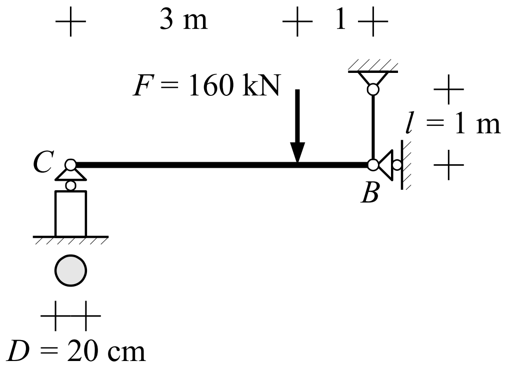
5. TISZTA HÚZÁS-NYOMÁS, PÉLDÁK I.

1. a) Határozzuk meg a függesztőrúd négyzetkeresztmetszetének a oldalhosszát cm-re kerekítve úgy, hogy a függesztőrúdban ébredő normálfeszültség ne érje el a σ_e = 180 MPa-t!



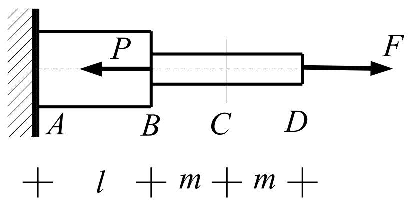
b) Mekkora a rúd megnyúlása? (E = 200 GPa)

c) Mekkora a megnyúlás, ha közben a rúd hőmérséklete $\Delta T = -30$°C-kal megváltozik?
(a lineáris hőtágulási együttható: $\alpha = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ °C^{-1})

d) Ellenőrizzük a C támasz alatti pillért! ($\sigma_{e,pillér}$ = 20 MPa, $\sigma_{e,talaj}$ = 1 MPa)

e) Mekkora rúderő volna szükséges a rúd megfolyásához? (σ_f = 220 MPa)

3. Határozzuk meg az F erő nagyságát, ha a rúd megrövidül $\Delta l_{AD} = -$ 0.35 mm-rel az F és P erő együttes hatására!

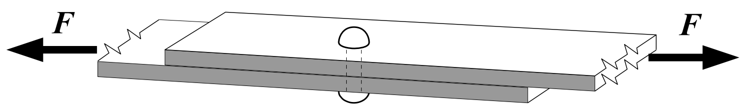


$A_{AB} = 350\ \text{mm}^2$
$A_{BD} = 150\ \text{mm}^2$
m = 30 cm
l = 40 cm
P = 125 kN

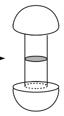
$E_{AB} = 210\ \text{GPa}$
$E_{BC} = 195\ \text{GPa}$
$E_{CD} = 150\ \text{GPa}$

Szegecskapcsolatok ellenőrzése:

1. Határozzuk meg a szegecs szárában ébredő nyírófeszültséget!
Adott: d a szegecs átmérője, F a lemezekre ható erő, τ_f a folyáshatár.



<u>Egyszer nyírt szegecskapcsolat:</u> egy elnyírt felület



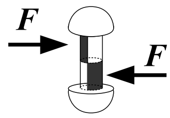
$$\tau = \frac{F}{\frac{d^2\pi}{4}}$$

F → nyíróerő

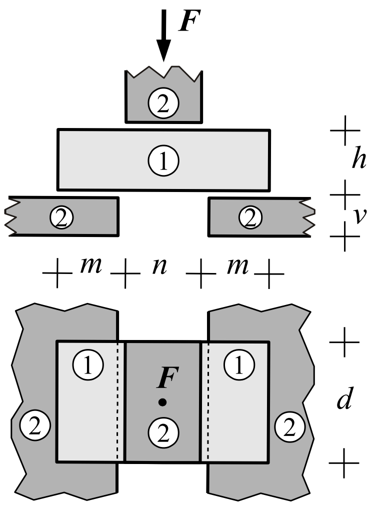
$\frac{d^2\pi}{4}$ → elnyírt felület

<u>További tönkremeneteli módok:</u>

- palástnyomás: a szegecsek száránál (most nem vizsgáljuk)
  (mindkét érintkező anyag teherbírásárát kell(ene) vizsgálnunk)
- lemezek tönkremenetele húzásra
- a lemez anyagának hosszanti elnyíródása a szegecsek két oldalán (most nem vizsgáljuk)



2. Mekkora erővel lehet átlyukasztani az *1.* anyagból készült lemezt n szélességben, ha adott az anyag nyíráshoz tartozó folyási határa: τ_{f1}? Legalább mekkora legyen a *2.* anyag τ_{f2} folyási határa, hogy eközben a *2.* anyagban ne következhessen be elnyíródás?



Az átlyukasztás feltétele: $\tau_{t1} = \dfrac{F}{2dh} \geqslant \tau_{f1}$

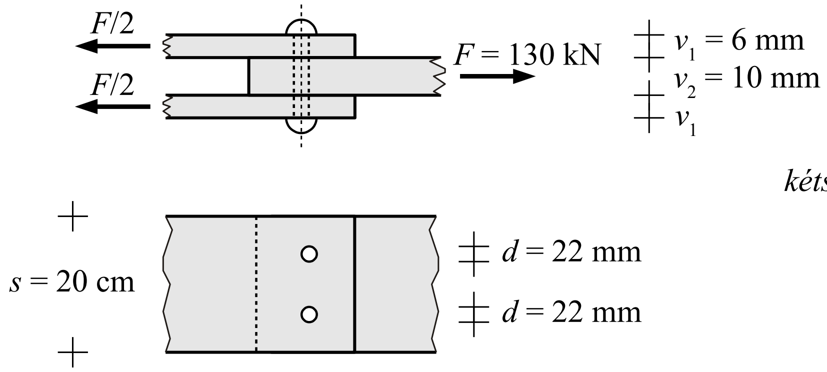
Innen: $F \geqslant \tau_{f1} \cdot 2dh$

Eközben a *2.* anyagban ébredő feszültség:

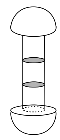
$$\tau_{t2} = \frac{F}{2(d+2m)\cdot v} \leqslant \tau_{f2}$$

6. TISZTA NYÍRÁS IV.

3. Ellenőrizzük a szegecseket nyírásra, a hevedereket húzásra, ha a megengedett feszültségek $\tau_e = 90$ MPa és $\sigma_e = 230$ MPa! (A lemezek ellenőrzése otthoni feladat.)



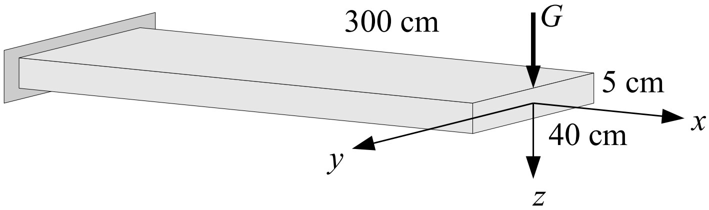
kétszer nyírt szegecskapcsolat:

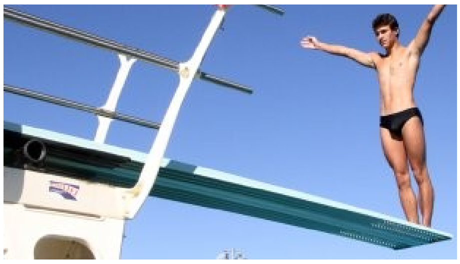


mintafeladat

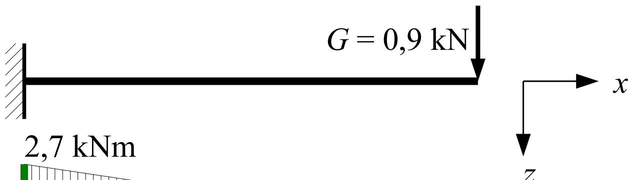
1. A képen látható műugró súlya $G = 0{,}9$ kN, a trambulin szabad hossza $l = 3$ m, szélessége $a = 40$ cm és (állandónak tekintett) vastagsága $b = 5$ cm (önsúlya elhanyagolható).

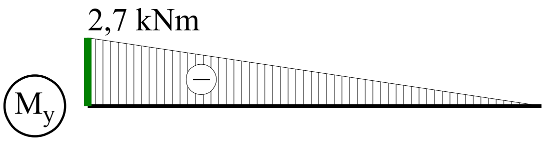
a) Készítsük el a konzoltartó nyomatéki ábráját!
b) Mekkora maximális húzó- és nyomófeszültség keletkezik a trambulin anyagában?
c) Mekkora a K konzolvég B befogáshoz képest mérhető elfordulása, ha az anyag rugalmassági modulusa $E = 15$ GPa?
d) Hogyan változnának az előbbi értékek, ha a gerendát hossztengelye körül 90 fokkal elforgatnánk?



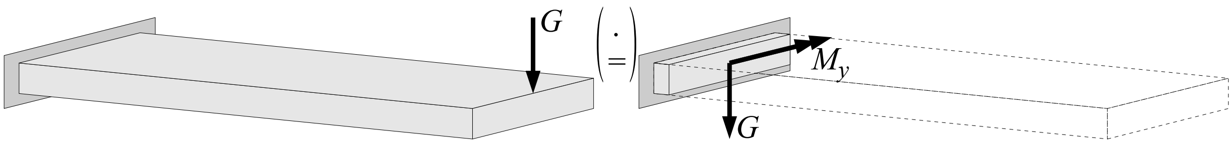


a)

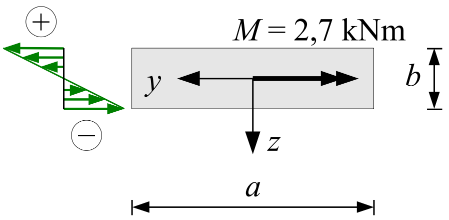




prizmatikus rúdban a maximális feszültségek a maximális nyomaték helyén keletkeznek



b) a keresztmetszet nézete:



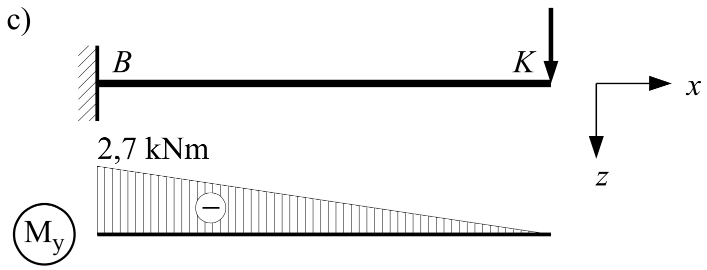
a maximális húzás felül ($z_{\max,f} = b/2$), a maximális nyomás alul ugyanilyen távolságban. Már csak I_y hiányzik:

$$\boxed{I_y} = \int_{(A)} z^2 \mathrm{d}A = \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} z^2 \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y = \int_{-a/2}^{a/2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2}\mathrm{d}y = \int_{-a/2}^{a/2}\frac{b^3}{12}\mathrm{d}y = \left[\frac{yb^3}{12}\right]_{-a/2}^{a/2} = \boxed{\frac{ab^3}{12}}$$

$$I_y = \frac{ab^3}{12} = \frac{40\cdot 5^3}{12} = 416{,}7\,\mathrm{cm}^4 \rightarrow \sigma_x^{\pm max} = \frac{M_y}{I_y}\frac{b}{2} = \frac{270}{416{,}7}\cdot 2{,}5 = \underline{\underline{1{,}620\,\frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}}}\,.$$

13. HAJLÍTÁS VI.

c)

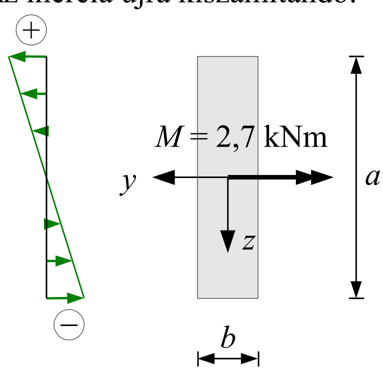


$$\Delta\varphi_y^{KB} = \int_0^l \kappa_y \,\mathrm{d}x = \int_0^l \frac{M_y(x)}{EI_y(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}\int_0^l M_y(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{EI_y}A_M \text{, azaz}$$

prizmatikus rúd — a nyomatéki ábra területe

$$\Delta\varphi_y^{KB} = \frac{1}{1500\cdot 416{,}7}\cdot\frac{(-270)\cdot 300}{2} = \underline{\underline{-0{,}06480\ \mathrm{rad}}}\ \text{(órával megegyező).}$$

d) Az inercia újra kiszámítandó:

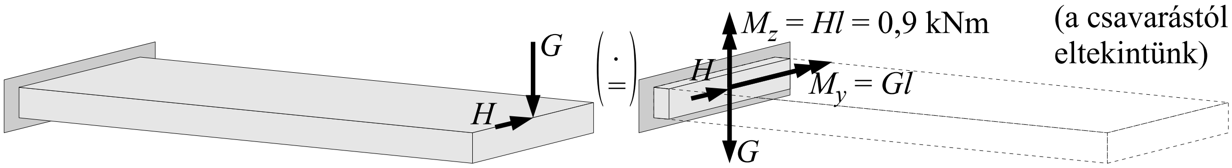


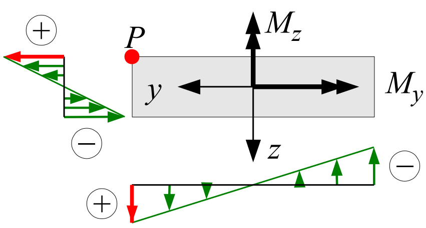
$$I_y = \frac{ba^3}{12} = \frac{5\cdot 40^3}{12} = 26670\ \mathrm{cm}^4$$

$$\sigma_x^{\pm max} = \frac{M_y}{I_y}\frac{a}{2} = \frac{270}{26670}\cdot 20 = \underline{\underline{0{,}2025\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}}}\ .$$

$$\Delta\varphi_y^{KB} = \frac{1}{1500\cdot 26670}\cdot\frac{(-270)\cdot 300}{2} = \underline{\underline{-0{,}001012\ \mathrm{rad}}}\ \text{(órával megegyező).}$$

Mi történik, ha a műugró ferdén rugaszkodik el ($H = 0{,}3$ kN)?

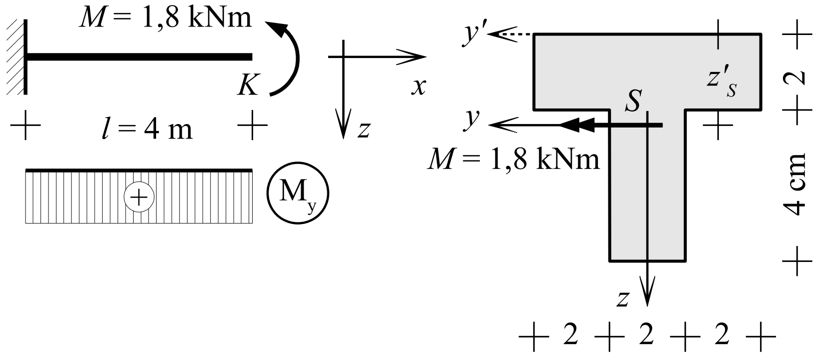




$$\sigma_x^P = \frac{270}{416{,}7}\cdot 2{,}5 + \frac{90}{26667}\cdot 20 = \underline{\underline{1{,}687\ \frac{\mathrm{kN}}{\mathrm{cm}^2}}} = \sigma_x^{+max}\ .$$

A szuperpozíció elve itt is érvényes (← φ_y, φ_z kicsi, illetve az anyag lineárisan rugalmas).
De mi a teendő, ha a szelvény "kevésbé" szimmetrikus?

3. Számítsuk ki a tartó mértékadó keresztmetszetében keletkező normálfeszültségeket! Határozzuk meg a rugalmas és képlékeny teherbírás, illetve a képlékeny többletteherbírás értékét! Mekkora a *K* keresztmetszet elfordulása és a rúd görbületi sugara?



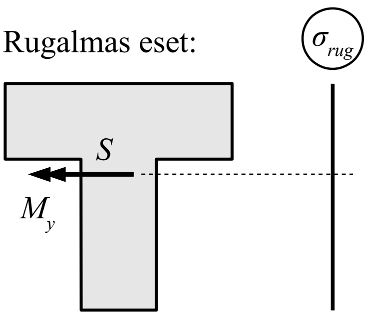
Adott:

$\sigma_e = \pm 195$ MPa

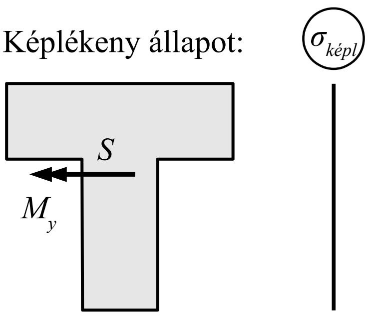
$\sigma_f = \pm 240$ MPa

$E = 65$ GPa

Rugalmas eset:

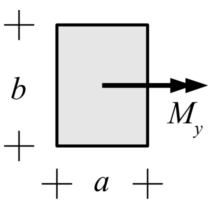


Képlékeny állapot:



4. OTTHONI GYAKORLÓ FELADAT

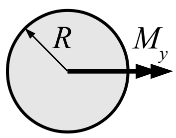
Határozzuk meg M^r, M^k és c értékét kör- és téglalapszelvény esetén!



$$M^r = \frac{I_y}{z_{max}}\sigma_f = \frac{ab^2}{6}\sigma_f$$

$$M^k = 2S_0\sigma_f = \frac{ab^2}{4}\sigma_f$$

$$c = \frac{6}{4} = 1{,}5$$



$$M^r = \frac{I_y}{z_{max}}\sigma_f = \frac{R^3\pi}{4}\sigma_f$$

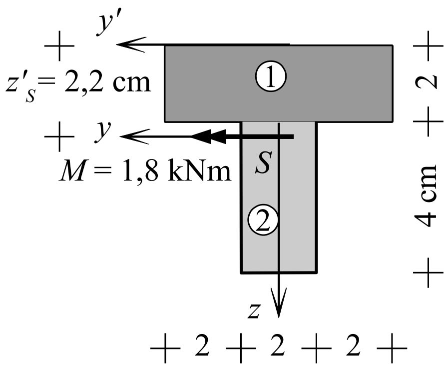
$$M^k = 2S_0\sigma_f = 2\,\frac{R^2\pi}{2}\,\frac{4\mathrm{R}}{3\pi}\sigma_f = $$

$$= \frac{4R^3}{3}\sigma_f \to c = \frac{16}{3\pi} = 1{,}698$$

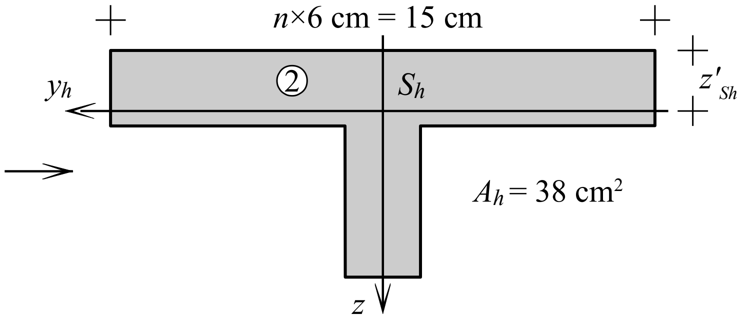
17. EGYENES HAJLÍTÁS IX.

1. Számítsuk ki a múlt órán vizsgált tartó befogási keresztmetszetében keletkező normálfeszültségeket, ha az öv és a gerinc anyaga különböző! $E_1 = 200$ GPa, $E_2 = 80$ GPa

$$n = \frac{E_1}{E_2} = 2,5$$



Helyettesítő keresztmetszet, helyettesítés a 2. anyaggal:



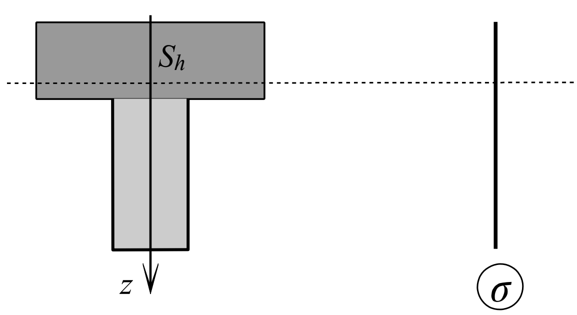
A helyettesítő súlypont, azaz a semleges tengely helye:

$z'_{Sh} =$

A helyettesítő inercia:

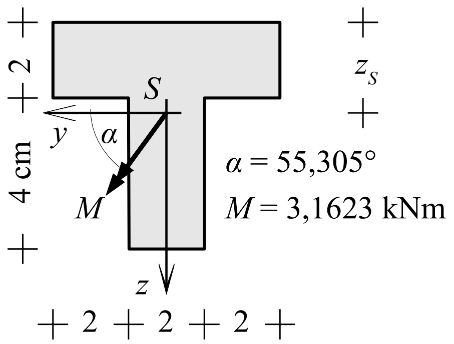
$I_{yh2} =$

Feszültségek a jellegzetes pontokban:



20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS III.

1. Határozzuk meg a keresztmetszetben a normálfeszültségeket! (ismétlés, lásd az előző órát)

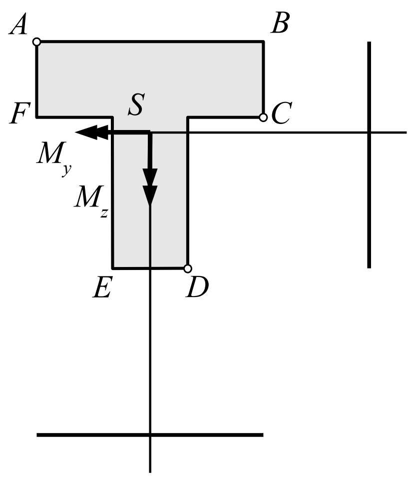


A keresztmetszetet egyenes hajlításra már vizsgáltuk:

$z_S = 2{,}2$ cm

$I_y = 57{,}867$ cm^4

$I_z = 38{,}667$ cm^4



← Ez az ábrarészlet már korábban szerepelt!

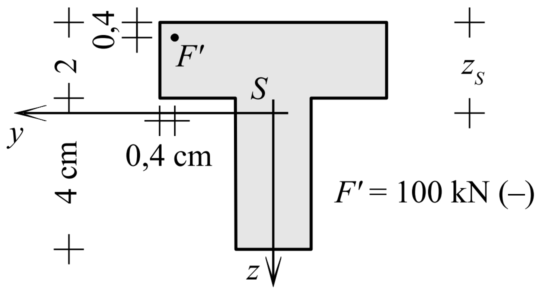
<u>*Maximális normálfeszültség keresése*</u>:

- vagy megvizsgálunk *minden* konvex sarkot, amely a semleges tengelytől legtávolabb *eshet*,
- vagy megállapítjuk a semleges tengely meredekségét, majd megkeressük a két legtávolabb fekvő pontot (görbevonalú keresztmetszetnél csak ez az út járható).

σ [MPa]

Húzásnak és nyomásnak egyaránt ellenálló keresztmetszet

2. Határozzuk meg a feszültségek szélsőértékeit!



$A = 20\ \text{cm}^2$

$z_S = 2{,}2\ \text{cm}$

$I_y = 57{,}867\ \text{cm}^4$

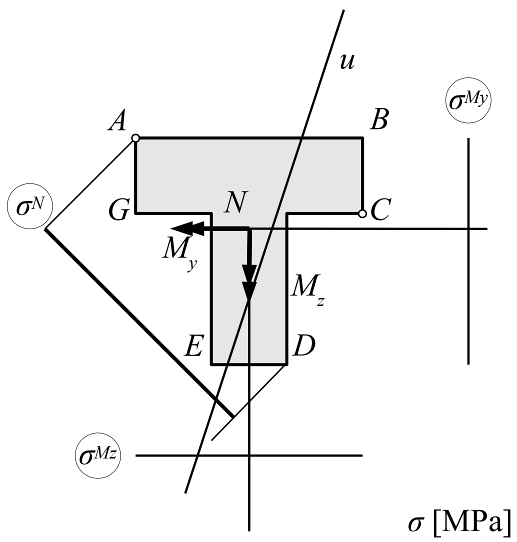
$I_z = 38{,}667\ \text{cm}^4$

$F' \doteq (N, M_y, M_z)$

(központos erő + nyomatékok):

$$\sigma_x = \pm\frac{N}{A} \pm \frac{M_y}{I_y} z \pm \frac{M_z}{I_z} y$$

A feszültségi szélsőértékek helye változatlan (A és C), a semleges tengely iránya szintén!

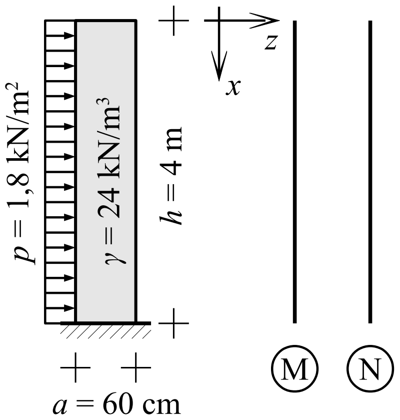


Megjegyzések:

- a normálerőből származó feszültségi ábra tetszőleges irányban vetíthető,
- a semleges tengely a tiszta hajlításhoz képest önmagával párhuzamosan tolódik el.

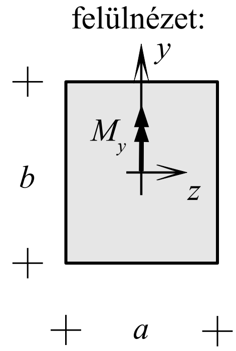
20. KÜLPONTOS HÚZÁS-NYOMÁS, PÉLDÁK V.

3. Határozzuk meg az oszlopban keletkező feszültségek szélsőértékeit, ha a megtámasztásnál húzás és nyomás adódhat át!



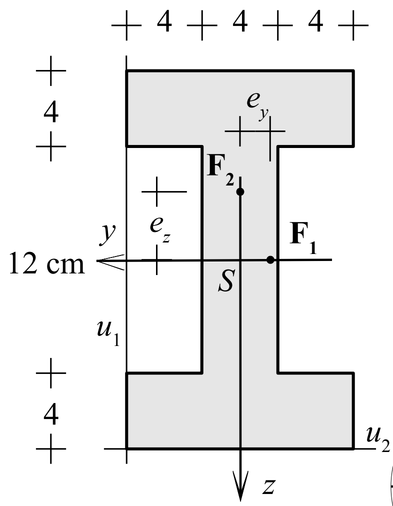
Tekintsük a fal b hosszúságú részét!

Az igénybevételek x függvényében:



húzásnak és nyomásnak is ellenálló megtámasztás esetén:

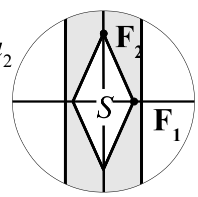
4. Határozzuk meg az **F** (húzottnak feltételezett!) erő azon helyzeteit, melyek esetén a semleges tengely rendre az u_1 és u_2 egyenesekkel esik egybe!



$A = 144\ \text{cm}^2$

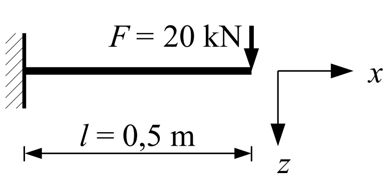
$I_y = 6848\ \text{cm}^4$

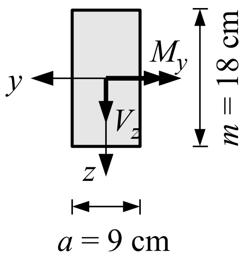
$I_z = 1216\ \text{cm}^4$



24. HAJLÍTÁS ÉS NYÍRÁS V.

1. Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség-eloszlást és a nyírófeszültség maximumát a megadott téglalapkeresztmetszet figyelembe vételével!

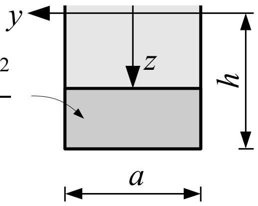




$M_y \neq 0$ és x mentén változik

$V_z = 20$ kN

a statikai nyomaték célszerű számítása: $S'_y(z) = \dfrac{ah^2}{2} - \dfrac{az^2}{2}$

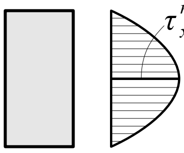


$$\tau_{xz} = \frac{V_z \, S'_y}{I_y \, s} \rightarrow \tau_{xz} \text{ maximumhelye } S_y(z) = \frac{a}{2}\left(\left(\frac{m}{2}\right)^2 - z^2\right) \text{ deriváltjából: } \frac{dS_y(z)}{dz} = -az = 0$$

állandó!

$\downarrow$

$z = 0$ (a súlyponti tengelyen) $\rightarrow S_y^{max} = \dfrac{am^2}{8} \rightarrow$

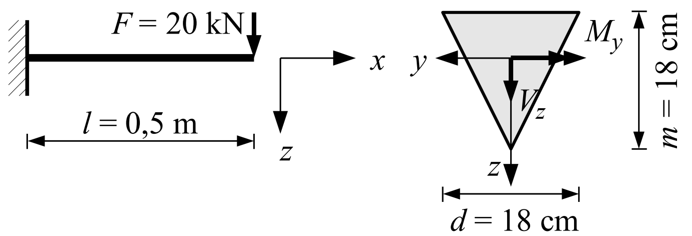


$\tau_{xz}^{max} = 1{,}852\,\text{MPa}$

(másodfokú)

$$\tau_{xz}^{max} = \frac{V_z \dfrac{am^2}{8}}{\dfrac{am^3}{12} a} = \frac{3\,V_z}{2\,am} = \frac{3 \cdot 20}{2 \cdot 9 \cdot 18} = \underline{\underline{0{,}1852 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}}}.$$

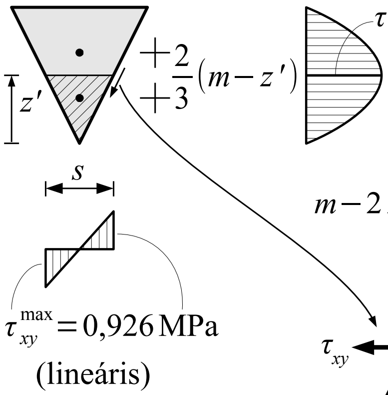
2. Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség-eloszlást és a nyírófeszültség maximumát a megadott háromszög-keresztmetszet figyelembe vételével!



$M_y \neq 0$ és x mentén változik

$V_z = 20$ kN

célszerű egy új z' koordinátát bevezetni a statikai nyomaték egyszerűbb számításához:



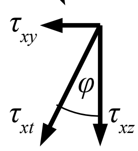
ez is másodfokú
(de pl. trapézra már nem volna az!)

állandó!

$$\tau_{xz}(z') = \frac{V_z}{I_y}\frac{S'_y}{s} \rightarrow \frac{S'_y}{s} = \frac{\frac{sz'}{2}\frac{2}{3}(m-z')}{s} = \frac{z'm - z'^2}{3} \rightarrow$$

$$m - 2z' = 0 \rightarrow z' = \frac{m}{2};\quad \tau_{xz}^{max} = \frac{36V_z}{dm^3}\frac{m^2}{12} = \frac{3V_z}{dm} = \frac{3\cdot 20}{18\cdot 18} = 0{,}1852\,\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

A τ_{xt} eredő nyírófeszültség a *kerületi* pontokban *érintőirányú*:

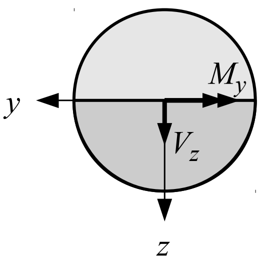


$$\tau_{xy}^{max} = \tau_{xz}^{max}\,\mathrm{tg}\,\varphi = \tau_{xz}^{max}\frac{d}{2m} = 0{,}0926\,\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2};$$

$$\tau_{xt}^{max} = \sqrt{\left(\tau_{xz}^{max}\right)^2 + \left(\tau_{xy}^{max}\right)^2} = \frac{\tau_{xz}^{max}}{\cos\varphi} = 0{,}2070\,\frac{\text{kN}}{\text{cm}^2}.$$

---

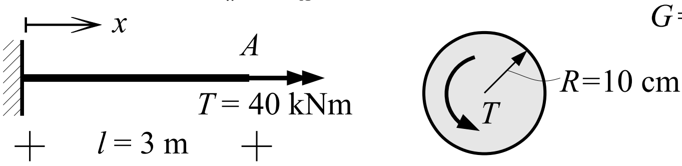
3. Határozzuk meg a függőleges nyírófeszültség maximumát, ha a konzol keresztmetszete most R = 5 cm sugarú kör!



9. KÖRSZIMMETRIKUS KERESZTMETSZET CSAVARÁSA, PÉLDÁK I.

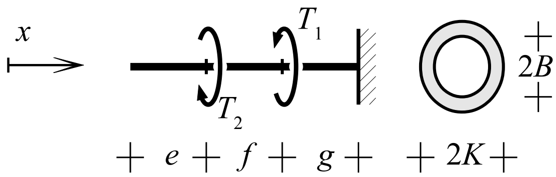
1. Meghatározandó: τ_x^{max}, φ_A, T^r, T^k, c.

$G = 3\cdot10^4$ MPa $\qquad \tau_f = 30$ MPa



T

2. a) Hol keletkezik és mekkora a nyírófeszültség maximuma?
b) Rajzolja fel az elcsavarodási ábrát a jellemző értékek feltüntetésével (radiánban)!



$K = 80$ mm		
$B = 60$ mm	$e = 2{,}5$ m	$T_1 = 42$ kNm
$\tau_f = 110$ MPa	$f = 3{,}2$ m	$T_2 = 19$ kNm
$G = 90$ GPa	$g = 3{,}2$ m	

[kNm] T

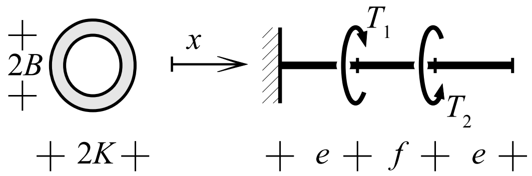
[rad/m] κ_x

[rad] φ_x

a)

b)

3. a) Hol keletkezik és mekkora a nyírófeszültség maximuma?
b) Rajzolja fel az elcsavarodási ábrát a jellemző értékek feltüntetésével (radiánban)!



$K = 80$ mm $e = 2{,}5$ m $T_1 = 42$ kNm
$B = 60$ mm $f = 3{,}2$ m $T_2 = 19$ kNm
$\tau_f = 110$ MPa
$G = 90$ GPa

[kNm] T

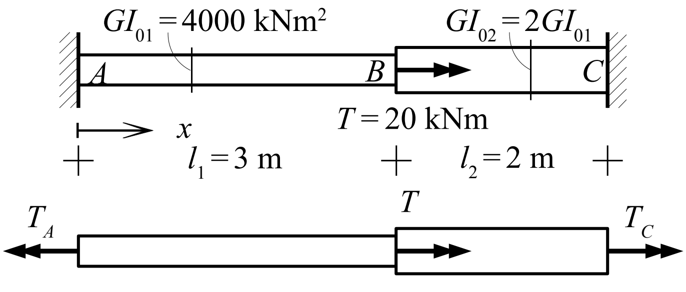
[rad/m] κ_x

[rad] φ_x

a)

b)

4. Határozzuk meg a külső reakciókat! Készítsünk fajlagos és tényleges elcsavarodási ábrát!



Elkülönítés: a nyomatéki reakciókat *pozitívnak* feltételezzük!

Egyensúlyi feltétel:

Geometriai feltétel:

T

κ_x

φ_x