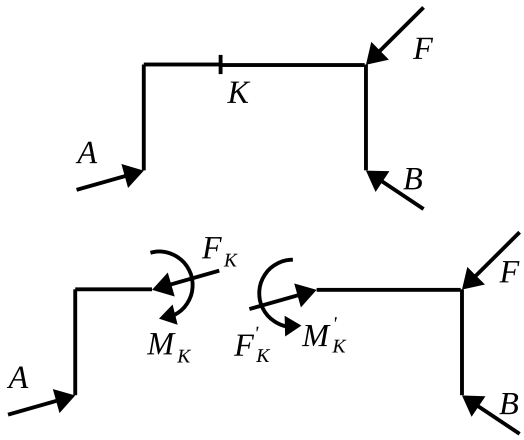
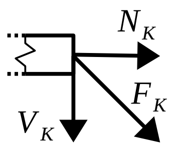
Igénybevételek

A továbbiakban egyensúlyban levő *rúdszerkezetek* belső erőivel, igénybevételeivel foglalkozunk. Ennek során *rúd*nak (esetleg *oszlop*nak vagy *gerendá*nak) azokat a karcsú szerkezeti részeket nevezzük, amelyek egyik irányú kiterjedése lényegesen nagyobb a többinél, ezt az irányt nevezzük hossziránynak. Egy, a hosszirányra merőleges síkkal a rúdból kimetszett síkidomot a rúd *keresztmetszeté*nek nevezzük. A rúd (esetleg görbe) *tengely*ének azt a vonalat nevezünk, mely a keresztmetszetek súlypontján megy keresztül. A keresztmetszetre a tengelyen elhelyezkedő pontja segítségével hivatkozunk. A továbbiakban használt rúdfogalmunk tehát általánosabb a rácsos tartóknál használtnál, így a kapcsolatokat nem korlátozzuk a csuklós kapcsolatra, és a terhek is tetszőleges megoszló, vagy koncentrált terhek lehetnek. Rúdszerkezet alatt az ilyen rudakból összeépített szerkezetet értjük.

Az összetett tartóknál már kimondott elv szerint ha a szerkezet egyensúlyban van, akkor bármely része is egyensúlyban van. A tartórész egyensúlyának vizsgálatához a rá ható külső erőkön kívül az elkülönítéshez szükséges átvágás helyén ébredő belső (reakció-)erőket kell figyelembe vennünk. Vágjuk el a tartót egy keresztmetszetében! Az egyensúly miatt a vágás mindkét oldalán levő részeknek külön-külön egyensúlyban kell lenniük. Tetszőleges teher esetén ez csak úgy lehetséges, hogy az elvágott keresztmetszetnél egy merev befogásnak megfelelő belső reakció-pár keletkezik, azaz a vágás mindkét oldalán egy tetszőleges nagyságú és irányú erő (amely az egyértelműség kedvéért menjen át a keresztmetszet súlypontján) és egy befogási nyomaték. (A hatás-ellenhatás alapján a két oldalra ható erők, illetve nyomatékok egymásnak ellentettjei.) A gyakorlatban e belső reakció erő- és nyomatékvektorát nem az eddig szokásos *xyz*-koordináta-rendszerben bontjuk komponensekre, hanem a hatásuk alapján az alábbiak szerint.



Az erővektornak a tartótengellyel párhuzamos komponensét *normálerő*nek hívjuk és *N*-nel jelöljük (az elnevezés arra utal, hogy a keresztmetszet síkjára merőleges erő a sík normálisával párhuzamos). Az erővektornak a keresztmetszet síkjába eső komponensét *nyíróerő*nek nevezzük és *V*-vel jelöljük (az irodalomban előfordul még *T* és *Q* jelölés is). Térbeli feladatok esetén a nyíróerőt a keresztmetszet síkjában további két komponensre lehet bontani, célszerűen a keresztmetszethez rendelt lokális koordináta-rendszer tengelyeinek irányába eső komponensekre. Síkbeli feladat esetén a síkra merőleges nyíróerő-komponens mindig 0.



A nyomatékvektornak a tartótengely adott pontbeli érintőjével párhuzamos komponensét *csavarónyomaték*nak hívjuk és *T*-vel jelöljük (előfordul az M_{CS} jelölés is). A csavarónyomaték síkbeli feladatoknál 0. A nyomatékvektornak a keresztmetszet síkjába eső komponenseit *hajlítónyomaték*nak nevezzük és M_H -val jelöljük. Térbeli feladatok esetén a hajlítónyomatékot a keresztmetszet síkjában további két komponensre lehet bontani, célszerűen itt is a keresztmetszethez rendelt lokális koordináta-rendszer szerinti komponensekre. Síkbeli feladat esetén mindig 0 a tartó síkjába eső hajlítónyomaték-komponens értéke.

Összegezve: síkbeli feladatoknál egy normál- és egy nyíróerő, valamint egy hajlítónyomaték lesz a keresztmetszet igénybevétele.

Igénybevételek előjele

Annak érdekében, hogy az igénybevételként megadott belső erők iránya alatt mindenki ugyanazt értse, az alábbi előjelszabályokat rögzítjük.

A *normálerő* akkor pozitív, ha a keresztmetszetből kifelé mutat, azaz húzza a keresztmetszetet. A keresztmetszetet nyomó normálerő negatív előjelű, befelé mutat. (Ez a definíció rudaknál korábban már megállapított rúderő-előjel definíciójához hasonló.)

A *csavarónyomaték* akkor pozitív, ha a vektora kifelé mutat a keresztmetszetből, azaz az elvágott keresztmetszetre kívülről ránézve a pozitív csavarónyomaték az óramutató járásával ellenkező irányba forgat.

Térbeli feladatoknál a nyíróerők és a hajlítónyomatékok előjelének definíciója további megfontolásokat igényelne, ezért itt csak a síkbeli feladatokra adunk egy egyértelmű változatot.

A pozitív nyíróerő irányát úgy kapjuk meg, hogy az adott keresztmetszetben a pozitív normálerő irányát az óramutató járásával megegyező irányban 90°-kal elforgatjuk.

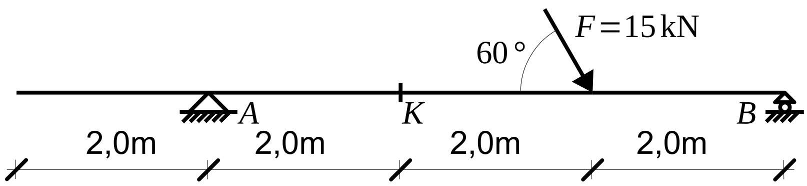
A hajlítónyomaték előjelének eldöntéséhez ki kell jelölnünk a tartótengely egyik oldalát pozitív, másik oldalát negatív oldalnak. A hajlítónyomaték félköríves nyilát kívülről rárajzolva a keresztmetszetre pozitívnak nevezzük azt a hajlítónyomatékot, melynek a pozitív oldalról indítjuk a nyilát. A gyakorlatban a vízszintes, vagy közel vízszintes szakaszokon az alsó oldalt választjuk pozitívnak.

Igénybevételek számítása

Természetesen akár a definíció alapján is számíthatóak az igénybevételek:

Mintapélda – 1

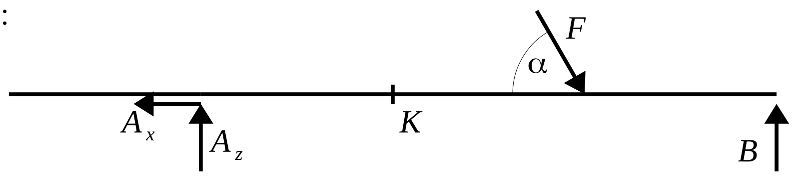
Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit



Megoldás

Első lépés a reakciók kiszámítása.

Elkülönítés:



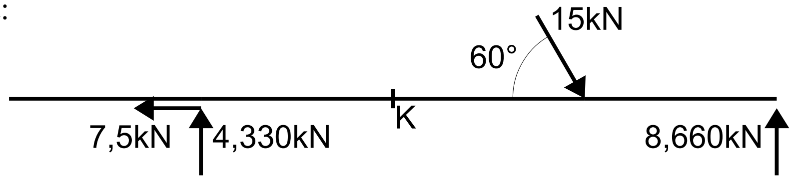
$$\sum M_i^{(A)}:\ -15\sin 60°\cdot 4 + B\cdot 6 = 0 \rightarrow B = 8{,}660\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

$$\sum M_i^{(B)}:\ 15\sin 60°\cdot 2 - A_z\cdot 6 = 0 \rightarrow A_z = 4{,}330\,\text{kN}\,(\uparrow)$$

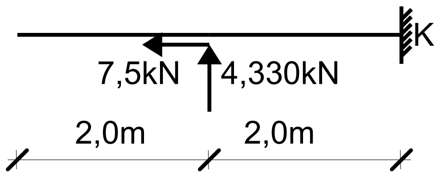
$$\sum F_{ix}:\ 15\cos 60° - A_x = 0 \rightarrow A_x = 7{,}5\,\text{kN}\,(\leftarrow)$$

Ellenőrzés: $\sum F_{iz} = 15\cdot\sin 60° - 4{,}330 - 8{,}660 = 0{,}0004 \approx 0$

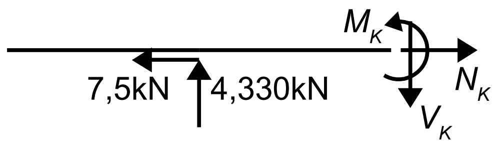
Eredményvázlat:



Igénybevételek számítása a K-tól balra levő tartórész egyensúlya alapján:



Elkülönítés:

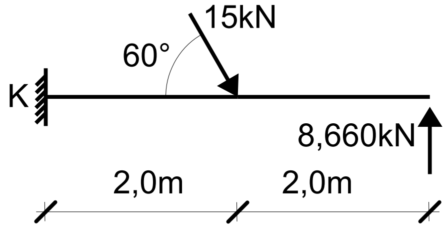


$\sum F_{ix}: -7{,}5+N=0 \rightarrow N=+7{,}5\,\text{kN}$

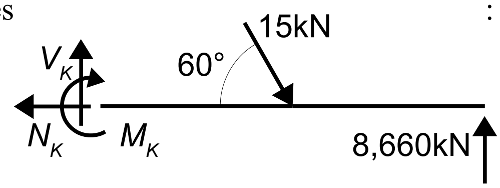
$\sum F_{iz}: -4{,}330+V=0 \rightarrow V=+4{,}330\,\text{kN}$

$\sum M_i^{(K)}: -4{,}330\cdot 2+M=0 \rightarrow M=+8{,}660\,\text{kNm}$

Igénybevételek számítása a K-tól jobbra levő tartórész egyensúlya alapján:



Elkülönítés :



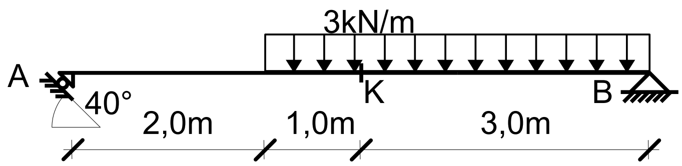
$\sum F_{ix}: -N+15\cos 60°=0 \rightarrow N=+7{,}5\,\text{kN}$

$\sum F_{iz}: -V+15\sin 60°-8{,}660=0 \rightarrow V=+4{,}330\,\text{kN}$

$\sum M_i^{(K)}: -M-15\sin 60°\cdot 2+8{,}660\cdot 4=0 \rightarrow M=+8{,}659\,\text{kNm}$

Gyakorlópélda – 1

Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit!



Megoldás

Egyensúlyi egyenletek alapján a reakciók:

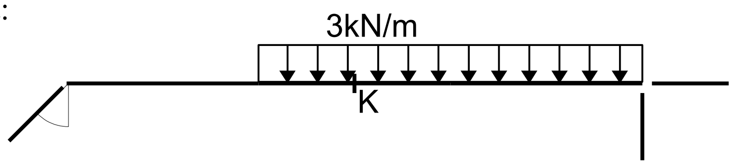
$\sum$: $\rightarrow A=$

$\sum$: $\rightarrow B_z=$

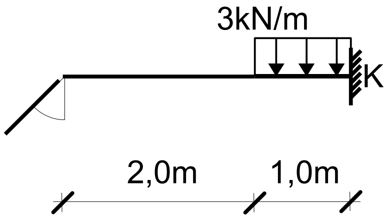
$\sum$: $\rightarrow B_x =$

Ellenőrzés: $\sum$:

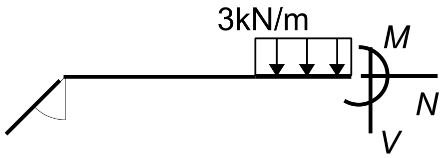
Eredményvázlat:



Igénybevételek számítása a bal oldali tartórész egyensúlyából:



Elkülönítés:

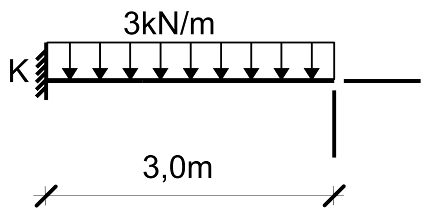


$\sum$: $\rightarrow N =$

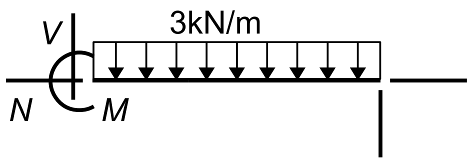
$\sum$: $\rightarrow V =$

$\sum$: $\rightarrow M =$

Igénybevételek számítása a jobb oldali tartórész egyensúlyából:



Elkülönítés:



$\sum$: $\rightarrow N =$

$\sum$: $\rightarrow V =$

$\sum$: $\rightarrow M =$

A fenti példában látható, hogy mindig legalább kétféleképpen számítható egy keresztmetszet bármelyik igénybevétele, és mindegyik számítási módnak azonos eredményt kell szolgáltatnia. Eltérés csak a kerekítések halmozódása miatt lehet, annak nagyságrendjében. A nagyobb eltérés számítási hibára utalhat. A gyakorlatban természetesen elég lesz az egyik módon számolni.

Igénybevételek számítása pontra redukálással

Tegyük fel, hogy egy K keresztmetszet igénybevételeit akarjuk kiszámítani. A keresztmetszet átvágásától egyik, illetve másik irányban levő tartórészre ható külső erők eredőit jelöljük rendre R_1

-gyel és R_2 -vel. Mivel az egész tartó egyensúlyban van, így a két erő egyensúlyban van:

$$(R_1, R_2) \doteq 0 \; .$$

Az egyik, illetve másik oldal egyensúlyát biztosító igénybevételeket jelöljük az I_1 -gyel és I_2 -vel. Az egyensúly miatt:

$$(R_1, I_1) \doteq 0 \text{ és } (R_2, I_2) \doteq 0 \; .$$

A három egyensúlyi kijelentés alapján megállapítható, hogy

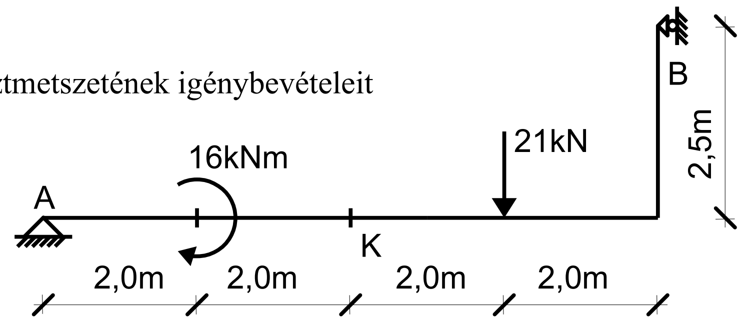
$$I_1 \doteq R_2 \;\; (\text{és } I_2 \doteq R_1) \, ,$$

azaz az egyik (másik) oldalra ható igénybevételek a másik (egyik) tartórészre ható külső erőkkel (azok eredőjével) egyenértékű. Amennyiben az I_1 (vagy I_2) igénybevételeket a keresztmetszetben működő erőkomponensekkel és az ehhez tartozó nyomatékkal fejezzük ki, úgy (az előjelszabály betartásával) egy pontra redukálást kell végrehajtanunk a második (vagy első) részre ható összes külső erőből.

E módszer előnye, hogy a pontra redukálás három egyenletének felírásakor az egyik oldalon csak valamelyik igénybevételi komponens szerepel. Ha az egyenlet felírásakor a pozitív irányt ennek az igénybevételnek az irányába vesszük fel, akkor az egyenlet másik oldalán levő kifejezést kiszámolva nincs szükség az egyenlet átrendezésére a megoldáshoz (azaz kevesebb hibalehetőséget hagyunk magunknak).

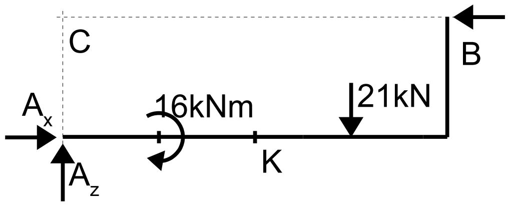
Mintapélda – 2

Számítsuk ki az alábbi tartó K keresztmetszetének igénybevételeit



Megoldás

Elkülönítés:



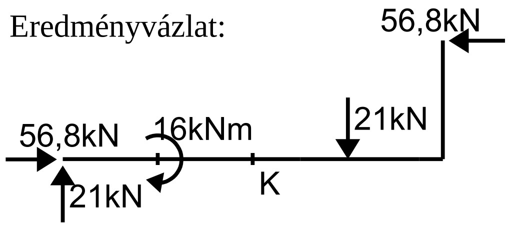
$\sum M_i^{(A)}: -16-21\cdot6+B\cdot2{,}5=0 \rightarrow B=+56{,}8\,\text{kN}(\leftarrow)$

$\sum M_i^{(C)}: -16-21\cdot6+A_x\cdot2{,}5=0 \rightarrow A_x=+56{,}8\,\text{kN}(\rightarrow)$

$\sum F_{iz}: -A_z+21=0 \rightarrow A_z=+21\,\text{kN}(\uparrow)$

Ell.: $\sum F_{ix}: 56{,}8-56{,}8=0$

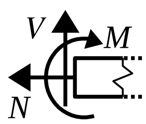
Eredményvázlat:



Igénybevételek a K-tól balra levő tartórészre ható erőkből:

Itt: A_x, A_z, M -ből.

A pozitív irányok:

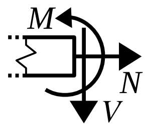


$\sum F_{i\leftarrow}: \;\; N=-56{,}8\,\text{kN}$

$\sum F_{i\uparrow}$: $V=+21\,\mathrm{kN}$

$\sum M_{i\curvearrowright}^{(K)}$: $M=+21\cdot 4+16=+100\,\mathrm{kNm}$

Igénybevételek a K-tól jobbra levő tartórészre ható erőkből:

Itt: F, B -ből. A pozitív irányok: 

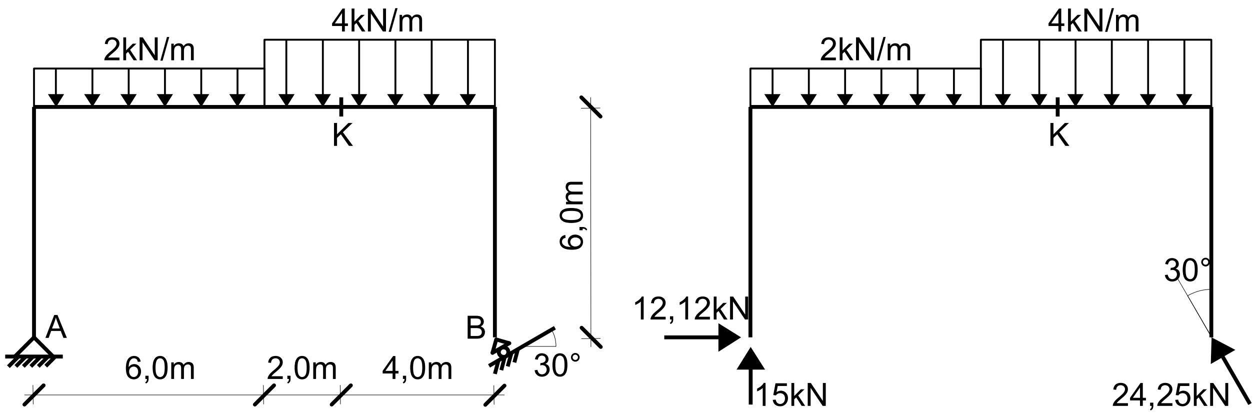
$\sum F_{i\rightarrow}$: $N=-56{,}8\,\mathrm{kN}$

$\sum F_{i\downarrow}$: $V=+21\,\mathrm{kN}$

$\sum M_{i\curvearrowright}^{(K)}$: $M=-21\cdot 2+56{,}8\cdot 2{,}5=+100\,\mathrm{kNm}$

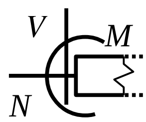
Gyakorlópélda – 2

Számítsuk ki az alábbi tartó reakcióerőinek ismeretében a K keresztmetszet igénybevételeit!



Megoldás

Igénybevételek számítása balról:

Figyelembe veendő erők: Pozitív irányok: 

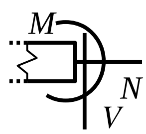
....

$N=$

$V=$

$M=$

Igénybevételek számítása jobbról:

Figyelembe veendő erők: Pozitív irányok: 

....

$N=$

$V=$

$M=$

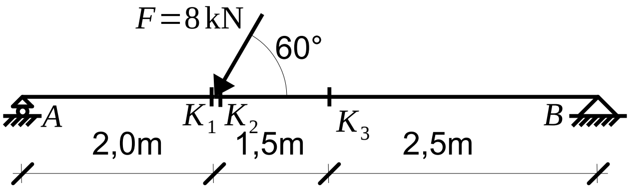
Ha eddig nem vettük észre, most mindenképpen feltűnhetett, hogy az igénybevételek számításánál nincs jelentősége annak, hogy egyes erők terhek, vagy reakcióerők voltak-e. A számítás mindig a keresztmetszettől jobbra, vagy balra levő tartórészre ható összes külső erő alapján történt.

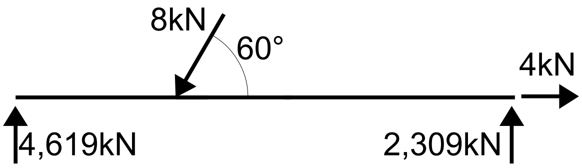
Igénybevételek számítása egy másik keresztmetszet igénybevételeiből

Ha a tartót elvágjuk egy keresztmetszetben és ott működtetjük az igénybevételnek megfelelő erőket és nyomatékot, akkor a kapott két tartórész külön-külön egyensúlyban lesz. Az egyensúlyban levő tartó bármely részének a keresztmetszetének igénybevételeit csak a részre ható erők befolyásolják, így azt az alapján is számíthatjuk.

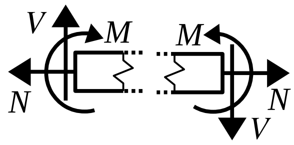
Mintapélda – 3

Számítsuk ki az F erő támadáspontjától végtelen kis távolságban balra levő K_1 keresztmetszet igénybevételeit, majd azt felhasználva az F erő támadáspontjától végtelen kis távolságra jobbra levő K_2 és a jelölt K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!





Megoldás

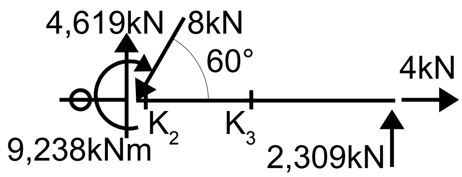


K_1 igénybevételei (célszerűen balról):

$N_1 = 0\,\text{kN}, \quad V_1 = +4{,}619\,\text{kN}, \quad M_1 = +4{,}619 \cdot 2 = +9{,}238\,\text{kNm}$

Ezek berajzolhatók a jobb oldali tartórészre ható igénybevételekként (most a számítás során kapott irányokkal megegyezően, de általában az előjelek alapján az igénybevételek pozitív definíciójának megfelelően határozhatjuk meg az irányokat).

K_2 igénybevételei (balról)



(figyelembe veendő: K_1 igénybevételei és az F erő)

$N_2 = 0 + 8\cos 60° = +4\,\text{kN}$

$V_2 = +4{,}619 - 8\sin 60° = -2{,}309\,\text{kN}$

$M_2 = 9{,}238 + 4{,}619 \cdot 0 - 8\sin 60° \cdot 0 = +9{,}238\,\text{kNm}$

K_3 igénybevételei (balról)

(figyelembe veendő: K_1 igénybevételei és az F erő)

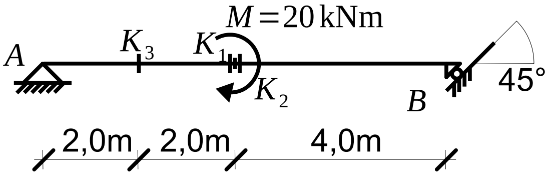
$N_3 = 0 + 8\cos 60° = +4\,\text{kN}$

$V_3 = +4{,}619 - 8\sin 60° = -2{,}309\,\text{kN}$

$M_3 = 9{,}238 + 4{,}619 \cdot 1{,}5 - 8\sin 60° \cdot 1{,}5 = +5{,}774\,\text{kNm}$

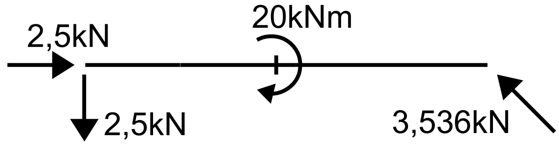
Gyakorlópélda – 3

Számítsuk ki az M nyomaték támadáspontjától végtelen kis távolságban balra levő K_1 keresztmetszet igénybevételeit, majd azt felhasználva az M nyomaték támadáspontjától végtelen kis távolságra jobbra levő K_2 és a jelölt K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!



Megoldás

A reakciók (a részleteket most mellőzzük):

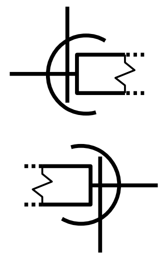


K_1 igénybevételei (tetszőleges irányból):

$N_1 =$

$V_1 =$

$M_1 =$

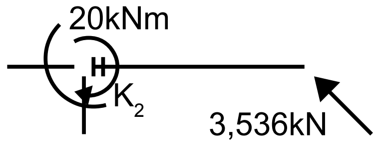


Rajzoljuk fel a keresztmetszet-csonkokra az előjelek alapján a tényleges igénybevétel-irányokat!

K_2 igénybevételei (mivel K_1 igénybevételeit fel kell használnunk, ezért balról):

Rajzoljuk be a K_1 keresztmetszet igénybevételeinek valós irányát!

Mit kell figyelembe venni? ....



$N_2 =$

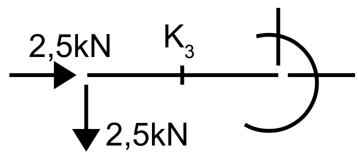
$V_2 =$

$M_2 =$

K_3 igénybevételei (mivel K_1 igénybevételeit fel kell használni, így jobbról):

Rajzoljuk be a K_1 keresztmetszet igénybevételeinek valós irányát!

Mit kell figyelembe venni? ....



$N_3 =$

$V_3 =$

$M_3 =$

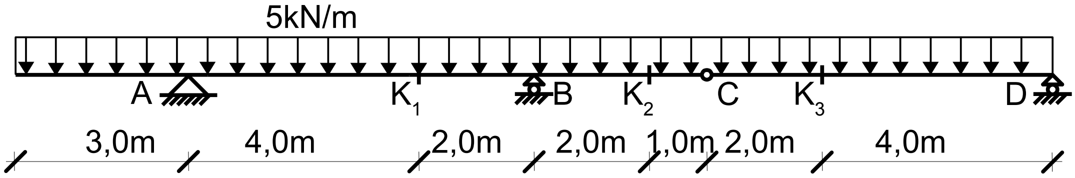
Tanulságok: koncentrált erő támadáspontjának a két oldalán az erő vetületének megfelelő nagyságú ugrás van a normál-, illetve nyíróerő értékében, míg koncentrált nyomaték támadáspontjának két oldalán a nyomaték értékének megfelelő nagyságú ugrás van a hajlítónyomaték értékében, a többi igénybevétel azonban nem változik.

Összetett tartó keresztmetszetének igénybevételei

Összetett szerkezet esetén az igénybevételek számításához még több lehetőségünk van, mint egyszerű tartók esetén volt. Ennek oka, hogy az egész szerkezet egyensúlya mellett annak bármely része is egyensúlyban kell, hogy legyen, ezért bármely, a keresztmetszetet tartalmazó szerkezeti résszel is számolhatunk, ha a rá ható belső reakciókat is figyelembe vesszük. Ezen felül minden ilyen rész, vagy az egész szerkezet használata esetén számolhatunk "jobbról", vagy "balról", azaz legalább négy módon tudjuk bármely keresztmetszet igénybevételeit számítani. A gyakorlatban viszont továbbra is igaz, hogy elég egyetlen módon számolni, ezért később az első lépés később mindig az lesz, hogy erre a lehető legegyszerűbb módszert találjuk meg.

Mintapélda – 4

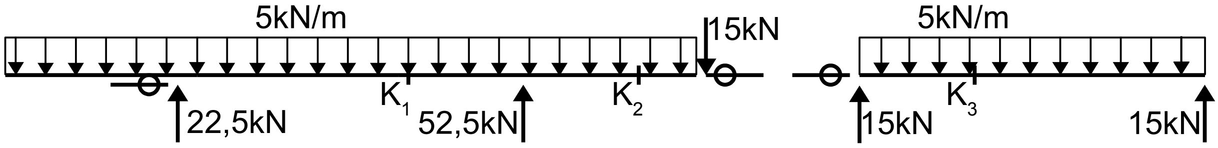
Számítsuk ki a K_1, K_2, K_3 keresztmetszetek igénybevételeit!



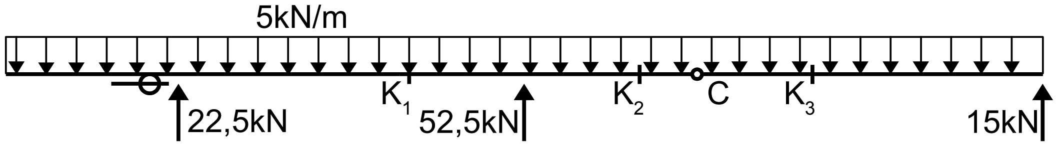
Megoldás

Ez a tartó egy Gerber-tartó. Az erőjellegű mennyiségek számításának menete: először a befüggesztett rész, utána a fix rész. Ezt figyelembe véve a reakciók számításának eredményvázlatai:

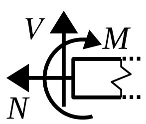
A két elkülönített tartórészre:

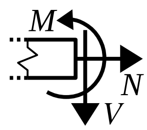


Az egész szerkezetre:



A tartó tengelye vízszintes, ezért minden normálerő vízszintes, ugyanakkor az összes külső erő függőleges, ezért a normálerők számítására szolgáló képletekbe mindig zérus vetületek kerülnének, így: $N_1 = N_2 = N_3 = 0$. A továbbiakban csak a nyíróerőkkel és hajlítónyomatékokkal foglalkozunk.





K_1 km. elkülönített rész balról:

$V_1 = 22{,}5 - 5 \cdot 7 = -12{,}5\ \text{kN}$

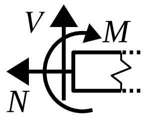
$M_1 = 22{,}5 \cdot 4 - (5 \cdot 7) \cdot 3{,}5 = -32{,}5\ \text{kNm}$

K_1 km. elkülönített rész jobbról:

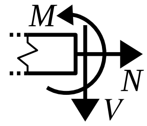
$V_1 = 15 + 5 \cdot 5 - 52{,}5 = -12{,}5\ \text{kN}$

$M_1 = -15 \cdot 5 - (5 \cdot 5) \cdot 2{,}5 + 52{,}5 \cdot 2 = -32{,}5\ \text{kNm}$

K_1 km. teljes tartó balról:
$V_1 = 22{,}5 - 5\cdot 7 = -12{,}5\,\mathrm{kN}$
$M_1 = 22{,}5\cdot 4 - (5\cdot 7)\cdot 3{,}5 = -32{,}5\,\mathrm{kNm}$



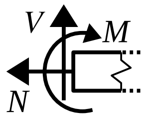
K_1 km. teljes tartó jobbról:
$V_1 = -15 + 5\cdot 11 - 52{,}5 = -12{,}5\,\mathrm{kNm}$
$M_1 = 15\cdot 11 - (5\cdot 11)\cdot 5{,}5 + 52{,}5\cdot 2 = -32{,}5\,\mathrm{kNm}$



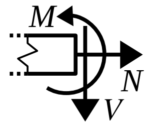
K_2 km. elkülönített rész balról:
$V_2 = 22{,}5 - 5\cdot 11 + 52{,}5 = +20\,\mathrm{kN}$
$M_2 = 22{,}5\cdot 8 - (5\cdot 11)\cdot 5{,}5 + 52{,}5\cdot 2 = -17{,}5\,\mathrm{kNm}$

K_2 km. elkülönített rész jobbról:
$V_2 = 15 + 5\cdot 1 = +20{,}0\,\mathrm{kN}$
$M_2 = -15\cdot 1 - (5\cdot 1)\cdot 0{,}5 = -17{,}5\,\mathrm{kNm}$

K_2 km. teljes tartó balról:
$V_1 = 22{,}5 - 5\cdot 11 + 52{,}5 = +20\,\mathrm{kN}$
$M_1 = 22{,}5\cdot 8 - (5\cdot 11)\cdot 5{,}5 + 52{,}5\cdot 2 = -17{,}5\,\mathrm{kNm}$



K_2 km. teljes tartó jobbról:
$V_2 = -15 + 5\cdot 7 = +20\,\mathrm{kNm}$
$M_2 = 15\cdot 7 - (5\cdot 7)\cdot 3{,}5 = -17{,}5\,\mathrm{kNm}$



K_3 km. elkülönített rész balról:
$V_3 = 15 - 5\cdot 2 = +5\,\mathrm{kN}$
$M_3 = +15\cdot 2 - (5\cdot 2)\cdot 1 = +20\,\mathrm{kNm}$

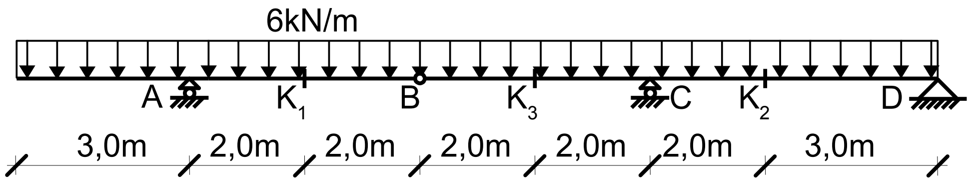
K_3 km. elkülönített rész jobbról:
$V_3 = -15 + 5\cdot 4 = +5\,\mathrm{kN}$
$M_3 = +15\cdot 4 - (5\cdot 4)\cdot 2 = +20\,\mathrm{kNm}$

K_3 km. teljes tartó balról:
$V_3 = 22{,}5 - 5\cdot 14 + 52{,}5 = +5\,\mathrm{kN}$
$M_3 = +22{,}5\cdot 11 - (5\cdot 14)\cdot 7 + 52{,}5\cdot 5 = +20\,\mathrm{kNm}$

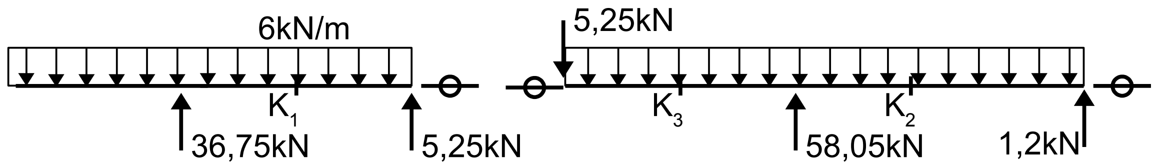
K_3 km. teljes tartó jobbról:
$V_3 = -15 + 5\cdot 4 = +5\,\mathrm{kN}$
$M_3 = +15\cdot 4 - (5\cdot 4)\cdot 2 = +20\,\mathrm{kNm}$

Gyakorlópélda – 4

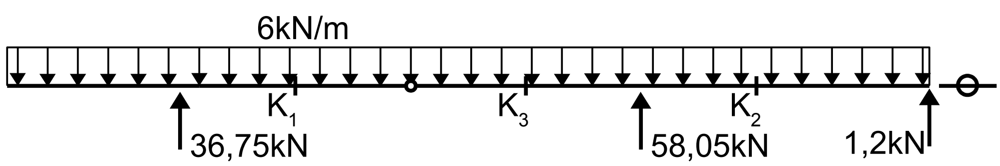
Számítsuk ki a K_1, K_2, K_3 keresztmetszetek igénybevételeit a reakciók ismeretében!



Eredményvázlatok testenként:



Az egész szerkezetre ható összes külső erő:



Megoldás

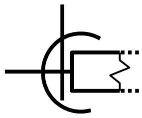
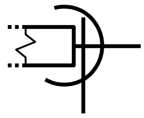
Normálerők számítása

Vízszintes tengelyű tartón milyen irányú erőkből származik normálerő?

....

Ez alapján: $N_1 =$ $N_2 =$ $N_3 =$

A nyíróerők és a hajlítónyomatékok számítása

Potitív előjelek balról történő számításnál:  , jobbról történő számításnál: 

K_1 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_1 =$

$M_1 =$

jobbról: $V_1 =$

$M_1 =$

K_1 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_1 =$

$M_1 =$

jobbról: $V_1 =$

$M_1 =$

K_2 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_2 =$

$M_2 =$

jobbról: $V_2 =$

$M_2 =$

K_2 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_2 =$

$M_2 =$

jobbról: $V_2 =$

$M_2 =$

K_3 km. elkülönített rész alapján:

balról: $V_3=$

$M_3=$

jobbról: $V_3=$

$M_3=$

K_3 km. teljes tartó alapján:

balról: $V_3=$

$M_3=$

jobbról: $V_3=$

$M_3=$

Mint láthattuk a fenti példákban, egy keresztmetszet igénybevételeinek számításához mindig több lehetőség is van. A célszerű eljárás itt is az, hogy először végiggondoljuk, milyen egyenletek írhatók fel, azaz melyik erőkből lehet számítani az igénybevételeket, majd a lehetséges formulák közül a lehető legegyszerűbben és legbiztosabban kiszámolhatót írjuk fel. E döntésnél két (néha egymásnak ellentmondó) dologra kell figyelnünk. Egyrészt arra, hogy a rövidebb kifejezés gyorsabban számolható, másrészt arra, hogy ha kevesebb általunk korábban kiszámított mennyiséget használunk fel, akkor kisebb az esetleges korábbi hibák továbbgörgetésének esélye. Ezekből az elvekből levezethető néhány ökölszabály:

- Konzolon (akár merev befogással, akár kéttámaszú tartóként van megtámasztva) az igénybevételeket mindig kívülről számoljuk (azaz a reakciók kiszámítása nélkül).
- Ha egy tartóvégen (ami lehet a fizikai vége, vagy az összetett tartó egy testének a környezetéhez egy csuklóval kapcsolódó vége) ismerjük a tartóvégre ható koncentrált erők (esetleg nyomatékok) értékét, akkor azokból közvetlenül számolható a tartóvégi igénybevétel (ami ráadásul gyakran nulla), csak az előjelet kell eldöntenünk.

Igénybevételi ábrák

Az előző órán láthattuk, hogyan számíthatók egy egyensúlyban levő szerkezet bármely keresztmetszetének igénybevételei. Egymástól kis távolságban levő keresztmetszetek igénybevételeinek kiszámításával közelítő képet kaphatunk az igénybevételeknek a tartó hossza mentén való alakulásáról, azonban jobb lenne egy olyan módszer, mellyel *minden* keresztmetszet igénybevételeit felírhatnánk. Ezt ugyan megtehetnénk egy tartótengely mentén értelmezett ívhosszparaméter segítségével szakaszonként felírt függvényekkel is, de sokkal áttekinthetőbb eredményre vezet, ha ezeket a függvényeket a tartó tengelyére rajzoljuk fel. Mivel síkbeli feladatnál háromféle igénybevétel lehetséges, ezt a három ábrát összefoglalva igénybevételi ábráknak nevezzük. (Külön-külön normálerőábra, nyíróerőábra és hajlítónyomatéki ábra a nevük.) Az ábrákon egy tetszőleges keresztmetszetet kiválasztva az ottani értéket a tartó tengelyére merőlegesen mérjük, a tengely pozitív oldalának azt tekintjük, amelyiket a hajlítónyomaték pozitív definíciójához is használtunk.

A fenti követelményeknek megfelelő igénybevételi ábrákat természetesen megrajzolhatnánk a definíció segítségével is, azaz az igénybevételi függvények szakaszonkénti felírásával és ábrázolásával, de ezt inkább elkerüljük. Ehelyett a szokásos eljárás az, hogy a terhelés függvényében azonosítjuk az egyes szakaszokon az ábrák jellegét, és a jellegnek megfelelő számú igénybevétel kiszámításával ábrázoljuk azokat.

Ilyen viselkedési forma lehet: a konstans érték, amikor az ábrázolt függvény a tartó tengelyével párhuzamosan halad; a lineáris szakasz, melyet a két végpontjában kiszámított érték határozhat meg, melyeket egy egyenessel kötünk össze; a másodfokú parabola, melynek megrajzolásához a két végponti értékén kívül még egy adatra lesz szükségünk.

Terhek és igénybevételek közötti összefüggés

Ha egy (végtelenül) rövid tartószakaszt elkülönítünk és a két keresztmetszetére az ott működő igénybevételeket felrajzoljuk, akkor e darab egyensúlyi egyenleteiből azt a megállapítást tehetjük, hogy a hajlítónyomaték hosszmenti első deriváltja a nyíróerővel arányos, a nyíróerő hosszmenti deriváltja a tartó tengelyére merőleges megoszló erő intenzitásával arányos, a normálerő hosszmenti deriváltja a tartó tengelyével párhuzamos megoszló erő intenzitásával arányos. E három összefüggés a biztos pont, amiből az alábbi következtetések levezethetők, de direkt használatuk a koncentrált erők és nyomatékok miatt kevésbé egyértelmű. Ráadásul mi visszafelé szeretnénk megtalálni a teherfüggvényből az igénybevételeket, ehhez azonban nem elegendő a sorrend felcserélése után a derivált helyett integrált mondani, az a bizonyos +C is szakaszonként illesztendő. A differenciális kapcsolatok hatása, hogy nagyobb nyíróerőhöz meredekebb, kisebb nyíróerőhöz laposabb hajlítónyomatéki ábra tartozik, zérus nyíróerő esetén a nyomatéki ábra érintője vízszintes. Hasonlóképpen, nagyobb intenzitású megoszló erő alatt meredekebben, kisebb intenzitású megoszló erő alatt laposabban változik a nyíróerőábra.

A gyakorlatban legtöbbször használt kapcsolatokat az alapján is ki tudjuk jelenteni, ha végiggondoljuk, milyen egyenletből számítanánk egy kiválasztott igénybevételt. Ezt vezetjük végig az alábbiakban.

Azokon az egyenes szakaszokon, ahol nem hat külső erő a tartóra, a normál- és a nyíróerőábra *konstans* értékű lesz. (Ennek oka, hogy a szakasz két keresztmetszetében azonos oldalról számolva e két igénybevételt ugyanazoknak az erőknek ugyanolyan irányú vetületeit vesszük figyelembe ugyanolyan előjelszabály mellett.)

Azokon az egyenes szakaszokon, ahol nem hat külső erő a tartóra, a hajlítónyomatéki ábra lineáris lesz. (Ennek oka, hogy a szakasz két keresztmetszetében azonos oldalról számolva a hajlítónyomatékot ugyanabból az erőrendszerből ugyanannak az eredő erőnek kellene kiszámolnunk a nyomatékát ugyanolyan előjelszabállyal a két keresztmetszetre. E számítás során az erő karja változna csak. Hasonló háromszögek alapján belátható, hogy e változás a két keresztmetszet távolságával lineárisan arányos.)

Koncentrált nyomaték keresztmetszetében a normál- és nyíróerő számítása ugyanazon vetületi egyenletek alapján történik, így azokban nincs változás. A hajlítónyomatékot ugyanazon irányból számolva ugyanazokat az erőket és nyomatékokat kellene figyelembe vennünk, egyetlen kivételt a koncentrált nyomaték jelentene, ami attól függően kerül be a számításba, hogy a működés keresztmetszetétől végtelen kis távolságra jobbra, vagy balra levő keresztmetszetet számoljuk. Emiatt a hajlítónyomatéki ábrában egy ugrás lesz (de más változás a nyomatéki teher miatt nem).

Koncentrált erő keresztmetszetében a normál- és nyíróerő számítása ugyanazon vetületi egyenletek alapján történhet ugyanazon oldalra ható erők alapján. Az egyetlen kivétel a koncentrált erő (egészen pontosan annak normál- és nyíróerő irányú vetülete), mely attól függően kerül be a számításba, hogy az erő támadáspontjától végtelen kis távolságban egyik, vagy másik oldalon levő keresztmetszet igénybevételeit számoljuk. Emiatt ezen igénybevételi ábrákban a koncentrált erő vetületének megfelelő nagyságú ugrás lesz a keresztmetszetben. A hajlítónyomaték számításakor a az erő támadáspontjának két oldalán ugyanarra a geometriai pontra írhatjuk fel ugyanazon előjelszabály alapján a nyomatéki egyenletet. E pont körül a koncentrált erő nem forgat, míg a többi figyelembe vett erő és nyomaték hatása ugyanakkora, így a hajlítónyomaték értékében nem lesz változás a keresztmetszet alatt. (Az ábra azonban megtörik, ha a nyíróerő ábrájában ugrás van.)

Egyenletesen megoszló erő esetén különböztessük meg a tartó tengelyével párhuzamos és az arra merőleges komponenseket. A párhuzamos komponens a normálerőt befolyásolja, méghozzá lineárisan, hiszen a tartó tengelye mentén haladva a vetületi egyenletben figyelembe veendő megoszló erő hossza lineárisan változik. A másik két igénybevételt ez a teher nem befolyásolja.

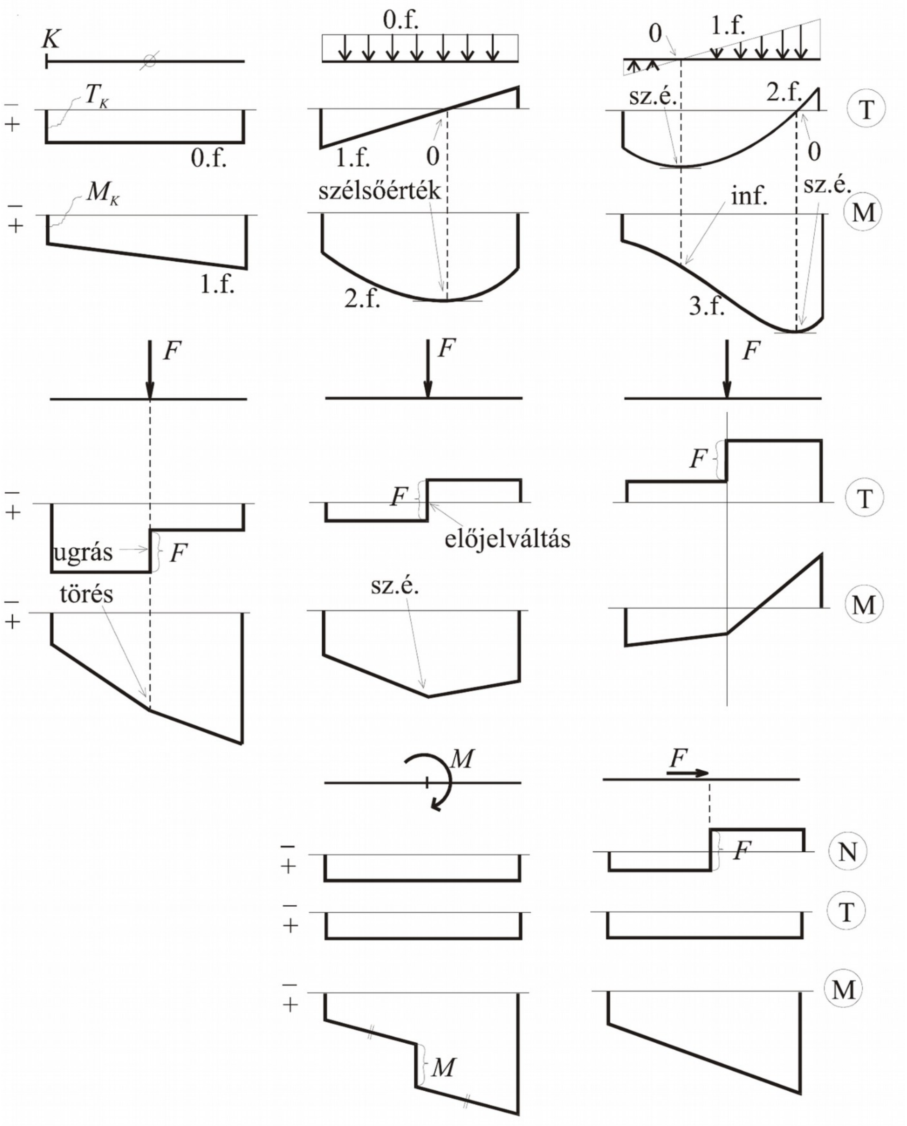
A tartó tengelyére merőleges egyenletesen megoszló erő esetén a tengely mentén haladva a nyíróerő számítására szolgáló vetületi egyenletben a haladással arányosan kell egyre több, vagy kevesebb megoszló erőt figyelembe venni, így annak hatása és ezáltal a nyíróerő-ábra lineárisan változik. A hajlítónyomaték számításakor a megoszló erő lineárisan változó nagyságú eredőjének a karja is lineárisan változik a hely függvényében, az e kettő szorzataként kapott hajlítónyomaték tehát egy másodfokú parabola lesz. A másodfokú parabolát a két végpontján kívül az ún. belógásával adjuk meg, mely a két végpontot összekötő egyeneshez képesti legnagyobb eltérést jelenti a szakasz közepén a tartó tengelyére merőleges irányban mérve. Értéke $ql^2/8$ ahol q a tengelyre merőleges megoszló erő intenzitása, l a kérdéses szakasz hossza.

Használata: A tartószakasz két végpontjában levő hajlítónyomaték-értékeket egy szerkesztővonallal összekötjük. Az így kapott szakasz felezőpontjából kiindulva a tartó tengelyére merőlegesen a megoszló erő irányába felmérjük a $ql^2/8-$at. Kétszer. (Hangsúlyozzuk, hogy a mérés iránya az egyenes szerkesztővonaltól független, mindig a tartótengelyre merőleges.) Az első felmért érték a parabola közbenső pontja lesz. A második felmért pont a szakasz két végpontjában húzott érintők metszéspontja lesz. A parabola közbenső pontjában az érintő a két végpontot összekötő egyenessel párhuzamos vonal. Végül a három ponton át egy könnyed csuklómozdulattal berajzoljuk az érintőkre rásimuló parabolát.

$$\boxed{\frac{ql^2}{8}}$$

Hosszabb szakasz esetén a már meglevő pontokból és érintőkből tetszés szerint tudjuk tovább sűríteni a parabolánk pontjait, ha ismerjük két pont helyét és az ottani érintőket: felezzük meg az érintők metszéspontja és a parabolapontok közötti szakaszokat (ez két pontot eredményez a két érintőn). E két pontot összekötve a kapott szakasz a parabola érintője lesz, a szakasz felezőpontja pedig a parabola egy újabb pontja. Ezt a műveletet tovább ismételve végül annyi pontunk lesz, hogy arra már begipszelt csuklóval is lehet ívet húzni.

A fenti összefüggéseknek visszafelé is működniük kell, azaz bármelyik ábrán csak ott lehet ugrás, vagy törés, ahol azt valami okozza, csak ott lehet egyenestől eltérő az ábra, ahol annak megfelelő külső erő működik. A leggyakoribb teher-igénybevétel kapcsolatokat a fenti elveket követve az alábbi ábrán foglaltuk össze.



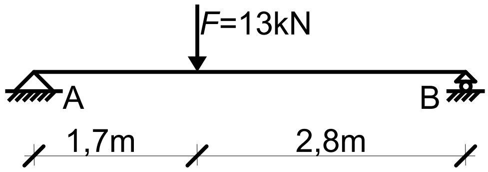
A teher és a nyomatéki ábra közötti kapcsolatot úgy is ellenőrizhetjük, hogy képzeletben egy kifeszített gumikötélre működtetjük a tartó terheit. A kötél alakja a nyomatéki ábra alakjához fog hasonlítani: a terheletlen szakaszon egyenes lesz, koncentrált erő alatt törés lesz benne, megoszló erő alatt pedig meggörbül.

Az ábrák megrajzolásához az ábra melletti részen tüntetjük fel a kiszámított értékeket, segédmennyiségeket. Ezeket az értékeket balról-jobbra haladva sorszámozzuk (tehát M_2 balról a második kiszámított hajlítónyomaték-érték). A kiszámítás sorrendje azonban elvileg tetszőleges lehet, ezért esetenként eltérünk a sorszám szerinti sorrendtől, például a konzolon levő keresztmetszetek igénybevételei esetén, hiszen ezek a reakcióktól függetlenül, akár azok meghatározása nélkül számolhatók. A gyakorló feladatoknál az előírt formulák tippet adhatnak a kiszámítandó mennyiségekre, de nem feltétlenül szükséges mindig mindegyik értéket kiírni (ha például beláthatóan nulla, vagy azonos egy másik értékkel).

Igénybevételi ábrák rajzolása (erőtani) számítás alapján

Mintapélda – 1

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Először most is a reakciókat kell kiszámolnunk:

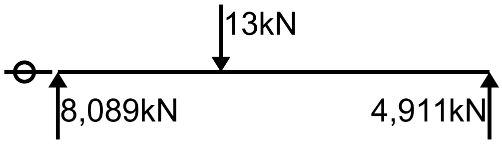
$\sum M_i^{(A)}: -13\cdot 1{,}7 + B\cdot 4{,}5 = 0 \rightarrow B = 4{,}911\,\text{kN}\,(\uparrow)$

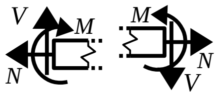
$\sum M_i^{(B)}: 13\cdot 2{,}8 - A_z\cdot 4{,}5 = 0 \rightarrow A_z = 8{,}089\,\text{kN}\,(\uparrow)$

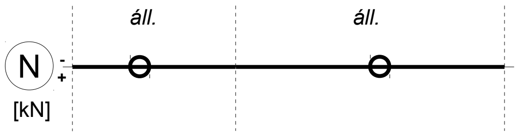
$\sum F_{ix}: A_x = 0\,\text{kN}$

Eredményvázlat:

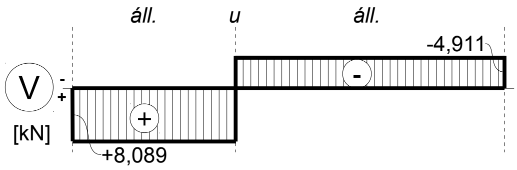
Ell.: $\sum F_{iz}: 13 - 4{,}911 - 8{,}089 = 0$



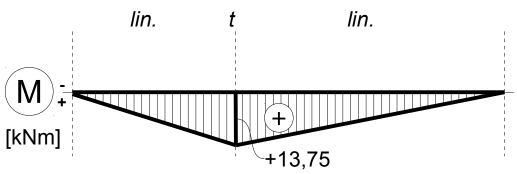




A normálerőábra két konstans szakaszból áll, melyek között az F erő vízszintes vetületével megegyező (azaz zérus) ugrás van. Bármely szakaszon bármely oldalról számolva nincs olyan erő, aminek lenne vízszintes komponense, így az ábra egy zérus ábra.
A tengelyre rajzolt kis nulkörrel jelezzük, hogy 'kiszámoltuk', nem pedig elfelejtkeztünk róla.



A nyíróerőábra két konstans szakaszból áll, melyek között az F erő függőleges vetületével megegyező ugrás van. A két szakaszon a nyíróerő:
$V_1 = +8{,}089\,\text{kN}$ (célszerűen balról)
$V_2 = -4{,}911\,\text{kN}$ (célszerűen jobbról)

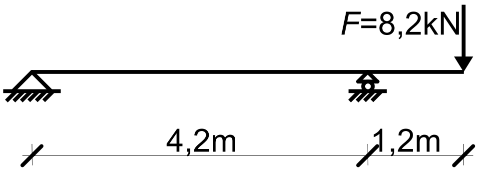


A nyomatéki ábra két lineáris szakaszból áll, melyek között egy törés van (de ugrás nincs)
A szakaszok külső végén, (a tartó végén) a nyomaték nulla, a törésnél:
$M_1 = +8{,}089\cdot 1{,}7 = 13{,}75\,\text{kNm}$ (Balról.
Jobbról: $M_1 = 4{,}911\cdot 2{,}8$.)

M-ábra röviden: A támaszoknál egyaránt nulla a nyomaték (kívülről számolva). A reakciók felfelé mutatnak, ezeknél a koncentrált erőknél a képzeletbeli terheletlen konzolos rész, nyomaték nélküli ábrája a reakcióknak megfelelően lefelé törik. A teher alatt szintén törik, de nem ugorhat, ezért a két oldalról érkező ferde egyenes ott metszi egymást.

Gyakorlópélda – 1

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

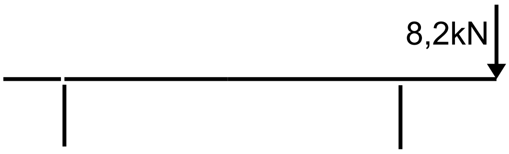
Reakciók:

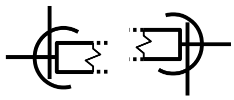
$\sum$:

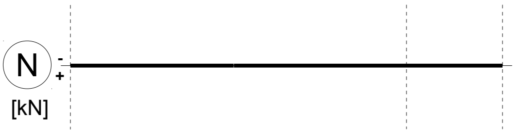
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:





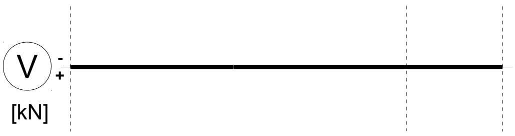


Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

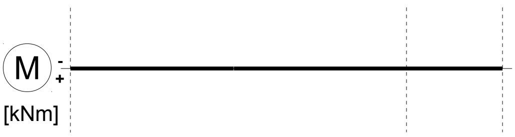
$N_2 =$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?



$V_1 =$

$V_2 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

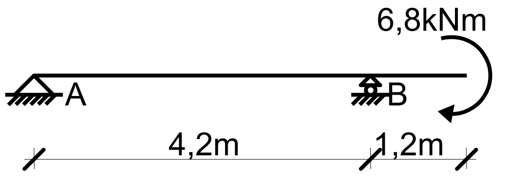
$M_2 =$

$M_3 =$

Ellenőrizzük az ugrások és törések meglétét, irányát!

Mintapélda – 2

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

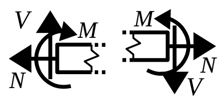
$\sum M_i^{(A)}: -6{,}8 + B \cdot 4{,}2 = 0 \rightarrow B = 1{,}619\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

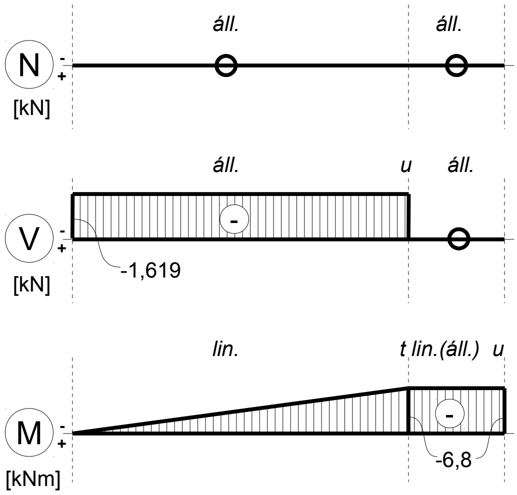
$\sum M_i^{(B)}: -6{,}8 - A_z \cdot 4{,}2 = 0 \rightarrow A_z = -1{,}619\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$

$\sum F_{ix}: A_x = 0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 1{,}619 - 1{,}619 = 0$

Eredményvázlat:





A normálerőábra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők híján nulla.

A nyíróerőábra két konstans szakaszból áll, köztük a B-nek megfelelő ugrással. A konzolon kívülről (jobbról) számolva zérus a nyíróerő, a két támasz között bármely oldalról számolva: $V = -1{,}619\,\mathrm{kN}$

A teher alapján a hajlítónyomatéki ábra két lineáris szakaszból áll. A konzolon ez ráadásul konstans függvénnyé egyszerűsödik a nyíróerő zérus volta miatt. Értéke jobbról számolva: $M_2 = -6{,}8\,\mathrm{kNm}$ (A szakasz két végpontjában egyaránt ennyi, így azt a két pontot is összeköthettük volna.)

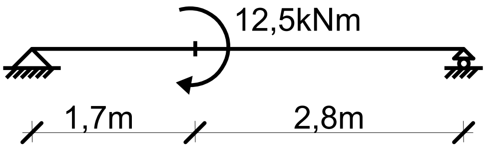
A két támasz közötti lineáris szakasz jobb oldali végén ugyancsak $-6{,}8\,\mathrm{kNm}$, hiszen a B erő alatt a hajlítónyomaték értéke nem változik.

A bal oldali végen balról számolva: $M_1 = 0$ (De jobbról is $-6{,}8 + 1{,}619 \cdot 4{,}2 = -0{,}0002 \approx 0$ lenne.)

M-ábra röviden: A konzolon nincs semmilyen erő, így nyíróerő sem, ezért ott az ábra konstans lesz, a felül húzó nyomaték miatt felülre kerül.

Gyakorlópélda – 2

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

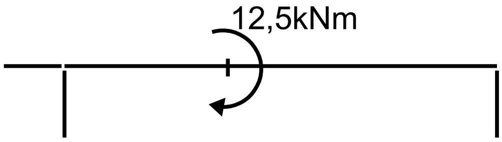
Reakciók:

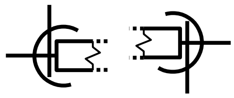
$\sum$:

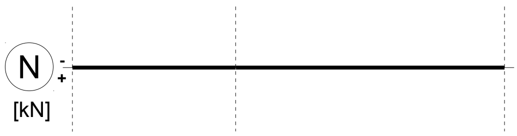
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:



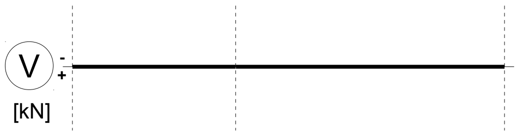




Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

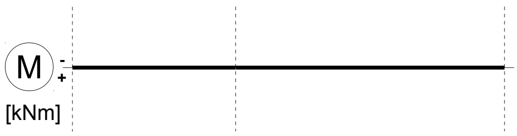
$N_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

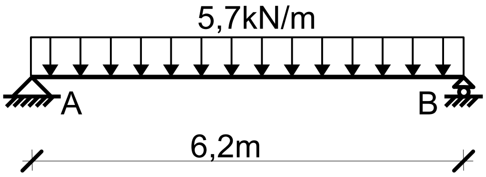
$M_3 =$

$M_4 =$

Ellenőrizzük az ugrások és törések meglétét, irányát, a párhuzamosok párhuzamosságát!

Mintapélda – 3

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

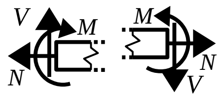
$\sum M_i^{(A)} : -(5{,}7\cdot 6{,}2)\cdot 3{,}1 + B\cdot 6{,}2 = 0 \rightarrow B = 17{,}67\ \text{kN}(\uparrow)$

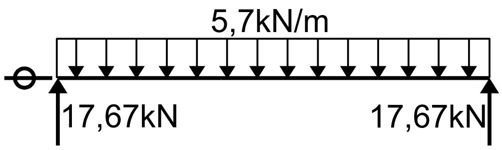
$\sum M_i^{(B)} : (5{,}7\cdot 6{,}2)\cdot 3{,}1 - A_z\cdot 6{,}2 = 0 \rightarrow A_z = 17{,}67\ \text{kN}(\uparrow)$

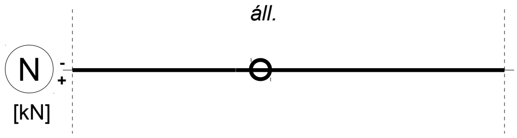
$\sum F_{ix} : A_x = 0$

Ell.: $\sum F_{iz} : 5{,}7\cdot 6{,}2 - 17{,}67 - 17{,}67 = 0$

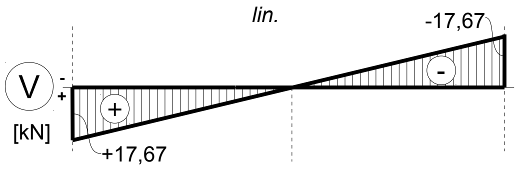
Eredményvázlat:







A normálerőábra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők híján nulla.

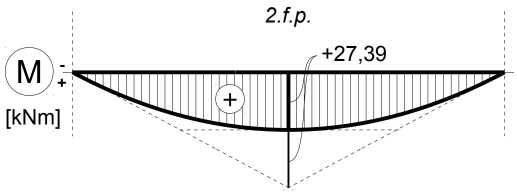


A nyíróerőábra a teher alapján egyetlen lineáris szakaszból áll. Ennek végértéke a jobb oldalon: $V_2 = -17{,}67\ \text{kN}$ (Jobbról B-ből.)

A bal oldalon:

$V_1 = 17{,}67\ \text{kN}$ (Balról A_z-ből.)

A zérushely pont középre esik.



A hajlítónyomatéki ábra a teher alapján egyetlen másodfokú parabolából áll. A két végpontban az értéke (rendre kívülről számolva) zérus. A két végpontot összekötő szakasz a tengelyre esik.

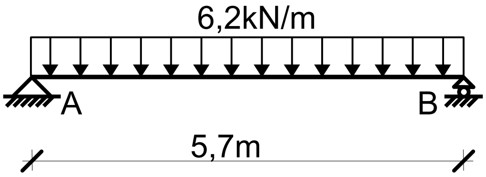
A parabola belógása: $\dfrac{q\,l^2}{8} = \dfrac{5{,}7\cdot 6{,}2^2}{8} = 27{,}39\ \text{kNm}.$

Ezt a végpontokat összekötőt szakasz felezőpontjából mérjük (a teher iránya miatt) *lefelé* kétszer. Az első pont a parabola közbenső pontja lesz, a második a végponti érintők metszéspontja. A közbenső pontban az érintő most vízszintes lesz, azaz az ábra maximuma is itt lesz, értéke $+27{,}39\ \text{kNm}$.

M-ábra röviden: A két végpontban nulla a nyomaték értéke, a kettő közé a megoszló erő miatt lefelé kell belógatni a parabolát.

Gyakorlópélda – 3

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

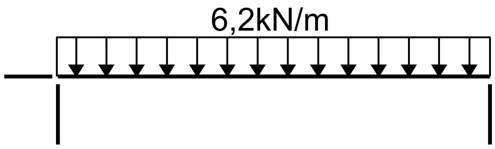
Reakciók:

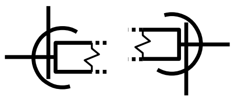
$\sum$:

$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:





Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

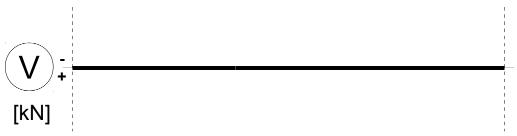
$N_1 =$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

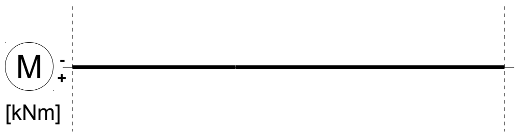


Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

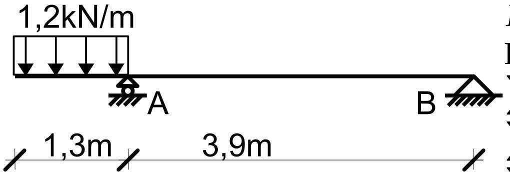
$M_2 =$



parabola: $\frac{q l^2}{8} = \rule{2cm}{0.4pt} =$

Mintapélda – 4

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

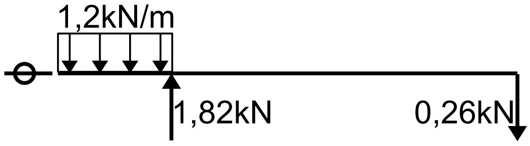
$\sum M_i^{(B)}: (1{,}2\cdot 1{,}3)\cdot 4{,}55 - A\cdot 3{,}9 = 0 \rightarrow A = 1{,}82\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

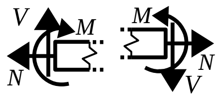
$\sum M_i^{(A)}: (1{,}2\cdot 1{,}3)\cdot 0{,}65 + B_z\cdot 3{,}9 = 0 \rightarrow B_z = -0{,}26\,\mathrm{kN}\,(\downarrow)$

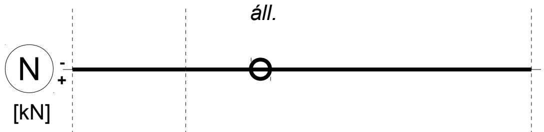
$\sum F_{ix}: B_x = 0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 1{,}3\cdot 1{,}2 - 1{,}82 + 0{,}26 = 0$

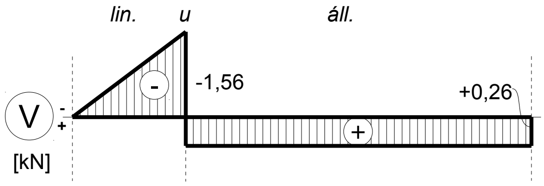
Eredményvázlat:







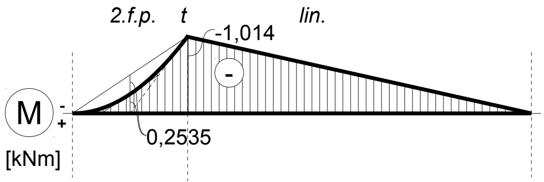
A normálerőábra most is konstans szakaszokból áll, melyek értéke a vízszintes vetületű erők híján nulla.



A nyíróerőábra a teher alapján egy lineáris és egy konstans szakaszból áll. Előbbi két végponti értékét kívülről (balról) számoljuk:
$V_1 = 0, \quad V_2 = -1{,}2\cdot 1{,}3 = -1{,}56\,\mathrm{kN}$

A konstans szakaszt könnyebb jobbról számolni:
$V_3 = +0{,}26\,\mathrm{kN}$ (B-ből.)

(A két szakasz között A-nak megfelelő ugrás van.)



A nyomatéki ábra a teher alapján egy másodfokú parabolából és egy lineáris szakaszból áll. A parabola két végponti értéke:
$M_1 = 0, \quad M_2 = -1{,}2\cdot 1{,}3\cdot 0{,}65 = -1{,}014\,\mathrm{kNm}$,

belógása: $\dfrac{ql^2}{8} = \dfrac{1{,}2\cdot 1{,}3^2}{8} = 0{,}2535\,\mathrm{kNm}$.

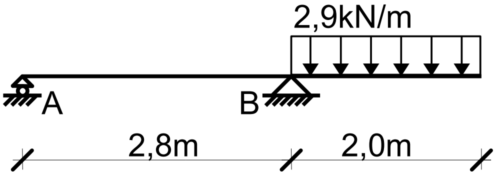
(A kétszeri felméréssel épp a tartótengelyre kerülünk, azaz a külső végponti érintő vízszintes lesz, ahogy a zérus nyíróerő is sugallja.)

A lineáris szakasz bal oldali végpontjában a hajlítónyomaték $-1{,}014\,\mathrm{kNm}$, az A erő miatt még nem változhat. A jobb oldali végen jobbról:
$M_3 = 0\,\mathrm{kNm}$.

M-ábra röviden: a konzol végén nincs koncentrált erő, sem nyomaték, ezért vízszintes érintővel nulláról indul a teher miatt alulról domború másodfokú parabola, ami a bal támaszig tart. A támasznál a reakció miatt az ábra megtörik, a két támasz között egy egyenes lesz, amit a jobb oldali végpontig kell húzni, ami nulla.

Gyakorlópélda – 4

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

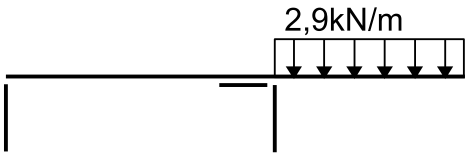
Reakciók:

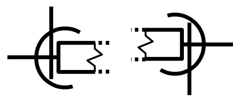
$\sum$:

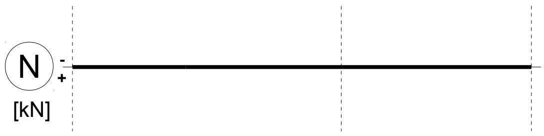
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:





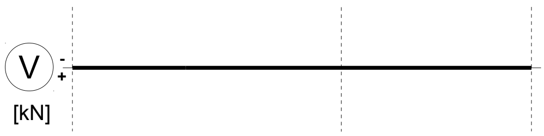


Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

$N_2 =$



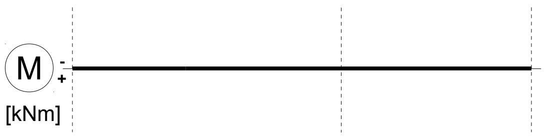
Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

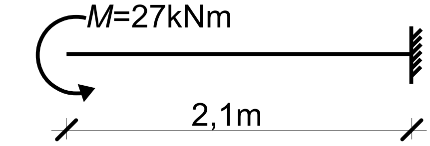
$M_2 =$

$M_3 =$

parabola: $\frac{q l^2}{8} = \rule{3cm}{0.4pt} =$

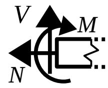
Mintapélda – 5

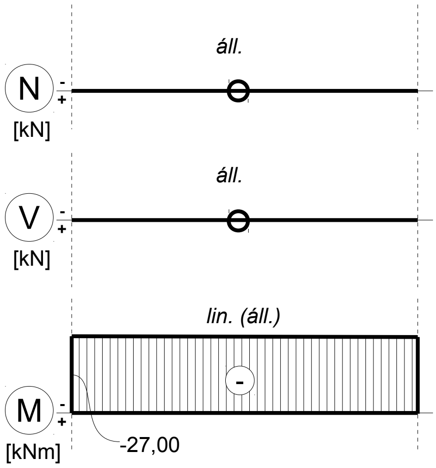
Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Konzol esetén a reakciókra nincs szükségünk, mindent kívülről (most balról) számolunk.





Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.

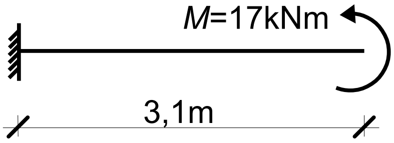
A nyíróerőábra a teher alapján egyetlen konstans szakaszból áll. Értéke: $V=0\,\text{kN}$.

A hajlítónyomatéki ábra a teher alapján egy lineáris szakasz, ami a nyíróerő alapján konstanssá egyszerűsödik. Értéke: $M=-27\,\text{kNm}$.

M-ábra röviden: a konzolon sehol nincs erő, ezért nincs nyíróerő, így a külső végén vízszintes érintővel indul a húzott oldalon a konstans nyomatéki ábra, ami a jobb támaszig tart.

Gyakorlópélda – 5

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

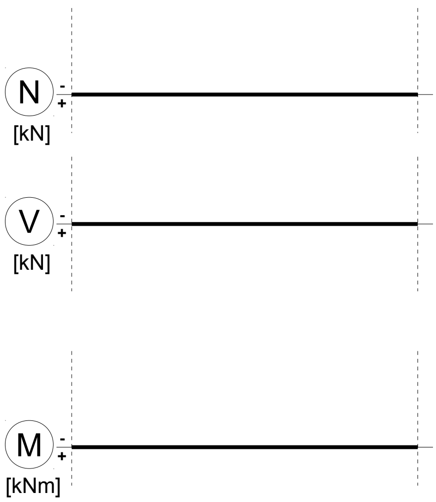


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

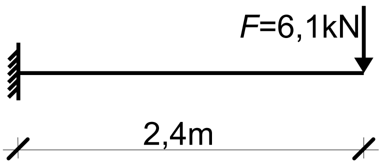
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

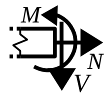
Mintapélda – 6

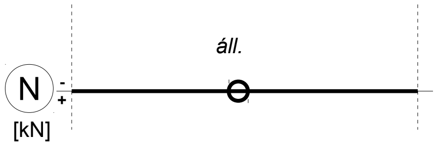
Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



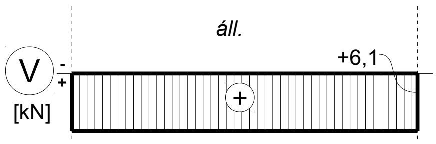
Megoldás

Konzol esetén a reakciókra nincs szükségünk, mindent kívülről (most jobbról) számolunk.

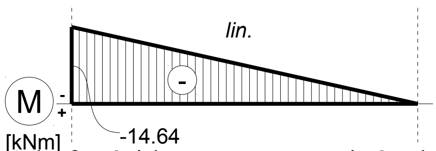




Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.



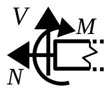
A nyíróerőábra egyetlen konstans szakaszból áll. Értéke: $V = 6{,}1$ kN.



A hajlítónyomatéki ábra a teher alapján egy lineáris szakasz. Végponti értékei kívülről (jobbról) számolva:

$M_2 = 0$, $M_1 = -6{,}1 \cdot 2{,}4 = -14{,}64$ kNm.

A befogási keresztmetszet igénybevételeinek balról történő számításával a befogási reakciók meghatározhatók:



$N = 0 \rightarrow A_x = 0$

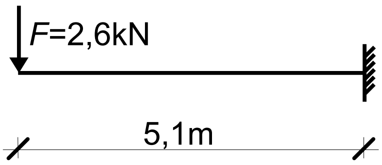
$V = 6{,}1\,\text{kN} \rightarrow A_y = 6{,}1\,\text{kN}\,(\uparrow)$

$M = -14{,}64\,\text{kNm} \rightarrow M_A = 14{,}64\,\text{kNm}\,(\curvearrowleft)$

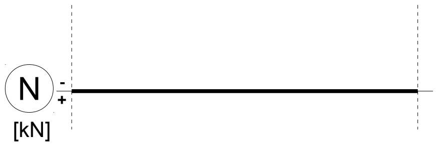
M-ábra röviden: az ábra lineáris lesz, a külső végen nulla, a konzol képzeletbeli (kifelé történő) meghosszabbításán levő zérusfüggvényhez képest úgy kell megtörnie a koncentrált erő alatt, hogy az erő nyila beleilljen a törésbe, ezért a befelé haladó egyenesnek felfelé kell változnia a befogásig.

Gyakorlópélda – 6

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

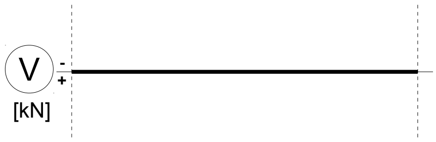


Megoldás
Reakciók?
Számítás iránya? (Melyik oldalról?)
Pozitív igbv. def.:



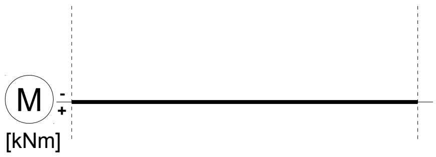
Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

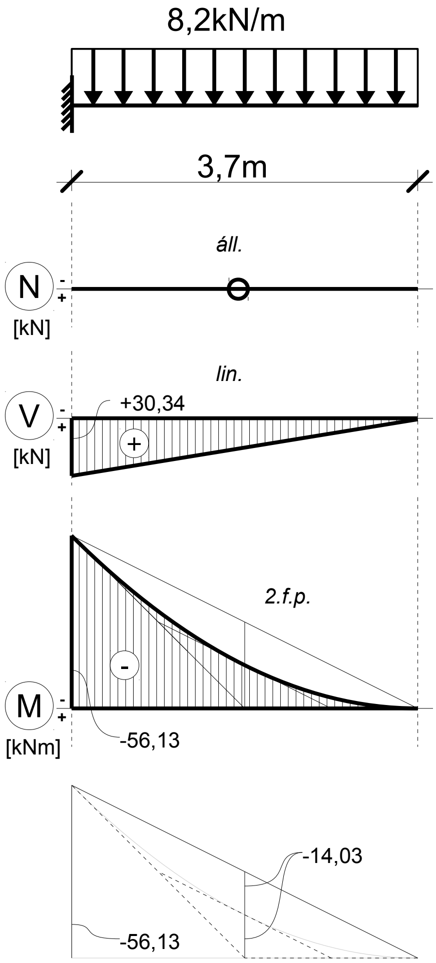
$M_1 =$

$M_2 =$

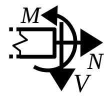
Határozzuk meg a reakciókat a befogási keresztmetszet igénybevételeiből!

Mintapélda – 7

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás



Konzol esetén a reakciókra nincs szükségünk, mindent kívülről (most jobbról) számolunk.

Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.

A nyíróerőábra egyetlen lineáris szakasz lesz. Végponti értékei:
$V_2 = 0$ kN, $V_1 = +8{,}2 \cdot 3{,}7 = +30{,}34$ kN.

A nyomatéki ábra a teher alapján egy másodfokú parabolából áll. A parabola két végponti értéke:
$M_2 = 0$, $M_1 = -8{,}2 \cdot 3{,}7 \cdot 1{,}85 = -56{,}13$ kNm,

belógása: $\dfrac{q\,l^2}{8} = \dfrac{8{,}2 \cdot 3{,}7^2}{8} = 14{,}03$ kNm.

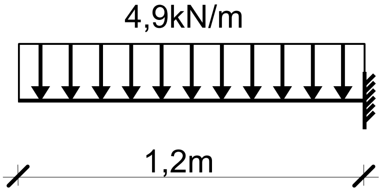
(A kétszeri felméréssel végponti érintők metszéspontja épp a tartótengelyre kerül, azaz a külső végponti érintő vízszintes (ahogy az a nyíróerő ottani zérusértékéből is következik).

(Az alsó ábra a parabola szerkesztéséhez felmérendő és behúzandó segédvonalakat mutatja.)

M-ábra röviden: a konzol végén nincs koncentrált erő, sem nyomaték, ezért vízszintes érintővel nulláról indul a teher miatt alulról domború másodfokú parabola, ami a befogásig tart.

Gyakorlópélda – 7

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!

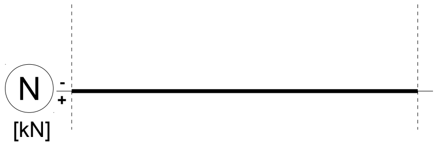


Megoldás

Reakciók?

Számítás iránya? (Melyik oldalról?)

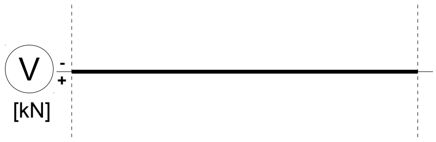
Pozitív igbv. def.:



Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

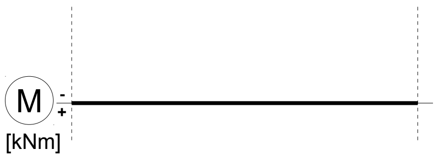


Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?

Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?

Mi történik a szakaszok között?

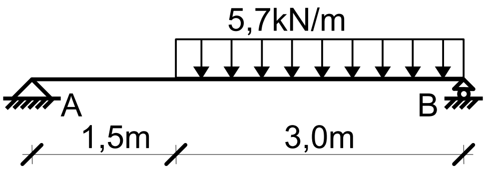
$M_1 =$

$M_2 =$

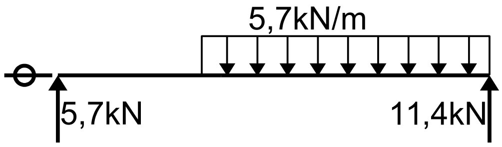
parabola: $\frac{q\,l^2}{8} = \underline{\qquad\qquad} =$

Mintapélda – 8

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

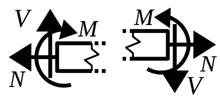
Reakciók:

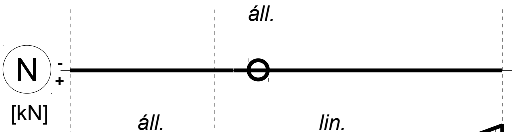
$\sum M_i^{(A)}: -(5{,}7\cdot 3{,}0)\cdot 3{,}0 + B\cdot 4{,}5 = 0 \rightarrow B = 11{,}4\,\text{kN}\,(\uparrow)$

$\sum M_i^{(B)}: (5{,}7\cdot 3{,}0)\cdot 1{,}5 - A_z\cdot 4{,}5 = 0 \rightarrow A_z = 5{,}7\,\text{kN}\,(\uparrow)$

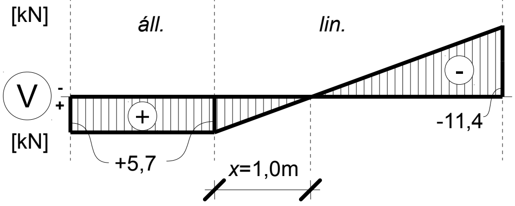
$\sum F_{ix}: A_x = 0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 5{,}7\cdot 3{,}0 - 5{,}7 - 11{,}4 = 0$

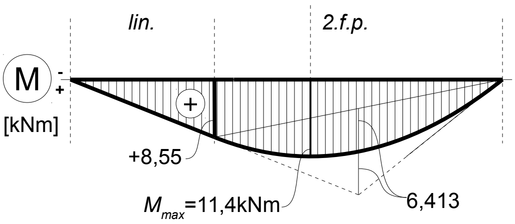




Nincs vízszintes vetületű hatás, ezért nincs normálerő.



A nyíróerőábra a teher alapján egy konstans és egy lineáris szakaszból áll. Előbbi értékét célszerűen balról számoljuk: $V_1 = +5{,}7\,\text{kN}$.
Ez egyben a lineáris szakasz bal oldali végértéke.
A lineáris szakasz jobb oldali végértéke jobbról: $V_2 = -11{,}4\,\text{kN}$ (B-ből).
A két végpontot összekötve az valahol metszi a tengelyt. Ennek helyét a megoszló erő kezdetétől jelölje x. Az itteni nyíróerő balról:
$V(x) = +5{,}7 - 5{,}7\cdot x = 0 \rightarrow x = 1{,}0\,\text{m}$



A nyomatéki ábra a teher alapján egy lineáris szakaszból és egy másodfokú parabolából áll. A lineáris szakasz két végértéke:
$M_1 = 0,\ \ M_2 = +5{,}7\cdot 1{,}5 = 8{,}55\,\text{kNm}$.
Utóbbi a parabola bal oldali végértéke is, míg a jobb oldali végen: $M_3 = 0$.

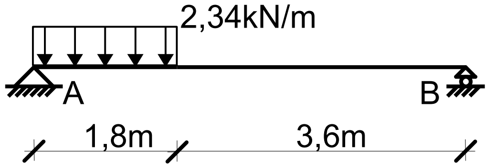
A parabola belógása: $\dfrac{q\,l^2}{8} = \dfrac{5{,}7\cdot 3{,}0^2}{8} = 6{,}413\,\text{kNm}$.

A végponti érintők dőlésének iránya ellenkező, ahol vízszintessé válik, ott egy lokális maximum van. Ennek helyét a nyíróerő-ábránál kiszámoltuk, a maximum értéke:
$M_{max} = 5{,}7\cdot 2{,}5 - (5{,}7\cdot 1{,}0)\cdot 0{,}5 = +11{,}4\,\text{kNm}$.

Ellenőrzés: a parabola bal oldali érintője és az egyenes szakasz egybeesik.

Gyakorlópélda – 8

Számítások alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

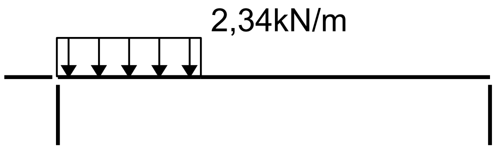
Reakciók:

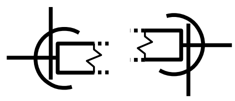
$\sum$:

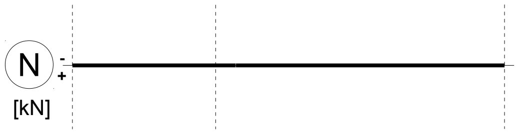
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:

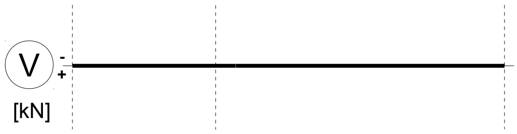






Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

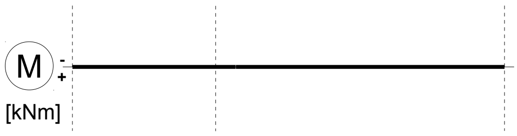


Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

parabola: $\dfrac{q l^2}{8} = \underline{\qquad\qquad} =$

Van maximum? → Nyíróerőnél van zérushely? Hol?

$V_m = \qquad\qquad\qquad\qquad = 0$

$x_m =$

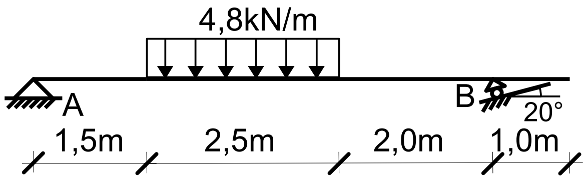
Mekkora itt a nyomaték?

$M_{max} =$

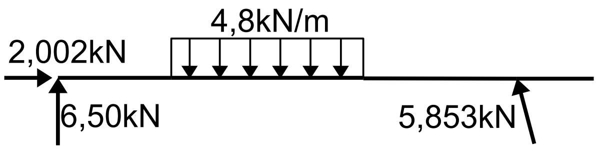
Igénybevételi ábrák kéttámaszú tartón

Mintapélda – 1

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Eredményvázlat:



Megoldás

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: -(4{,}8\cdot 2{,}5)\cdot 2{,}75 + B\cos 20°\cdot 6{,}0 = 0$

$\rightarrow\ B = 5{,}853\,\text{kN}\,(\nwarrow)$

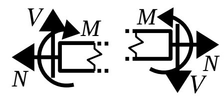
$\sum M_i^{(B)}: (4{,}8\cdot 2{,}5)\cdot 3{,}25 - A_z\cdot 6{,}0 = 0$

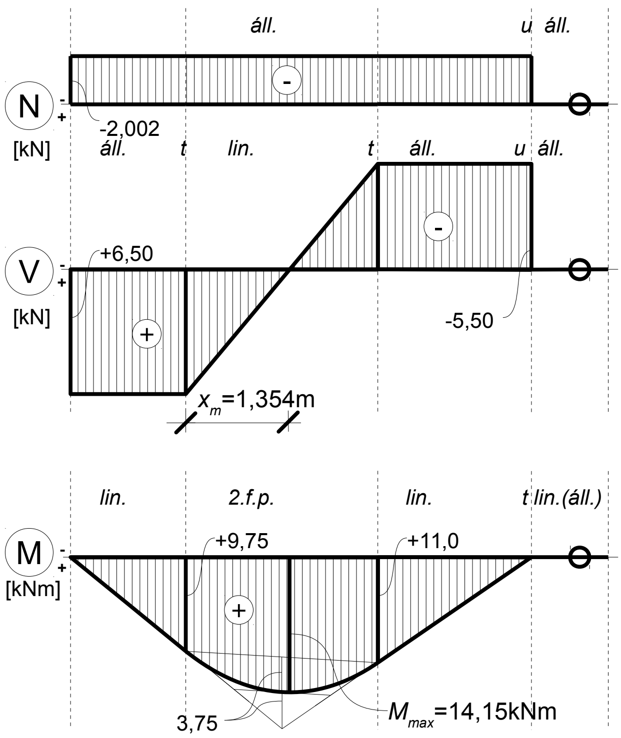
$\rightarrow\ A_z = 6{,}50\,\text{kN}\,(\uparrow)$

$\sum F_{ix}: A_x - 5{,}853\sin 20° = 0 \rightarrow A_x = 2{,}002\,\text{kN}\,(\rightarrow)$

Ell.:

$\sum F_{iz}: 4{,}8\cdot 2{,}5 - 5{,}853\cdot\cos 20° - 6{,}5 = -2\cdot 10^{-5} \approx 0$





A vízszintes normálerőre csak az A_x és a B vízszintes vetülete van hatással, az ábra két állandó szakaszból áll:

$N_1 = -2{,}002\,\text{kN},\quad N_2 = 0\,\text{kN}$

A megoszló erő alatt lineárisan változik a nyíróerő, a B erő alatt pedig ugrás van az ábrán. A maradék három szakasz konstans.

$V_3 = 0\,\text{kN},\quad V_2 = -5{,}583\cos 20° = -5{,}50\,\text{kN}$

$V_1 = -5{,}50 + 4{,}8\cdot 2{,}5 = +6{,}50\,\text{kN}$

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$V_m = +6{,}50 - 4{,}8\cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = 1{,}354\,\text{m}$

A nyomatéki ábra egy lineáris, egy másodfokú, és két lineáris szakaszból áll. A konzolon a 0 nyíróerő miatt konstans. (Sőt, itt most ez a konstans 0.) A hajlítónyomaték értéke a szakaszhatárokon: $M_4 = 0\,\text{kNm}$,

$M_3 = +5{,}853\cos 20°\cdot 2{,}0 = +11{,}00\,\text{kNm}$

$M_2 = +6{,}5\cdot 1{,}5 = +9{,}75\,\text{kNm},\ M_1 = 0\,\text{kNm}$

A parabola belógása: $\dfrac{4{,}8\cdot 2{,}5^2}{8} = 3{,}75\,\text{kNm}$

A maximum értéke:

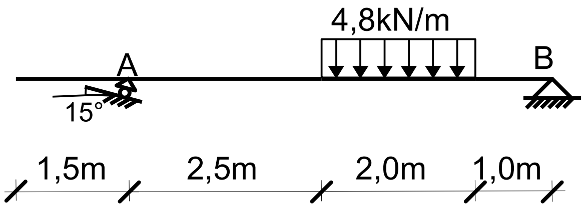
$$M_{max} = +6{,}5\cdot 2{,}854 - (4{,}8\cdot 1{,}354)\frac{1{,}352}{2} =$$

$$= +14{,}15\,\text{kNm}$$

Vegyük észre, hogy a terheletlen konzol minden igénybevétele zérus.

Gyakorlópélda - 1

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

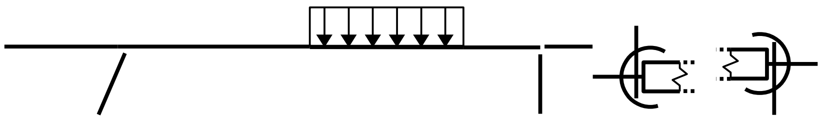
Reakciók:

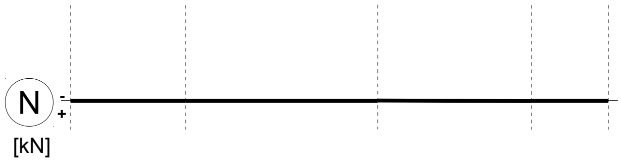
$\sum$:

$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:

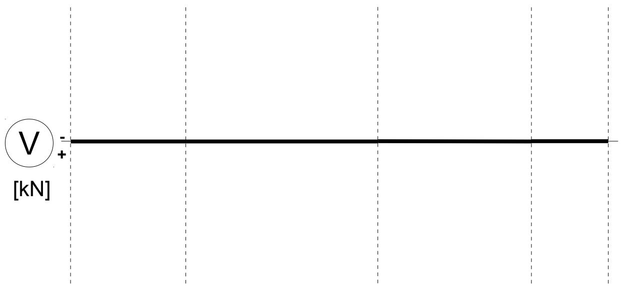




Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

$N_2 =$



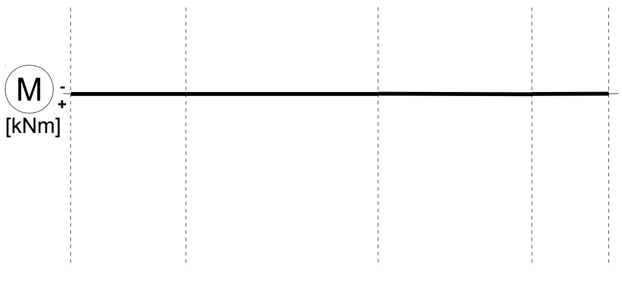
Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$

zérushely: $V_m = 0 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

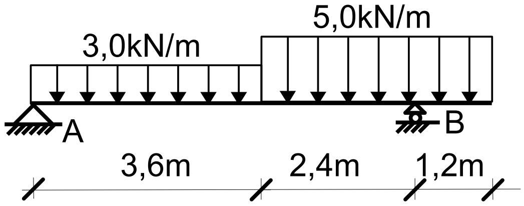
$M_4 =$

parabola: $\dfrac{q\,l^2}{8} = \underline{\qquad\qquad} =$

maximum: $M_{max} =$

Mintapélda – 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Eredők: $R_1 = 3{,}0 \cdot 3{,}6 = 10{,}8\ \mathrm{kN}$, $R_2 = 5{,}0 \cdot 3{,}6 = 18\ \mathrm{kN}$

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: -10{,}8 \cdot 1{,}8 - 18 \cdot 5{,}4 + B \cdot 6{,}0 = 0$

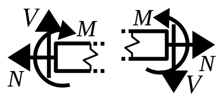
$\rightarrow \quad B = 19{,}44\ \mathrm{kN}(\uparrow)$

$\sum M_i^{(B)}: 10{,}8 \cdot 4{,}2 + 18 \cdot 0{,}6 - A_z \cdot 6{,}0 = 0$

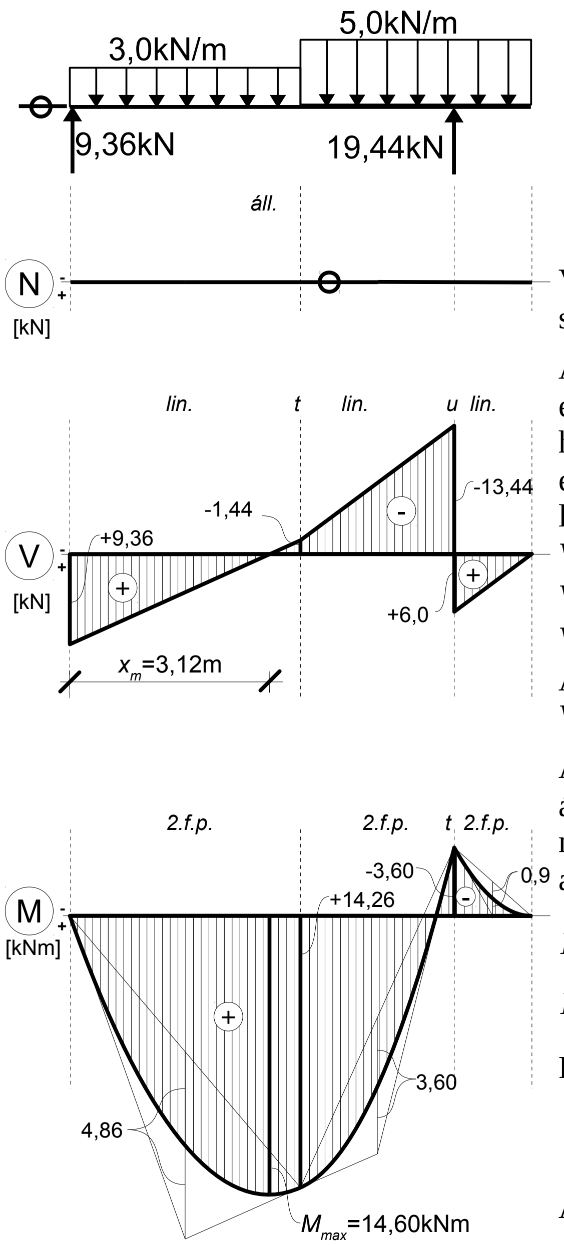
$\rightarrow \quad A_z = 9{,}36\ \mathrm{kN}(\uparrow)$

$\sum F_{ix}: A_x = 0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 3{,}0 \cdot 3{,}6 + 5{,}0 \cdot 3{,}6 - 9{,}36 - 19{,}44 = 0$



Eredményvázlat:



Vízszintes erők híján a vízszintes tartón sehol sincs normálerő.

A nyíróerőábra három lineáris szakaszból áll, az első és a második határán törés, a második és a harmadik határán ugrás van, utóbbi két szakasz egymással párhuzamos, az első szakasz e kettőnél laposabb. Értékek a szakaszhatárokon:

$V_5 = 0\ \mathrm{kN}$, $V_4 = +5{,}0 \cdot 1{,}2 = 6{,}0\ \mathrm{kNm}$

$V_3 = +5{,}0 \cdot 1{,}2 - 19{,}44 = -13{,}44\ \mathrm{kNm}$

$V_2 = +5{,}0 \cdot 3{,}2 - 19{,}44 = -1{,}44\ \mathrm{kNm}$, $V_1 = +9{,}36\ \mathrm{kNm}$

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$V_m = +9{,}36 - 3{,}0 \cdot x_m = 0 \rightarrow x_m = 3{,}12\ \mathrm{m}$

A nyomatéki ábra három másodfokú szakaszból áll,az első kettő érintőlegesen csatlakozik, a második és a harmadik között törés van. Értékek a szakaszhatárokon: $M_4 = 0\ \mathrm{kNm}$,

$M_3 = -\dfrac{5 \cdot 1{,}2^2}{2} = -3{,}6\ \mathrm{kNm}$, $M_1 = 0\ \mathrm{kNm}$

$M_2 = 9{,}36 \cdot 3{,}6 - 10{,}8 \cdot 1{,}8 = +14{,}26\ \mathrm{kNm}.$

Parabolák: $\dfrac{3{,}0 \cdot 3{,}6^2}{8} = 4{,}86\ \mathrm{kNm}$,

$\dfrac{5{,}0 \cdot 2{,}4^2}{8} = 3{,}60\ \mathrm{kNm}$, $\dfrac{5{,}0 \cdot 1{,}2^2}{8} = 0{,}9\ \mathrm{kNm}$

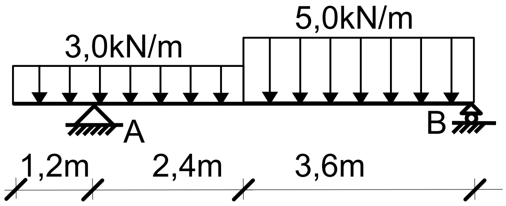
A maximum értéke:

$M_{max} = +9{,}36 \cdot 3{,}12 - (3{,}0 \cdot 3{,}12)\dfrac{3{,}12}{2} = +14{,}60\ \mathrm{kNm}$

Megjegyzés: a nyomatéki maximum számításakor a zárójelben levő szorzat értéke a 3,12 m számítási módjából adódóan 9,36, így a nyomaték most számítható lenne $+9{,}36 \cdot 3{,}12/2$ alakban is.

Gyakorlópélda - 2

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Részeredők:

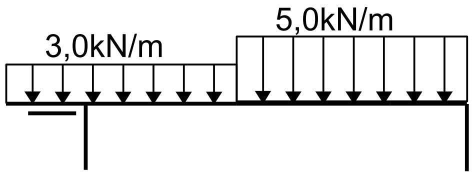
Reakciók:

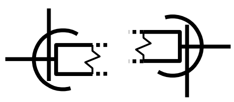
$\sum$:

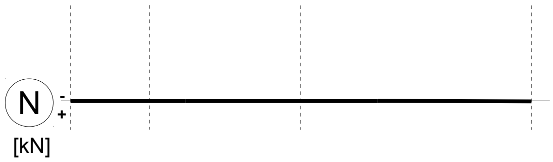
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:

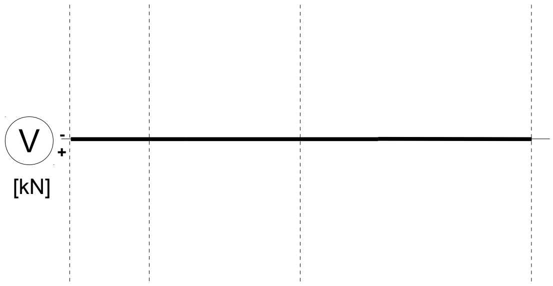






Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

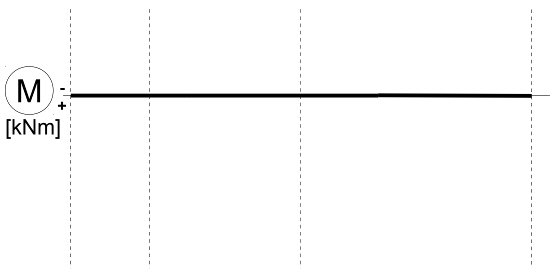
$V_2 =$

$V_3 =$

$V_4 =$

$V_5 =$

zérushely: $V_m = 0 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

$M_4 =$

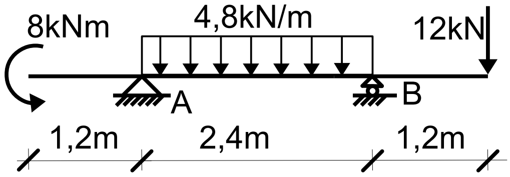
A maximum értéke:

$M_{max} =$

parabolák: $\frac{q l^2}{8} = \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} =$ $\qquad \frac{\quad}{\quad} =$

Mintapélda – 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: 8-(4,8\cdot 2,4)\cdot 1,2-12\cdot 3,6+B\cdot 2,4=0$

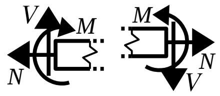
$\rightarrow B=20,43\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

$\sum M_i^{(B)}: 8+(4,8\cdot 2,4)\cdot 1,2-12\cdot 1,2-A_z\cdot 2,4=0$

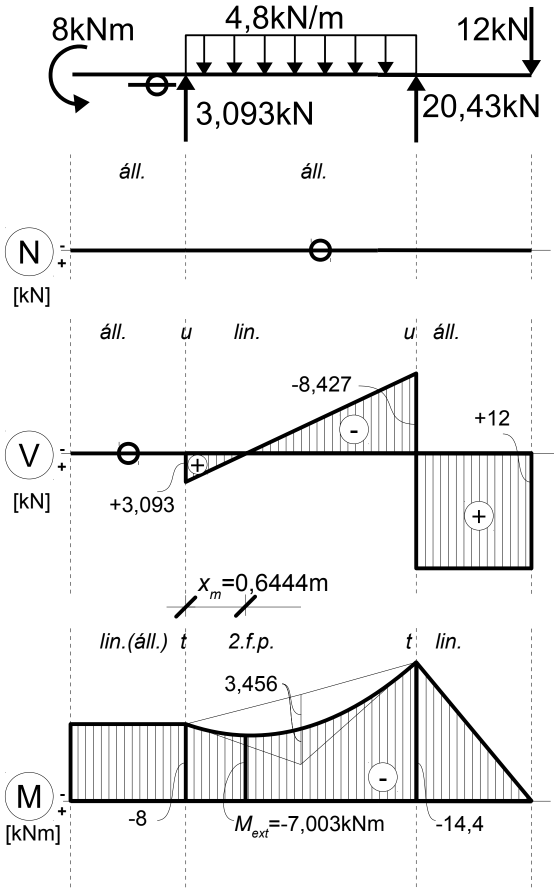
$\rightarrow A_z=3,093\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

$\sum F_{ix}: A_x=0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 4,8\cdot 2,4+12-3,093-20,43=-0,003\approx 0$



Eredményvázlat:



Normálerő vízszintes komponensű hatásokból keletkezne, mivel minden erő függőleges, az ábra értéke állandó és zérus.

A nyíróerőábra egy konstans, egy lineáris és egy konstans szakaszból áll, a szakaszhatárokon ugrás van. Az értékek (először a konzolokon!): $V_1=0\,\mathrm{kN}$, $V_4=+12\,\mathrm{kN}$, $V_2=+3,093\,\mathrm{kN}$, $V_3=+3,093-4,8\cdot 2,4=-8,427\,\mathrm{kN}$.

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus: $V_m=+3,093-4,8\cdot x_m=0 \rightarrow x_m=0,6444\,\mathrm{m}$

A nyomatéki ábra a teher szerint lineáris, másod-fokú, lineáris szakaszokból áll, köztük törés van. A zérus nyíróerő miatt az első szakasz konstans. Értékek a szakaszhatárokon: $M_1=-8\,\mathrm{kNm}$, $M_2=-12\cdot 1,2=-14,4\,\mathrm{kNm}$, $M_3=0\,\mathrm{kNm}$.

A parabola belógása: $\dfrac{4,8\cdot 2,4^2}{8}=3,456\,\mathrm{kNm}$

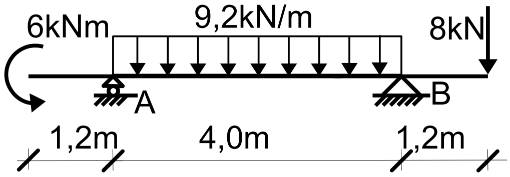
A lokális szélsőérték:

$$M_{ext}=-8+3,093\cdot 0,6444-(4,8\cdot 0,6444)\frac{0,6444}{2}=$$
$$=-7,003\,\mathrm{kNm}$$

Megjegyzés: A nyomatéki ábra megrajzolásához csak a lokális szélsőértékhez volt szükségünk a reakciókra. Az így kapott *M*-ábra alapján a nyíróerőábrát is meg lehetne határozni: a konzolok konzolként rajzolhatók, a nyomatéki ábrán a végponti érintők metszéspontja $(-8-14,4)/2+2\cdot 3,456=-4,288\,\mathrm{kNm}$. A végponti érintők meredeksége (azaz a nyíróerő) pedig: $\left|\dfrac{-8-(-4,288)}{1,2}\right|=3,093$ és $\left|\dfrac{-14,4-(-4,288)}{1,2}\right|=8,427$ (az előjelet szemléletből, az érintő dőlésének irányából dönthetjük el).

Gyakorlópélda - 3

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

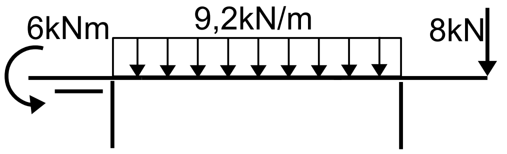
Reakciók:

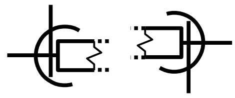
$\sum$:

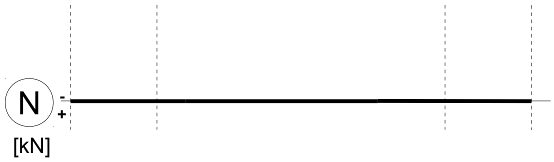
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:

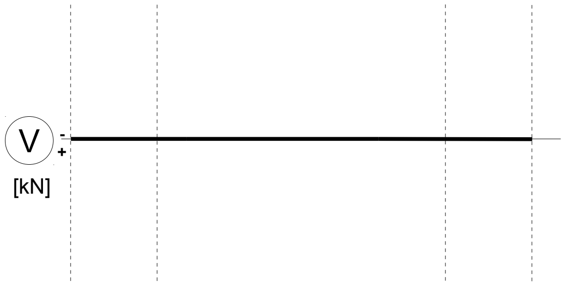






Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

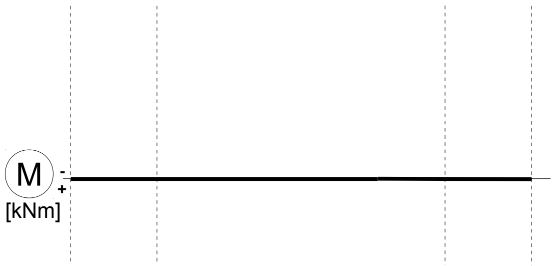
$V_1 =$

$V_4 =$

$V_2 =$

$V_3 =$

zérushely: $V_m = 0 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_3 =$

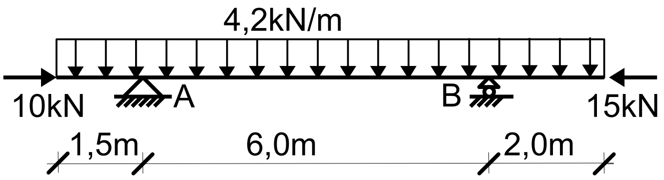
$M_2 =$

parabola: $\frac{q l^2}{8} = \frac{\qquad}{} =$

szélsőérték: $M_{\_} =$

Mintapélda – 4

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: -(4{,}2\cdot 9{,}5)\cdot 3{,}25 + B\cdot 6{,}0 = 0$

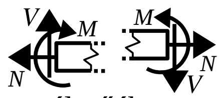
$\rightarrow B = 21{,}61\,\text{kN}\,(\uparrow)$

$\sum M_i^{(B)}: (4{,}2\cdot 9{,}5)\cdot 2{,}75 - A_z\cdot 6{,}0 = 0$

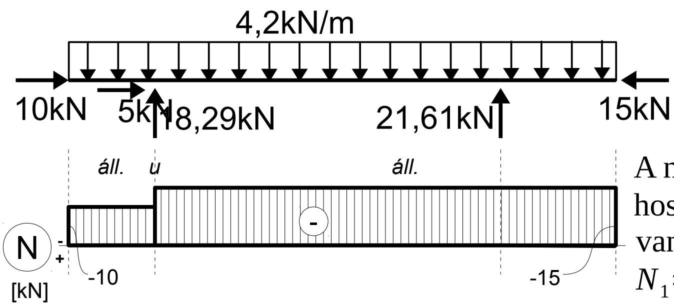
$\rightarrow A_z = 18{,}29\,\text{kN}\,(\uparrow)$

$\sum F_{ix}: 10 + A_x - 15 = 0 \rightarrow A_x = 5\,\text{kN}\,(\rightarrow)$

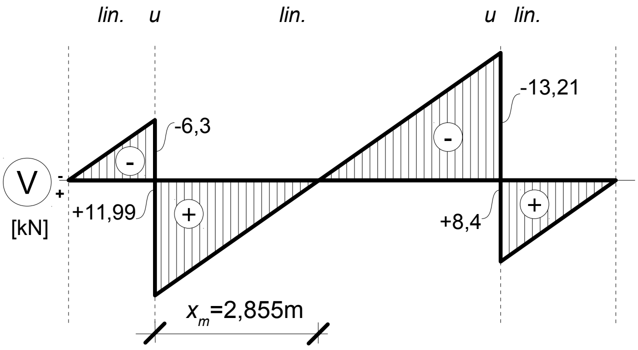
Ell.: $\sum F_{iz}: 4{,}2\cdot 9{,}5 - 18{,}29 - 21{,}61 = 0$



Eredményvázlat:



A normálerőábra egy 1,5 és egy 8,0 méter hosszú konstans szakaszból áll, köztük ugrás van. Az értékek (konzolokon kívülről): $N_1 = -10\,\text{kN}$, $N_2 = -15\,\text{kN}$.



A nyíróerőábra három lineáris szakaszból áll. A három szakasz egymással párhuzamos, köztük a reakcióknak megfelelő ugrás van. Értékek a szakaszhatárokon: $V_1 = 0\,\text{kN}$,

$V_2 = -4{,}2\cdot 1{,}5 = -6{,}3\,\text{kN}$, $V_6 = 0\,\text{kN}$,

$V_5 = +4{,}2\cdot 2{,}0 = +8{,}4\,\text{kN}$,

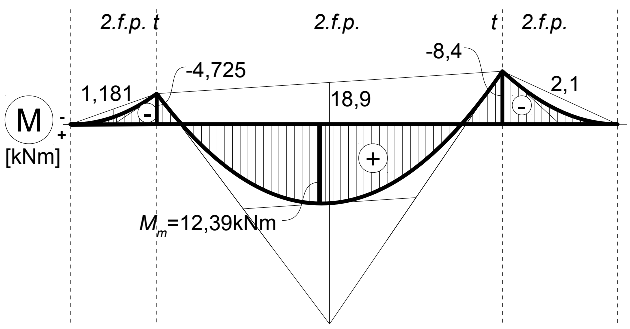
$V_4 = +8{,}4 - 21{,}61 = -13{,}21\,\text{kN}$,

$V_3 = -13{,}21 + 4{,}2\cdot 6{,}0 = +11{,}99\,\text{kN}$.

Az előjelváltás helyén a nyíróerő zérus:

$V_m = +11{,}99 - 4{,}2\cdot x_m = 0$

$\rightarrow x_m = 2{,}855\,\text{m}$



A nyomatéki ábra három parabolából áll, köztük egy-egy törés van. Értékek a szakaszhatárokon: $M_1 = 0\,\text{kNm}$, $M_4 = 0\,\text{kNm}$,

$$M_2 = -(4{,}2\cdot 1{,}5)\cdot\frac{1{,}5}{2} = -4{,}725\,\text{kNm},$$

$$M_3 = -(4{,}2\cdot 2{,}0)\cdot\frac{2{,}0}{2} = -8{,}4\,\text{kNm}.$$

parabolák: $\dfrac{4{,}2\cdot 1{,}5^2}{8} = 1{,}181\,\text{kNm}$,

$\dfrac{4{,}2\cdot 2{,}0^2}{8} = 2{,}1\,\text{kNm}$, $\dfrac{4{,}2\cdot 6{,}0^2}{8} = 18{,}9\,\text{kNm}$

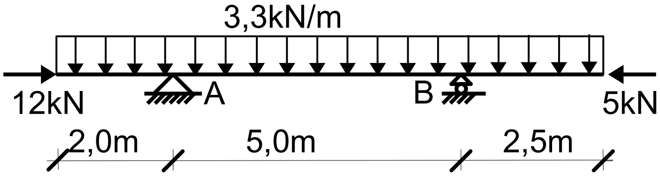
A maximum értéke:

$$M_{max} = +18{,}29\cdot 2{,}855 - (4{,}2\cdot 4{,}355)\frac{4{,}355}{2} = $$

$$= +12{,}39\,\text{kNm}$$

Gyakorlópélda - 4

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

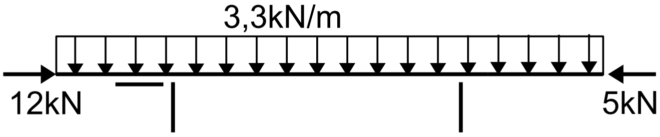
Reakciók:

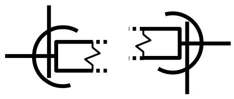
$\sum$:

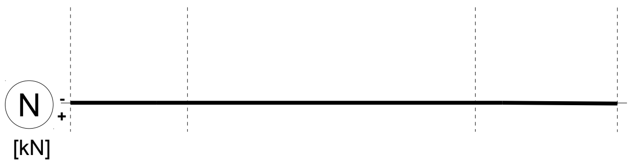
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:



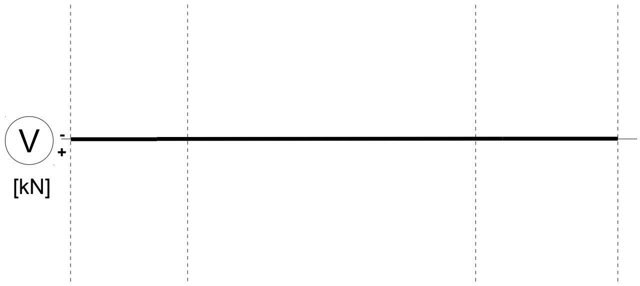




Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$

$N_2 =$



Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

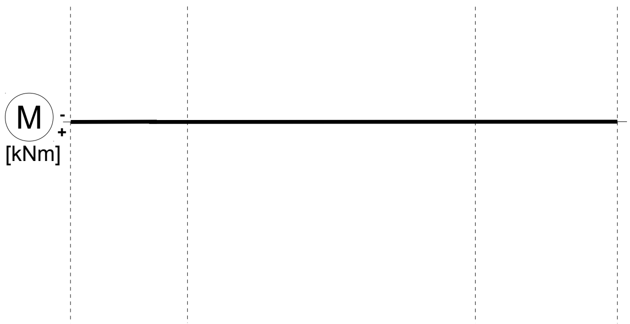
$V_6 =$

$V_5 =$

$V_3 =$

$V_4 =$

zérushely: $V_m = 0 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$ $M_4 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

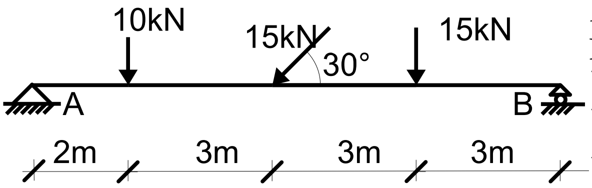
parabolák: $\frac{q l^2}{8} = \frac{\quad}{\quad} =$

$\frac{\quad}{\quad} =$ $\frac{\quad}{\quad} =$

maximum: $M_{max} =$

Mintapélda – 5

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: -10\cdot 2-15\sin 30°\cdot 5-15\cdot 8+B\cdot 11=0$

$\rightarrow B=16{,}14\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

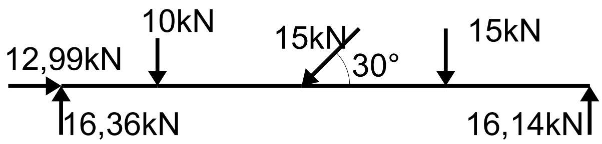
$\sum M_i^{(B)}: 10\cdot 9+15\sin 30°\cdot 6+15\cdot 3-A_z\cdot 11=0$

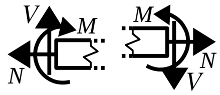
$\rightarrow A_z=16{,}36\,\mathrm{kN}\,(\uparrow)$

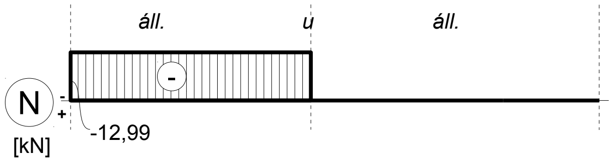
$\sum F_{ix}: A_x-15\cos 30°=0\rightarrow A_x=12{,}99\,\mathrm{kN}\,(\rightarrow)$

Ell.: $\sum F_{iz}: 10+15\sin 30°+15-16{,}36-16{,}14=0$

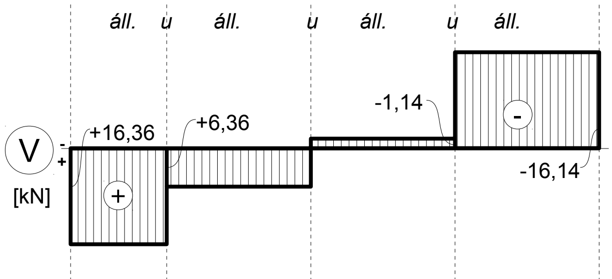
Eredményvázlat



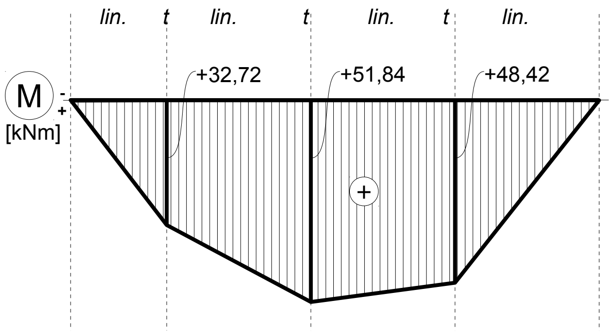




A normálerőábra két konstans szakaszból áll, köztük a ferde erő vízszintes vetületének megfelelő ugrás van. Az értékek: $N_1=-12{,}99\,\mathrm{kN}$, $N_2=0\,\mathrm{kN}$.



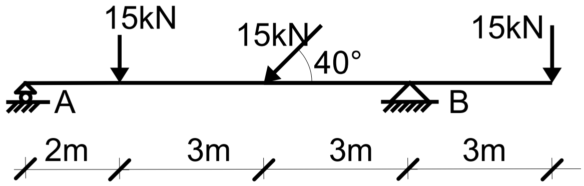
A nyíróerőábra négy konstans szakaszból áll, köztük a függőleges erőkomponenseknek megfelelő ugrások vannak. Az értékek: $V_1=+16{,}36\,\mathrm{kN}$, $V_2=+16{,}36-10=+6{,}36\,\mathrm{kN}$, $V_3=+6{,}36-15\sin 30°=-1{,}14\,\mathrm{kN}$, $V_4=-16{,}14\,\mathrm{kN}$.



A nyomatéki ábra négy lineáris szakaszból áll, köztük törés van. Értékek a szakaszhatárokon: $M_1=0\,\mathrm{kNm}$, $M_2=+16{,}36\cdot 2=+32{,}72\,\mathrm{kNm}$, $M_3=+16{,}36\cdot 5-10\cdot 3=+51{,}84\,\mathrm{kNm}$, $M_4=+16{,}14\cdot 3=+48{,}42\,\mathrm{kNm}$, $M_5=0\,\mathrm{kNm}$.

Gyakorlópélda - 5

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

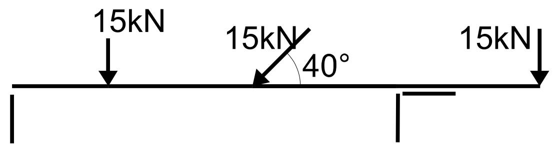
Reakciók:

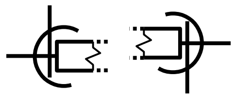
$\sum$:

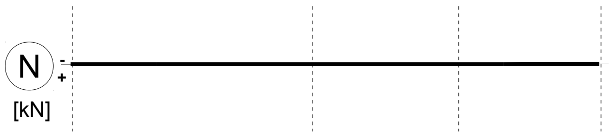
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:







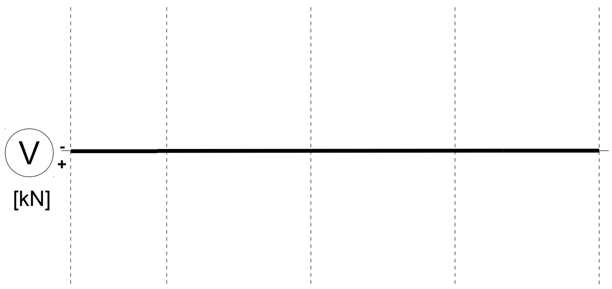
Milyen szakaszokból áll a normálerőábra? Mi történik a szakaszok között?

$N_3 =$

$N_1 =$

$N_2 =$

Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra? Mi történik a szakaszok között?



$V_4 =$

$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$

Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra? Mi történik a szakaszok között?

$M_5 =$

$M_4 =$

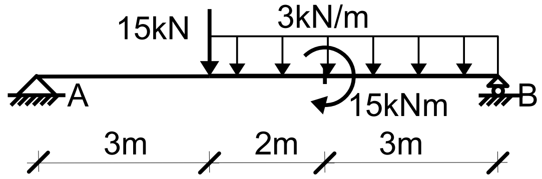
$M_1 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

Mintapélda – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

Reakciók:

$\sum M_i^{(A)}: -15\cdot 2-3\cdot 5\cdot 5{,}5-15+B\cdot 8=0$

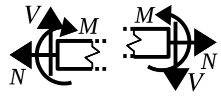
$\rightarrow B=17{,}81\,\mathrm{kN}(\uparrow)$

$\sum M_i^{(B)}: 15\cdot 5+3\cdot 5\cdot 2{,}5-15-A_z\cdot 8=0$

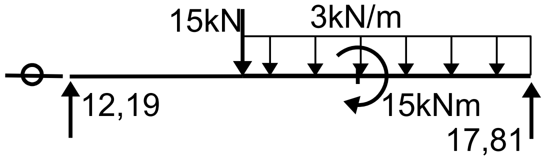
$\rightarrow A_z=12{,}19\,\mathrm{kN}(\uparrow)$

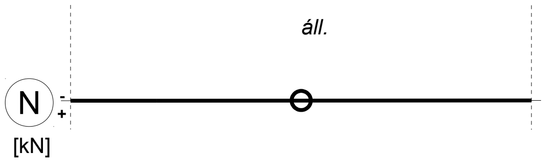
$\sum F_{ix}: A_x=0$

Ell.: $\sum F_{iz}: 15+3\cdot 5-12{,}19-17{,}87=0$

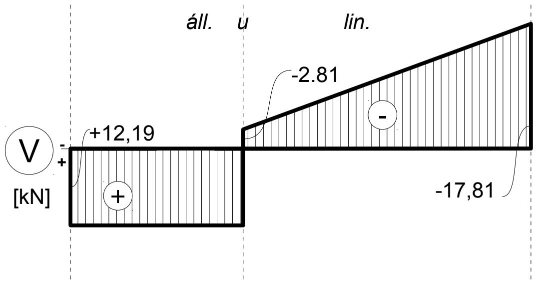


Eredményvázlat:

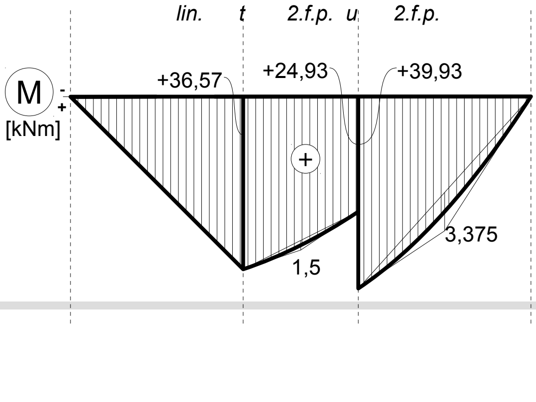




Normálerő csak vízszintes vetületű hatásból keletkezhetne. Nincs ilyen, így az ábra értéke mindenhol zérus.



A nyíróerőábra egy konstans és egy lineáris szakaszból áll, köztük az erőnek megfelelő ugrás van. Értékek: $V_1=+12{,}19\,\mathrm{kN}$, $V_2=+12{,}19-15=-2{,}81\,\mathrm{kN}$, $V_3=-17{,}81\,\mathrm{kN}$.

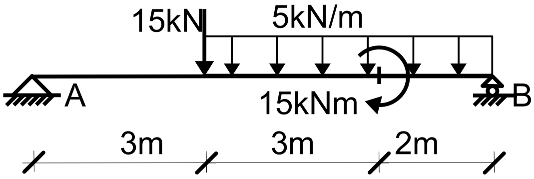


A nyomatéki ábra egy lineáris és két másodfokú szakaszból áll. A lineáris szakasz és a parabola között törés van, a két parabola között ugrás (de az érintők párhuzamosak). Értékek: $M_1=0\,\mathrm{kNm}$, $M_2=+12{,}19\cdot 3=+36{,}57\,\mathrm{kNm}$, $M_5=0\,\mathrm{kNm}$, $M_4=17{,}81\cdot 3-3\cdot 3\cdot 1{,}5=+39{,}93\,\mathrm{kNm}$, $M_3=17{,}81\cdot 3-3\cdot 3\cdot 1{,}5-15=+24{,}93\,\mathrm{kNm}$,

parabolák: $\dfrac{3\cdot 2^2}{8}=1{,}5\,\mathrm{kNm}, \dfrac{3\cdot 3^2}{8}=3{,}375\,\mathrm{kNm}$

Gyakorlópélda – 6

Erőtani számítás alapján rajzoljuk meg az alábbi tartó igénybevételi ábráit!



Megoldás

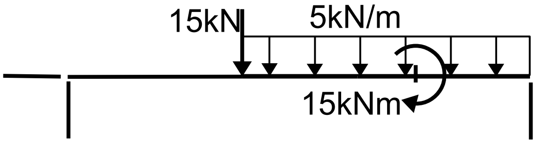
Reakciók:

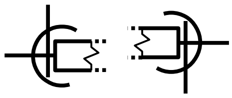
$\sum$:

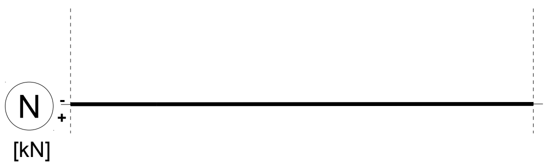
$\sum$:

$\sum$:

Eredményvázlat:

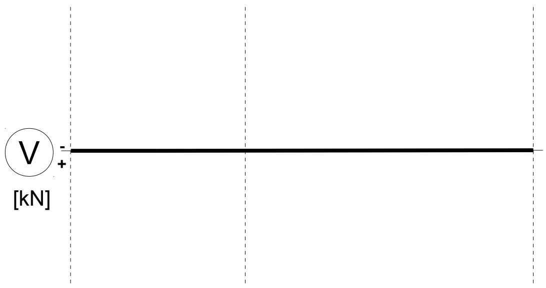






Milyen szakaszokból áll a normálerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$N_1 =$



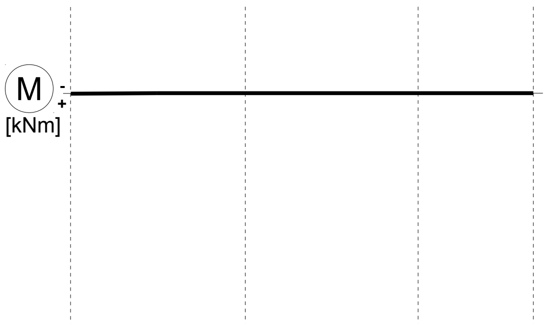
Milyen szakaszokból áll a nyíróerőábra?
Mi történik a szakaszok között?

$V_1 =$

$V_2 =$

$V_3 =$

zérushely: $V_m = 0 =$



Milyen szakaszokból áll a nyomatéki ábra?
Mi történik a szakaszok között?

$M_1 =$

$M_2 =$

$M_3 =$

$M_4 =$

$M_5 =$

parabolák: $\frac{q\,l^2}{8} = \frac{\quad}{\quad} =$

$\frac{\quad}{\quad} =$

maximum: $M_{max} =$