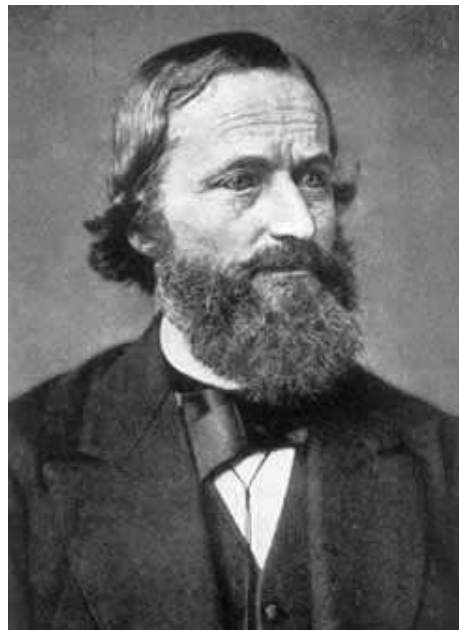


Kirchhoff, Love és a klasszikus lemezmodell

Lemezfeladatok vizsgálatára nagyon gyakran szükség van a mérnöki gyakorlatban. Az életrajzokat bemutató sorozat ezen fejezete két olyan tudós életével ismerteti meg az olvasót, akik – elődeik munkájára építve – mai formájukban létrehozták a lemezek számításához használatos alapvető egyenleteket.

Kirchhoff élete

Gustav Robert Kirchhoff 1824. március 12-én született a poroszországi Königsbergben.¹ Édesapját *Friedrich Kirchhoff*nak, édesanyját *Johanna Henriette Wittké*nek hívták. A család mindkét ágon Königsberg előkelőségei közé tartozott – több nemzedék óta töltötték be a porosz állam különféle magas rangú hivatalnoki posztjait –, például *Friedrich Kirchhoff* is udvari jogtanácsos volt. Mivel a kiválóan tanuló fiú már korán jelezte szüleinek, hogy akadémiai – oktatói, kutatói – pályára szeretne lépni, a család az egyetemi tanulmányok támogatása mellett döntött, hosszabb távon természetesen célként jelölve meg valamelyik egyetem vezetői pozíciójának betöltését. Ez a célkitűzés beleillett a Kirchhoff-család hagyományaiba, hiszen Poroszországban az egyetemek tanárait is az előkelő hivatalnokok kategóriájába sorolták, így Gustav szándéka nem zavarta meg a korábbi családi szokások kialakította rendet.



Az Albert porosz herceg által 1544-ben alapított *Königsbergi Albert Egyetemen*² kezdte (az egyetem főépületének XIX. századbeli képe látható baloldalt) tanulmányait 1843-ban. Két neves tudós, *Franz Ernst Neumann*³ és *Carl Gustav Jacob Jacobi*⁴ tartott ott akkoriban közösen⁵ – témáikat egymásra építve – matematika-fizika előadásokat, *Neumann* főleg a fizikai, *Jacobi* pedig matematikai háttérét magyarázta el az egyes kérdéseknek. Újszerű oktatási

¹ A város ma Kalinyingrád néven Oroszországhoz tartozik.

² Itt tanult és/vagy tanított többek között a filozófus *Immanuel Kant*, a költő *E. T. A. Hoffmann*, az ugyancsak költő *Gottfried Herder*, a matematikus *David Hilbert*, stb.

³ 1798 – 1895. Német fizikus és matematikus. Ásványtannal is foglalkozott.

⁴ 1804 – 1851. Német matematikus, sok függvénytani felfedezés származik tőle (elliptikus függvények, Jacobi-mátrix, stb.).

⁵ 1843-ban kezdték közös kurzusukat, és egészen 1846-ig tartották együtt. *Jacobi* ekkortól súlyos betegsége miatt már nem tudott előadni.

technikát alkalmaztak, például igyekeztek hallgatóikat is bevonni az előadásokba, kisebb feladatokat adva nekik, ezek megoldásait aztán a következő előadásokon közösen megvitatták. A negyvenes évek közepétől *Jacobi* egyre gyakrabban lett beteg, ezért az oktatás főleg *Neumannra* hárult. Az ő előadói stílusa⁶ és tudományos témái (ekkoriban publikálta legfontosabb elektrofizikai eredményeit) igen nagy hatással voltak a fiatal Kirchhoffra. *Neumann* hamarosan bevonta saját kísérleteibe a szorgalmas fiatalembert. Mivel *Jacobi* csak rövid ideig tudta oktatni, a matematikai tanulmányokat *Friedrich Julius Richelomál*⁷ folytatta.

1845-ben az „*Annalen der Physik und Chemie*“ című folyóiratban megjelent Kirchhoff első komoly tudományos publikációja az Ohm-törvény általánosításáról. Jóllehet ezt a munkáját a későbbiekben jelentősen bővítette és módosította, ez a cikk felhívta rá a nemzetközi tudományos közvélemény figyelmét.

Négyévi tanulás után 1847-ben sikerrel fejezte be egyetemi tanulmányait, disszertációjának elkészítését a kiváló matematikus, *Ludwig Otto Hesse*⁸ irányította. Dolgozata a csillagászatban használt számítások matematikai részleteivel foglalkozott, munkájának címe: „*De criteriis quibus cognoscatur an aequatio quinti gradus irreductibilis algebraice resolvi possit / De parallaxi stellae Argelandriae*”⁹.

Még ebben az évben tanárai javaslatára *Berlinbe* költözött, és az ottani egyetemen szerezte meg az egyetemi habilitációs fokozatot 1848-ban. Ezt követően szinte azonnal egy – fizetés nélküli – docensi állást is kapott. Ennek az évnek tavaszán *Berlinen* is átvonult az európai forradalmi hullám¹⁰, de sem ez, sem pedig az a tény, hogy közel másfél évig semmilyen fizetést nem kapott az egyetemtől munkájáért, nem befolyásolta különösképpen Kirchhoff életét, családja bőséges anyagi támogatásának köszönhetően hűvös nyugalommal távol tartotta magát mindentől, ami nem kapcsolódott közvetlenül egyetemi oktató és kutató¹¹ tevékenységéhez.

1849 decemberében Kirchhoff *Breslauba*¹² költözött, az ottani egyetemen bízták meg – immár rendes fizetésért – a kísérleti fizika oktatásával. Életének ebben a szakaszában született a számunkra fontos mechanikai publikációja a lemezek vizsgálatáról, de ezt majd külön pontban részletesen tárgyaljuk. 1851-ben szintén erre az egyetemre jött tanítani – és egy új

⁶ Egyetemi tanár korában is szeretettel emlékezett vissza *Neumannra*, és saját oktatási módszerében is igyekezett alkalmazni a tőle elsajátított, személyes kapcsolattartásra törekvő stílust.

⁷ 1808 – 1875. Német matematikus, *Jacobi* tanítványa.

⁸ 1811 – 1874. A mechanikában a szerkezeti és anyagi stabilitásvizsgálatoknál használatos Hesse-mátrix őrzi nevének emlékét.

⁹ „Az *Argelander-féle csillagok parallaxisának vizsgálatára alkalmazott ötödfokú egyenlet megoldhatóságának vizsgálata*”. A címben szereplő név *Fridrich Wilhelm Argelander*-ra, a kiváló finn-német csillagászra utal, akinek 324.000 csillag paramétereit leíró katalógusát egészen a XX. század közepéig használták világszerte.

¹⁰ Berlinben is utcai harcok voltak.

¹¹ Itt Berlinben kötött életre szóló barátságot *Emil du Bois-Reymond*dal (1818-1896), a kiváló fizikussal és élettankutatóval (ő vizsgálta először az idegi hálózatok elektromos tulajdonságait) és *Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz*-cal (1821-1894), a biomechanika önálló tudományát létrehozó tudóssal.

¹² Mai neve *Wroclaw* (Lengyelország).

laboratóriumot létrehozni – *Robert Wilhelm Eberhardt Bunsen*¹³, a híres német vegyész is, és hosszú ideig tartó, világraszóló eredményeket létrehozó együttműködés kezdődött a két tudós között, akik ráadásul személyesen is jó barátok lettek. *Bunsen* hamarosan „szűknek” találta *Breslaut*, három szemeszter után *Heidelbergbe*¹⁴ ment, ahol az ottani egyetemen tárt karokkal (és tanszékvezetői címmel) fogadták. 1854-ben hosszas rábeszélésének engedve *Kirchhoff* is *Heidelbergbe* költözött, ahol (*Bunsen* hathatós segítségével) azonnal professzori címet is kapott a *Fizika Tanszéken*¹⁵ (a két tudóst ábrázolja a jobb oldalon látható, ezekben az években készült fénykép, *Bunsen* a magasabb). Itt *Heidelbergben* találkozott egyébként újból másik régi barátjával, *Helmholtz*-cal, aki körül akkoriban ott már egy szabályos tudományos közösség szerveződött. Ehhez a társasághoz csatlakozva *Kirchhoff* új tudós barátokra is szert tett, megismerkedett többek között a filozófus *Eduard Zellerrel*¹⁶, a zoológus *Heinrich Alexander Pagenstecherrel*¹⁷ és a matematikus *Leo Königsbergerrel*¹⁸.



Kirchhoff 21 évet töltött *Heidelbergben*, élete legeredményesebb és legboldogabb időszakának tekintette ezeket az éveket. 1857. augusztus 16-án itt kötött házasságot *Clara Richelottal*, *königsbergi* tanára leányával. Házasságukból öt gyermek¹⁹ született. Sajnos 1869-ben *Clara* meghalt, *Kirchhoff* azonban három év múlva (1872. december 6-án) újból megnősült, a 34 éves *Genovefa Karolina Sophie Luise Brömmelt* vette feleségül²⁰.

Kiváló tanár volt, *Neumanntól* tanult közvetlen stílusa, lényegre törő, precíz magyarázatai és mindenekelőtt impulzívan bemutatott érdekes kísérletei nagyon népszerűvé tették a hallgatók között. Olyan – később világhírűvé váló – kiváló fizikusok tanultak nála, mint *Ludwig Eduard Boltzmann*²¹, *Heinrich Rudolf Hertz*²² és *Max Karl Ernst Ludwig Planck*²³.

¹³ 1811 – 1899. Az elektrolízis alkalmazásával állított elő igen nagy tisztaságú fémeket (króm, magnézium, mangán, stb.)

¹⁴ Egyeteme az egyik legjobb volt akkoriban a német államokban.

¹⁵ A „Kísérleti fizika” illetve emellett a „Matematikai fizika” című tárgyat tanította.

¹⁶ 1814 – 1908. *Immanuel Kant* követője a filozófiában. Népszerűek voltak filozófiatörténeti írásai.

¹⁷ 1825 – 1889. Paleontológiai munkásságáról híres. Ő hozta létre az első állandó zoológiai kiállításokat Németországban.

¹⁸ 1837 – 1921. Az elliptikus integrálok valamint a komplex függvények differenciálszámításának területén ismertek munkái.

¹⁹ Három fiú: *Robert*, *Ernst*, *Friedrich* és két leány: *Pauline* és *Eveline*. A gyermekek nem követték apjukat kutatói pályáján, a fiúk különféle állami hivatalnoki posztokat töltöttek be később.

²⁰ Ebből a házasságból már nem született gyermeke.

²¹ 1844 – 1906. Osztrák fizikus. Híresek a statisztikus mechanikával illetve a statisztikus termodinamikával kapcsolatos munkái.

²² 1857 – 1894. Német fizikus, elsősorban az elektromágneses hullámok vizsgálatáról ismert. Tőle származik a mai SI mértékegységrendszer is. Mechanikai kutatásai az érintkezési feladatoknál hoztak jelentős eredményeket.

²³ 1858 – 1947. Kiváló német fizikus, a kvantummechanika legjelentősebb alapítói közé tartozik.

Sajnos egyetemi kísérletezései közben olyan balesetek érték, amelyek egész további életére hatással voltak. Először az egyik szeme sérült meg súlyosan 1860-ban a nap színképeinek vizsgálata során, majd 1866-ban olyan szerencsétlenül esett el egy lépcsőn, hogy utána soha többé nem nyerte vissza teljesen mozgásképességét. Egy ideig tolószékhez volt kötve, később ez az állapota kicsit javult, de csak nehézkesen és többnyire mankóval tudott közlekedni. Nagyon sokat köszönhetett mindkét feleségének, akik igen gondosan ápolták és mindent megtettek azért, hogy teljesen tudományos munkájának szentelhesse az életét.

Hosszas vívódás után Kirchhoff úgy döntött, hogy felhagy fizikai kísérleteivel illetve a kísérleti fizika oktatásával és minden maradék energiáját az elméleti kutatásnak szenteli. Ennek megfelelően 1875-ben végülis elfogadta a *Porosz Akadémia* és *Berlini Egyetem* meghívását²⁴ az egyetem *Elméleti Fizika Intézetének* vezetésére. 1875. április 22-én Berlinbe érkezett és 26-án már meg is tartotta első rendes elméleti előadását. Igen nagy szorgalommal vetette bele magát a – számára részben új – témák oktatásába, az „*Elméleti fizika*” mellett ő adta elő a „*Matematikai optika*”, az „*Elméleti hőtan*”, az „*Elméleti elektromosság*” és a „*Szilárd testek és folyadékok mechanikája*” című tárgyakat is. Mindegyik témakörben igyekezett új anyagokat kidolgozni, ekkor született például híres munkája, a „*Vorlesungen über mathematische Physik*” négy hatalmas kötete.

Az új egyetem és város új barátokat is adott Kirchhoffnak, itt Berlinben ismerkedett meg *Ernst Werner von Siemens*²⁵-szel. Mozgáskorlátozott volta ellenére aktívan részt vett a főváros tudományos közéletében is, rendszeresen megjelent és hozzászólt például az *Elektrotechnikai Egyesület* vagy a *Fizikai Társaság* gyűlésein és szakmai vitáin.

1880-tól sajnos újabb egészségügyi gondjai keletkeztek. Egyre sűrűbben szédült, gyakori lázrohamai is voltak. Igen nagy erőfeszítéssel tartotta magát, de 1884-ben már egy időre abba kellett hagynia a tanítást. A következő évben még képes volt egy újabb szemeszter végig vitelére, de ez volt szervezetének utolsó tartaléka a hétköznapi élethez. Orvosai agydaganatot állapítottak meg nála, és ő türelemmel és méltósággal viselte betegségét. Szívós szervezete még két évig kitartott, de 1887. október 17-én egy hosszú lázroham végleg legyőzte, 7 éves szenvedés után, 63 éves korában elhunyt. Sírja *Berlin Schöneberg* városrészében a *Szent Mátyás* templom sírkertjében van, néhány méterre a *Grimm-testvérek* végső nyughelyétől.

Tudományos életműve mellett a Hold egy krátere is őrzi nevének emlékét.



²⁴ Ez már a harmadik felkérés volt, 1870-ben és 1872-ben Kirchhoff még köszönettel visszautasította az ajánlatokat.

²⁵ 1816 – 1892. Német feltaláló és üzletember, a későbbi elektrotechnológiai világcég alapítója és névadója.

Kirchhoff tudományos tevékenysége

Kirchhoff fizikus volt, eredményei így természetesen ehhez a tudományághoz kötődnek, bár életművének mechanikai vonatkozásai a mérnökök számára fontosak elsősorban.

Első említésre méltó tudományos sikerei még *Königsbergben* születtek, amikor 1845-ben közzétette a ma Kirchhoff-törvényekként ismert képleteit. Ezek az összefüggések lehetővé teszik az áram, a feszültség és az ellenállások számítását villamos hálózatokban. Jóllehet *Georg Simon Ohm*²⁶ publikációi már foglalkoztak vezetékek ellenállásának számításával, Kirchhoff egyenletei ennél szélesebb körűek voltak, hiszen ő az áram folyását leíró egyenleteket általánosította tetszőleges kialakítású hálózatok esetére. 1857-ben (már *Freibergben*) újabb értékes eredményekkel gazdagította az áramkörök viselkedését leíró modelleket.

Az 1850-es években *Breslauban* publikálta először mechanikai témájú eredményeit. Itt születtek lemezek vizsgálatával foglalkozó cikkei (lásd a lemezelméletről szóló, *külön összefoglaló pontot*), és a véges alakváltozások vizsgálatára alkalmas feszültségtenzorokról írt munkái. Az általa és olasz kollégája, *Gabrio Piola*²⁷ által – már korábban – javasolt feszültségjellemzést ma első és második *Piola-Kirchhoff*-tenzorként használjuk a mechanikában. Élete vége felé a *Berlini Egyetemen* egyébként újból elkezdett elméleti mechanikával foglalkozni, ekkor (1877-ben) jelentek meg változó keresztmetszetű vékony rudak háromdimenziós rezgéseiről írt munkái.

Egyik legjelentősebb tudományos alkotása az volt, amikor *Bunsennel* együtt *Freibergben* 1859-ben felfedezte, hogy *minden izzásig felmelegített elem rá jellemző színű fényt* bocsát ki. Ezt a fényt prizmával felbontva az adott elemre jellemző egyedi hullámhossz-sorozat adódik, ezt a mintát pedig *fel lehet használni az anyag pontos* azonosítására. Kirchhoff a színképelemzést a Nap összetételének a tanulmányozására is alkalmazta, és vizsgálataiban azt találta, hogy a fénynek egy adott gázon való áthaladásakor a gáz pontosan azokat a hullámhosszakat nyeli el, amelyeket felhevítve kibocsát. Ezzel az elvvel magyarázta meg a Nap színképében talált sok sötét vonalat, az úgynevezett *Fraunhofer*²⁸-vonalakat. Felfedezésével új korszak kezdődött a csillagászatban, hiszen így már lehetőség nyílt a csillagok anyagának vizsgálatára. A színképelemzés új kémiai elemek megtalálását is segítette, így 1860-ban a *céziumot*, 1861-ben pedig a *rubídiumot* sikerült felfedeznie.

1862-ben közölte egyik újabb fontos felfedezését az úgynevezett „*fekete-test sugárzásról*” („*fekete test*”-nek nevezte Kirchhoff azokat az objektumokat, amelyek az összes rájuk eső fényt elnyelik), ez a kvantummechanika későbbi fejlődéséhez (például *Max Planck* munkáihoz) nyújtott komoly segítséget.

Összességében elmondható, hogy Kirchhoff a XIX. század fizikájának legjelentősebb személyiségei közé tartozik, kutatói munkája fontos eredményekkel gazdagította a tudományt, oktatói-nevelői tevékenysége pedig kiváló XX. századi fizikusok munkáját segítette elő.

²⁶ 1879 – 1854. Német fizikus, az elektromos hálózatok ellenállásaival kapcsolatos kutatásairól ismert.

²⁷ 1794 – 1850. Olasz fizikus, a Milánói Egyetem oktatója és kutatója volt, elsősorban elméleti szilárdságtani vizsgálatokkal foglalkozott.

²⁸ *Joseph von Fraunhofer* (1787 – 1826) német fizikus. Kiváló optikus is volt (csillagászati lencsákat készített), de elsősorban a napsugárzás elemzéséről ismert.

Love élete

Augustus Edward Hough Love 1863. április 17-én született Angliában, *Weston-super-Mare*-ban, a nyugat-angliai *Brestoncsatorna* partján fekvő kisvárosban. Édesanyját *Emily Serle*-nek, orvos édesapját pedig *John Henry Love*-nak hívták. Egy idősebb bátyja és két – nála fiatalabb – leánytestvére volt. Apja kezdetben sebészként dolgozott, később azonban rendőrorvosi állást vállalt a közép-angliai *Wolverhampton*-ban, Love már itt végezte elemi tanulmányait. A feljegyzések szerint az átlagosnál valamivel gyengébb tanuló volt, a csöndes fiú ekkor még semmiben nem tűnt ki társai közül.

Helyzete azonban lassan, de fokozatosan változott, középiskolai eredményei egyre jobbak lettek, és 1881-ben (18 éves korában) első próbálkozásra elnyert egy ösztöndíjat a *cambridge-i St. John's College*-ba. A családban komoly vita kezdődött arról, hogy a humán, vagy a természettudományok irányában folytassa tanulmányait a fiatal egyetemi hallgató, de Love egyre inkább elkötelezte magát az utóbbiak és azon belül is a matematika mellett.



Érdekes végigkövetni Love tanulmányi eredményeit kisgyermek korától az egyetem befejezéséig. Ha valakire, akkor őrá teljes joggal illik a „későn érő” jelző, mert a kezdetben kifejezetten szerény képességűnek tartott fiú szinte minden évben javított korábbi eredményein, az 1880-as évek közepén pedig már odáig jutott, hogy évfolyamelső lett *Cambridge*-ben a matematika szakon. 1886-ban megválasztották a *St. John's College* rendes tagjának, 1887-ben pedig elnyerte az egyetem legmagasabb kitüntetését, a fizikai illetve mechanikai kutatási eredményekért járó *Smith*²⁹-díjat. 1894-ben már a *Royal Society* is rendes tagjává választotta. Ezekben az években *Cambridge*-ben publikálta a mérnökök számára legfontosabb művét, amely évtizedekig volt világszerte a szilárdságtan oktatásának legalapvetőbb forrásmunkája, az eredeti kiadásban két kötetben megjelenő „*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*” című könyvét. Ahogy a XIX. század közepétől annak végéig *Saint-Venant*³⁰ munkái voltak a legalapvetőbb művek a mechanikát szerető mérnökök számára, úgy lett a század végétől egészen a XX. század közepéig hasonló „segédkönyv” Love minden túlzás nélkül monumentálisnak nevezhető alkotása³¹.

1899-ben Love munkahelyet változtatott, *Cambridge*-ből³² *Oxford*-ba költözött, az ottani egyetem Természettudományi Karán vállalt oktatói állást³³. Akkoriban elsősorban geofizikai

²⁹ Olyan tudósok kapták meg ezt az elmúlt évszázadokban, mint *Airy*, *Stokes*, *Kelvin*, *Maxwell*, *Rayleigh*, *Fred Hoyle*, stb. Magát a díjat egy angol matematikus, *Robert Smith* alapította végrendeletében 1768-ban.

³⁰ 1797 – 1886. Kiváló francia mechanikus, a szilárdságtan tudományának első nagy összegzője és rendszerezője.

³¹ A könyv a későbbiekben számos új kiadást ért meg, Love folyamatosan beépítette művébe a legújabb eredményeket. Érdekes összevetni az 1892-ben megjelent első kiadást például egy 1927-es változattal...

³² 1927-ben régi intézete, a *cambridge-i St. John's College* örökös tiszteletbeli taggá választotta. Pár hónappal később az *oxfordi Queen's College*-től ugyanezt a megtisztelő címet kapta...

³³ Ott is maradt élete végéig ugyanazon a Tanszéken, *Otto Mohr*-hoz hasonlóan nem tartozott az állásaikat gyakran változtató kutatók közé.

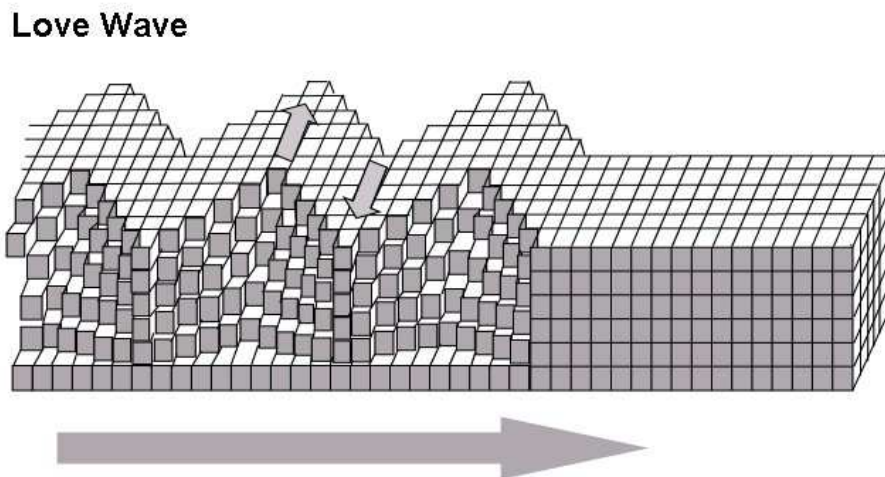
kérdések foglalkoztatták, 1911-ben jelent meg erről a témaköréről írt „*Some Problems in Geodynamics*” című könyve. Sorra kapta az újabb és újabb elismeréseket (1909-ben a *Royal Society*-től a *Royal Medal*-t, 1911-ben az oxfordi egyetemtől az *Adams-díjat*, kicsit később, 1926-ban a *Londoni Matematikai Társaságtól* a *De Morgan Medal*-t, 1937-ben újra a *Royal Society*-től a *Sylvester Medal*-t). 1895 és 1910 között a Londoni Matematikai Társaság titkárává, majd rá két évre a Társaság elnökévé választották.

Love szinte élete minden percét munkájának szentelte. Sohasem nősült meg, oxfordi háztartását fiatalabbik húga vezette, szerető gondoskodással ügyelve bátyjára. A legkiválóbb professzorok közé sorolták hallgatói, előadásai a tiszta, logikus gondolkodás és az elegáns stílus mintaképei voltak. Magánéletében és egész megjelenésében ugyanakkor volt valami szeretetreméltó és jóindulatú bogarasság, ami különösen kedvelté tette őt az oxfordi és londoni társaságokban, sok barátot szerezve neki mindenütt. Ő volt a hagyományos „angol professzor” mintaképe, és ő mindig meg is felelt ennek a modellnek.

Hosszú és mindvégig munkában eltöltött élet után hunyt el *Oxfordban* 1940. június 5-én. A Holdon az ő nevének emlékét is őrzi egy róla elnevezett kráter.

Love tudományos tevékenysége

Mechanikai kutatásai mellett Love nevét hullámmechanikai vizsgálatai őrzik. Az előbb említett (1911-ben publikált) geofizikai munkájában Love a földkéreg vizsgálatára alkalmas hullámok elemzésével foglalkozott. Matematikai számításokkal modellezte a földkéregben terjedő különböző hullámok típusait, és rámutatott a felszínen terjedő úgynevezett nyírás hullámváltozatok fontosságára. Az alábbi ábra ezeknek a felületi hullámoknak a terjedésére mutat be egy egyszerű modellt:



Ezt a felszínen terjedő hullámtípust ma a szeizmológusok *Love-hullámnak* nevezik. Erős földrengéseknél kimutatható, hogy akár többször képesek megkerülni a Földet a teljes csillapodás előtt. Az állatok viselkedésével foglalkozó kutatók azt is bebizonyították, hogy kutyák és macskák is nagyon érzékenyek ennek észlelésére, ez az oka annak a régi megfigyelésnek, hogy ezek az állatok képesek előre jelezni egyes földrengéseket.

A mérnökök az elméleti szilárdságtan akkori összefoglalását leíró munkája mellett elsősorban a lemezmodellhez kapcsolódó publikációját ismerik. Mielőtt végső témaként erre térnénk rá, még megemlítjük, hogy Love a vékony lemezek és héjak *rezgésvizsgálatával* is nagyon sokat foglalkozott.

A vékony rugalmas lemez klasszikus modelljének kialakulása

A klasszikus gerendamodellel kialakulásáról szóló fejezetben³⁴ már említettük, hogy milyen hosszú – több évszázadon keresztül tartó – munka vezetett a minden szempontból megfelelő és a gyakorlat számára is elegendően egyszerű modell létrehozására. Hasonló a helyzet a lemezek vizsgálatával, itt is több mint száz év kellett ahhoz, hogy a XX. század elejére a mérnöki tankönyvekben megjelenjenek a ma is ismert és használt alapvető képletek.

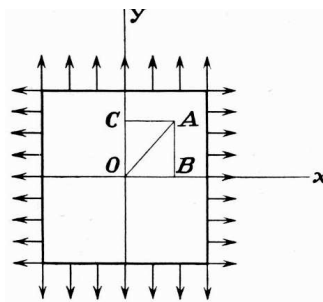
A vékony rugalmas lemezekkel foglalkozó munkák világszerte legtöbbször két kutató nevéhez kötik a végleges lemezegyenletek megformálását és ennek megfelelően *Kirchhoff-Love-modell*ről beszélnek. Ezt az elnevezést fogadjuk el mi is, hiszen éppen ezért mutattuk be a lemezelmélet szempontjából legfontosabbnak ítélt tudósok életét. Meg kell említenünk, hogy egyes munkákban néha a *Germain-Kirchhoff-féle* jelzővel is lehet találkozni, és mint látni fogjuk, ennek az elnevezésnek is van alapja. Ha még pontosabbak akarnánk lenni, akkor – ahogy azt a klasszikus gerendamodellnél is tettük – jóval hosszabb elnevezést kellene alkalmaznunk, a:

„*Germain – Poisson - Navier – Kirchhoff – Kelvin – Levy – Love-féle modell*”

valójában megfelelőbb név lenne, de valószínűleg sokkal nehezkesebben lenne használható...

A lemezek vizsgálatának kezdetei még az itt említett neveknel is régebbre nyúlnak vissza. Először *Eulernál*³⁵ merült fel a rugalmas anyagú felületszerkezetek vizsgálatának ötlete, méghozzá nem a statikai, hanem a rezgéstani feladat megoldásának kapcsán. *Euler* egy 1767-ben megjelent³⁶ cikkében egy téglalap alakú rugalmas membrán rezgésvizsgálatánál a rendszert úgy jellemezte, mint egymásra merőlegesen kifeszített rugalmas szálak együttesét (lásd az alábbi ábrát) és az alábbi differenciálegyenletet³⁷ javasolta az elmozdulások meghatározására:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 w}{\partial y^2},$$



ahol w a síkra merőleges eltolódás kétváltozós függvénye, t az időváltozó, A és B pedig konstansok.

Néhány évvel később az akkoriban szintén Szentpétervárott dolgozó *Jacques Bernoulli*³⁸ is írt egy cikket³⁹ lemezekről, ő már a statikus viselkedés közelítő modellezésére törekedett. A

³⁴ Lásd a „*Bernoulli, Navier és a klasszikus gerendamodellel*” című életrajzot.

³⁵ 1707 – 1783. Kiváló svájci származású tudós, egyike a világ legnagyobb matematikusainak. Nagyon sokat tett a mechanika fejlődéséért. Életéről bővebben olvasható a róla készült életrajzban.

³⁶ „*Novi Comm. Acad. Petropolitanae*”, Vol. X. pp. 243, 1767.

³⁷ Érdekességként megjegyezzük, hogy ez a modell kicsit később, csengők rezgésvizsgálatánál újból felbukkant Euler munkáiban.

³⁸ 1759 – 1789. *Daniel Bernoulli* unokaöccse. Nem tévesztendő össze *Jacob Bernoullival* (1654 – 1705), akit az életrajzok néha szintén *Jacques* keresztnéven említenek.

derékszögű négyszög alaprajzú lemezt egymásra merőleges gerendák segítségével modellezte az alábbi differenciálegyenlet segítségével:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q,$$

ahol q -val jelölte a lemezre merőleges megoszló terhelés függvényét és D -vel a lemez merevségét. *Bernoulli* maga hangsúlyozta, hogy kizárólag téglalap alakú tartományokkal kívánt foglalkozni és egyenletét csak közelítő modellnek szánja, mert a „valódi” mechanikai állapotot leíró egyenletek szerinte ennél lényegesen bonyolultabbak... Csak szabad feltámaszkodású lemezekkel foglalkozott, másféle peremfeltételeket nem használt.

A sorban a következő említésre méltó publikáció egy kiváló német fizikus, *Ernst Florens Friedrich Chladni*⁴⁰ tollából született⁴¹ 1802-ben. Ő elsősorban a lemezek rezgéseinek kísérleti elemzésével foglalkozott. Gondosan végrehajtott modellkísérleteiben a lemezekre szórt finom homokban kirajzolódó csomóvonalak segítségével vizsgálta a különböző frekvenciákhoz tartozó rezgéseképeket⁴². 1809-ben könyvét lefordították franciára, és a Francia Tudományos Akadémia rögtön meghívta Párizsba, hogy mutassa be ott is kísérleteit. Az előadáson részt vevő Napóleont lenyűgözte a látványos bemutató, megduplázta a Chladninak a bemutatóért az Akadémia által ígért 3000 frankot, és azonnal megbízta az Akadémiát, hogy tűzzön ki jutalmat (1 kg színarany volt a díj) a bemutatott kísérletek elméleti háttérét igazoló matematikai modell létrehozásának jutalmazására.

A császár parancsára az Akadémia ezt azonnal megtette⁴³ - két évet adva a jelentkezőknek a munkára – a végső beadási határidőt 1811. október végére tűzték ki. Erre az időpontra mindössze egy hölgy, *Marie-Sophie Germain*⁴⁴ adta be pályázatát. Ő korábban más jellegű elméleti témákon dolgozott, de a pályázati felhívás hatására elkezdett lemezekkel foglalkozni. Tanulmányozta *Euler* rugalmas görbéről írt cikkeit és variációs elveit, és ennek alapján úgy vélte, hogy az *Euler* által használt módszer segítségével a lemez alakváltozási energiája az alábbi integrál segítségével építhető fel:

$$A \iint \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 ds,$$

ahol ρ_1 és ρ_2 a hajlított lemez főgörbületi sugarai, A pedig konstans. A *Lagrange*⁴⁵ elnökletével működő bíráló bizottság sajnos hibát talált az integrál számításában, ezért *Germain* nem kapta meg a jutalmat. *Lagrange* azonban azt javasolta, hogy hosszabbítsák meg

³⁹ *Nova Acta, Vol. V. St.Petersburg, 1789.*

⁴⁰ 1756 – 1827. *Chladni* elsősorban a hangsebesség különböző gázokban történő méréseiről ismert. Megjegyezzük, hogy kiváló muzsikusként is volt.

⁴¹ Könyvének címe: „*Die Akustik*” (Lipcse, 1802).

⁴² A kísérleti mechanikában *Chladni-vonalaknak* hívják ezeket a görbákat.

⁴³ A császári kincstárból átutalt pénzügyi fedezetre építve...

⁴⁴ 1776 – 1831. Francia matematikus. A számelmélet és a differenciálgeometria területén alkotott jelentős műveket. Már fiatal korában elkezdett a matematika és fizika után érdeklődni, kisgyermekként *Newton* „*Principia*” című műve volt egyik legelső olvasmánya. Korának legjobb matematikusaival (*Lagrange, Gauss, Legendre*) folytatott állandó levelezést.

⁴⁵ *Giuseppe Lodovico Lagrangia* (ismertebb nevén *Joseph-Louis Lagrange*, 1736 - 1813) olasz származású kiváló matematikus. *Euler* ajánlatára 20 évig vezette a Porosz Tudományos Akadémiát. Jelentős alkotásai vannak az analitikus mechanikában is.

a határidőt és adjanak lehetőséget a hiba kijavítására (*Lagrange* egyébként írásos véleményében javaslatot is tett *Germain*nek, hogy hogyan lehetne megtalálni a megoldást).

Újabb két év múlva *Germain* (ismét egyedüli pályázóként beadott) módosított dolgozatában a következő differenciálegyenletet javasolta numerikus modellnek:

$$k \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

A bizottság ezt már elfogadta, de most azt kifogásolták, hogy nem kaptak fizikai magyarázatot az eredeti (főgörbületekkel megadott) integrál felírásának indoklására, így újból nem ítélték neki oda a pénzjutalmat. Az ügy az Akadémia Elnöksége elé került (*Lagrange* akkor már halott volt), és az Elnökség valamilyen oknál fogva úgy döntött, hogy harmadszorra is kitűzi a díjat. 1816-ban (akkor már a *Bourbonok* ültek Franciaország trónján) *Germain* ismét beadta⁴⁶ pályázatát, amit az (akkori) bizottság fenntartásokkal ugyan, de végülis elfogadott⁴⁷, *Germain* öt év után végre megkapta a jutalmat a feladat megoldásáért⁴⁸. Eredményeit figyelembe véve mindenesetre kijelenthető, hogy ő volt az első tudós, aki fontos eredményeket ért el a használható lemezmodell létrehozásában⁴⁹.

*Germain*nel párhuzamosan *Simeon Denis Poisson*⁵⁰ is végzett számításokat⁵¹ a lemez viselkedésének leírására. Fizikai magyarázatot keresve *Germain* 1813-ban publikált parciális differenciálegyenletéhez, úgy vélte, hogy a lemezt alkotó elemi részecskék (az ő szóhasználatával élve: „molekulák”) közötti erők egyensúlyának vizsgálatával írható le az igazi ok. Modelljében feltételezte, hogy ezeknek a részecskéknek a hatása a lemez középsíkjában összpontosul, így a *Germain-féle* egyenletben szereplő k állandót a lemezvastagság négyzetével⁵² hozta összefüggésbe. *Poisson* azt is kimutatta, hogy *Sophie Germain* differenciálegyenletéhez célszerűbb egy általánosabb főgörbületi integrálalakkból kiindulni:

$$A \iint \left[\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right)^2 + m \left(\frac{1}{\rho_1^2} + \frac{1}{\rho_2^2} \right) \right] ds,$$

amely (A és m megfelelő kiválasztásával) valóban a hajlított vékony rugalmas lemez pontos alakváltozási energiáját adja.

Néhány évvel később *Poisson* újból visszatért ehhez a kérdéshez. Életművének mechanikához kapcsolódó két legfontosabb munkája, a „*Mémoire sur l'équilibre et le mouvement des corps*

⁴⁶ 1821-ben Párizsban „*Recherches sur la théorie des surfaces élastiques*” címmel kiadta dolgozatának végleges változatát.

⁴⁷ A harmadik változat sem tartalmazott meggyőző választ a második forduló bírálatában felvetett kérdésekre.

⁴⁸ Valamiért nem volt hajlandó elmenni a hivatalos díjátadási ünnepségre, úgy kellett neki kézbesíteni a jutalmat.

⁴⁹ A teljesség kedvéért megjegyezzük, hogy a XX. században sok tudós, köztük például *Truesdell*, a kiváló amerikai kutató bírálta *Germain* munkáját és kételyét fejezte ki annak eredetiségét illetően...

⁵⁰ 1781 – 1840. Kiváló francia matematikus, sokat foglalkozott mechanikai feladatokkal is. Életéről lásd a „*Poisson és a Poisson-tényező*” című életrajzt.

⁵¹ Eredményeit a Francia Akadémiának 1814-ben elküldött tanulmányában közölte („*Mémoires*”, Párizs, 1814.)

⁵² A ma használt köbös összefüggés helyett.

élastiques⁵³”, illetve a „*Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps élastiques et des fluides*”⁵⁴ 1829-ben és 1831-ben jelent meg Párizsban. Ezekben a tanulmányokban jelent meg először a statikus terhekkel igénybe vett lemez

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

ma is ismert differenciálegyenlete, ahol D a lemez hajlítási merevsége ($\nu=0,25$ értékű, konstans (!) Poisson-tényezővel és a vastagság négyzetes hatásával számítva), q pedig a megoszló terhelés. Foglalkozott a peremfeltételekkel is, vizsgálta például a befogott illetve minden oldalon szabadon felfekvő peremek hatását. Azoknál az éleknél, ahol előírt nagyságú erő működik, *Poisson* három peremfeltételt adott meg: a nyíróerőkre, a csavaró- és hajlítónyomatékokra⁵⁵.

Megjegyezzük, hogy kör alakú lemez esetére átírta az előbb bemutatott differenciálegyenletet polárkoordinátás változatra, továbbá speciális terhekre és egyszerű (befogott, megtámasztott) peremfeltételekre megadta a feladat megoldását is. Foglalkozott a lemez szabad rezgéseinek modellezésével, és többféle esetre – például kör alakú változatra – levezette a megoldást is.

A lemezek vizsgálatának történetében a következő említésre méltó tudós ismét francia, *Claude Louis Marie Henri Navier*⁵⁶. Először 1820 nyarán adott be egy tanulmányt⁵⁷ a Francia Akadémiának, majd az 1826-ban megjelent összefoglaló művében („*Résumé des Leçons de Mécanique*”) tért ki erre a témára. *Navier* is felírta a *Poisson* által (kicsit később) publikált

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q$$

formájú differenciálegyenletet, de ő már (ugyancsak molekuláris alapon, de másféle részecskemegoszlásból kiindulva) *köbös* lemezvastagsággal dolgozott a merevségek számításánál. Anyagállandónak még ő is csak egyetlen paramétert használt; a Poisson-tényezőt, mint változó értéket, *Navier* sem vette figyelembe). Téglalap alakú, egyszerűen megtámasztott lemezek vizsgálatára *Fourier-sorokat*⁵⁸ javasolt, ez a megoldási technikája (természetesen már a pontosított anyagállandókkal) ma is kiválóan használható.

Megjegyezzük, hogy *Navier* a lemezek horpadásvizsgálatával is foglalkozott. A téglalap alakú lemez oldalélén működő, egyenletesen megoszló T nyomóerő hatására történő horpadás vizsgálatára a

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + T \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

ma is elfogadott alakú differenciálegyenletet írta fel, de ennek pontos megoldását egy konkrét esetre – ahol a lemezt négy sarokpontjában támasztotta meg – már hibásan adta meg.

⁵³ *Mémoires of the Academy, Vol. 8. 1829. pp. 357-570.*

⁵⁴ *Journal de l'École Polytechnique, Vol. 20. 1831, pp. 1-174.*

⁵⁵ Mint látni fogjuk, ezt csak jóval később pontosította Kirchhoff és Kelvin.

⁵⁶ 1785 – 1835. A modern építőmérnöki mechanika és mérnökképzés megteremtője. Életéről lásd bővebben a „*Bernoulli, Navier és a klasszikus gerendamodell*” című életrajzot.

⁵⁷ Ez munka nyomtatásban is megjelent 1823-ban: *Bulletin soc. philomath., pp.92, Paris, 1823.*

⁵⁸ *Joseph Fourier* (1768 – 1830) kiváló francia matematikus, a trigonometrikus sorok, speciális matematikai transzformációk illetve hőtani vizsgálatai tették ismertté nevét.

Alig két évtized választja el csupán a nagy francia kutatók publikációit Kirchhoff alapvető művének megjelenésétől. Kirchhoff a *Breslauban* töltött évek alatt írta és 1850-ben jelentette meg lemezekkel foglalkozó cikkét⁵⁹. Ez a munka valóban *alapvető* abból a szempontból, hogy összefoglalása a lemezekkel kapcsolatos minden korábbi kutatásnak, továbbá szigorúan rendszerezett feltevésekre épül mind a mezőegyenletet, mind a peremfeltételeket illetően.

Kirchhoff *Sophie Germain* munkájából indult ki, megemlítve *Lagrange* javítását, majd részletesen tárgyalta *Poisson* levezetéseit⁶⁰. Kimutatta a hármas peremfeltétel-rendszerre vonatkozó állítás hibáját, és megadta annak pontos, ma is használatos változatát két peremfeltétellel. Igazolta, hogy a bemutatott *Poisson*-féle megoldások a lemezek rezgéseire pontosak, de csak azért, mert a speciális lemezgeometria miatt az elvileg hibás peremfeltételek nem okoztak zavart.

Kirchhoff fogalmazta meg először a vékony rugalmas lemezek vizsgálatára ma is használt alapvető feltételeket:

- a lemez középsíkjára a terhelés előtt merőleges egyenes vonalak a hajlítás után is egyenesek maradnak és továbbra is merőlegesek lesznek a középsíkra,
- a lemez középsíkjában levő elemi cellák alakja nem torzul a terhelés hatására létrejövő kis elmozdulások során.

Erre a két feltételre hivatkozva Kirchhoff levezette a vékony rugalmas lemez potenciális energiájának függvényét:

$$\Pi_b = \frac{1}{2} D \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

A képletében szereplő lemezmerevség értéke Kirchhoffnál:

$$D = Eh^3 / (12(1-\nu^2)),$$

ahol E a rugalmassági modulus⁶¹, h a lemez vastagsága, ν pedig a most már változónak tekintett *Poisson-tényező*. Az ehhez az energiafüggvényhez tartozó differenciálegyenlet előállítására Kirchhoff a virtuális elmozdulások elvét használta fel, a q felületi megoszló teher hatására létrejövő külső munka variációját egyenlővé téve a belső energiára épített belső munka variációjával:

$$\iint q \delta w dx dy = \delta \Pi_b$$

Felhasználva az előbb felírt alakváltozási energiát, ő is megkapta a lemez mezőegyenletének mai formáját, ahol már a lemezmerevség is a ma használatos paraméter:

$$D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q.$$

Kirchhoff ezt az egyenletet és az általa módosított peremfeltétel-rendszert kör alakú és szabad peremű lemezek rezgésvizsgálatára használta fel. Olyan rezgésalakok kimutatására is képes volt, amit a *Poisson*-megoldás nem tudott kimutatni, eredményei jól illeszkedtek a *Chladni-vonalak* változatos rendszeréhez.

⁵⁹ *Journal für Mathematik (Crelle)*, Vol. 40. 1850.

⁶⁰ *Navier* munkáira valamilyen oknál fogva nem hivatkozott.

⁶¹ Kirchhoff egyértelműen a kétparaméteres anyagmodell-változat híve volt (lásd részletesebben erről a kérdésről a „Poisson és a Poisson-tényező” című életrajzban írtakat).

Megjegyezzük, hogy Kirchhoff kitért annak az esetnek a vizsgálatára is, amikor az elmozdulások nem kicsik, jelentős segítséget adva ezzel a későbbi kutatóknak ennek a kérdéskörnek a vizsgálatához.

A mechanika történetének érdekessége, hogy Kirchhoffot követően ismét egy nagy fizikus foglalkozott érdemben a lemezvizsgálat finomításával. *William Thomson*, vagy jóval ismertebb nevén *Lord Kelvin*⁶² 1867-ben publikált híres munkájában, a „*Treatise on Natural Philosophy*”-ban részletesen megvizsgálta Kirchhoff levezetéseit és gondos számításokat végzett annak kimutatására, hogy milyen geometriai és anyagszilárdsági jellemzők esetén tekinthetők elfogadhatónak a Kirchhoff által megadott mezőegyenletek. Részletesen foglalkozott a peremfeltételekkel is, például a *Saint-Venant-elv* felhasználásával igazolta, hogy Kirchhoffnak igaza volt, amikor a *Poisson-féle* három peremfeltételt kettőre csökkentette. *Kelvintől* származik annak (a ma Kirchhoff-erőnek nevezett) dinámrendszernek⁶³ a bevezetése, amely a lemez élén működő csavarónyomatékokat statikailag egyenértékű nyíróerőkkel helyettesíti. Bár a gyakorló mérnökök körében *Kelvin* munkássága kevésbé ismert, az elméleti alapokkal foglalkozó kutatók számára azonban kifejezetten hasznosak és értékesek kommentárjai.

Hasonló jellegű vizsgálatokat végzett *Saint-Venant* kiváló tanítványa, *Maurice Lévy*⁶⁴ is. Az *École Polytechnique* és az *École Central des Arts et Manufactures* mechanika professzoraként 1877-ben publikálta egy hosszú tanulmányt⁶⁵ a lemezek peremfeltételeinek az eltolódásokra gyakorolt hatásáról. Másféle módszerrel, mint *Kelvin*, de ő is igazolta Kirchhoff alapvető állításait. Néhány évvel később *M. E. Estanave* nevű doktorandusz hallgatójával⁶⁶ együtt még egy részletes táblázatsorozatot is készített, amely téglalap alakú lemezeknél a gyakorlatban előforduló teher típusokat és peremfeltételi változatokat figyelembe véve megadta az eltolódások és igénybevételek értékét néhány jellemző pontban.

Az alapvető egyenletek és feltételek megfogalmazását végzők sorában záró névként említjük kettős életrajzunk másik tudósát, Augustus Edward Hough Love-ot. A tudományos életművéről írt pontban már említett híres könyvében, az 1892-ben megjelent „*A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*”-ben, foglalkozott először lemezek (és héjak) viselkedésének leírásával. A folyamatosan bővülő könyv 1900 után megjelenő kiadásaiban már *John Henry Michell* 1899-ben megjelent cikkére⁶⁷ hivatkozva először

⁶² 1824 – 1907. Egyike a legnagyobb fizikusoknak. Észak-Írországból született skót szülők gyermekeként. Matematikai tehetsége miatt már tíz éves (!) korában felvették a Glasgow-i Egyetemre. Saját visszaemlékezései szerint *Fourier* hőtani vizsgálatokról írt munkái voltak gyermekkorának legkedvesebb olvasmányai. Termodinamikai eredményei tették igazán híressé nevét.

⁶³ Derékszögű négyszög alakú, szabadon feltámaszkodó lemezeknél a sarokpontokban koncentrált erőkként jelentkező Kirchhoff-dinámok hatására – egy *antiklasztikus felületet* létrehozó – elmozdulások értékét fel lehet használni az adott lemez hajlítási merevségének kísérleti meghatározására.

⁶⁴ 1838 – 1910. Kiváló francia építőmérnök, több híres egyetemen oktatott mechanikát.

⁶⁵ *Journ. Mathématiques, Vol. 3. pp.219 – 306, 1877.*

⁶⁶ Az 1900-as években ő is sokat publikált francia mechanikai és fizikai folyóiratokban.

⁶⁷ „*On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates*”, *Proc. Lond. Math. Soc. Vol. 31, pp. 100-124, 1899.*

John Henry Michell (1863 – 1940) kiváló ausztrál mechanikus volt, sok fontos szilárdságtani feladatot oldott meg feszültségfüggvények segítségével.

feszültségfüggvények segítségével, majd *Rayleigh*⁶⁸ variációs módszerét⁶⁹ használva vizsgálta lemezek viselkedését statikus és dinamikus hatásokra. Love szeretett történeti összefoglalásokat is beépíteni könyvébe, a lemezek vizsgálatáról szóló rész is ad áttekintést az előző évtizedek munkájáról.

Nagyon fontos hangsúlyoznunk, hogy az ő mechanika könyve akkoriban évtizedekig meghatározó mű volt a világ vezető egyetemén, mérnökgenerációk sora innen ismerte meg a legfontosabb szilárdságtani összefüggéseket. Érdemeit nem csökkenti, csak a történeti hűséget pontosítja az a tény, hogy tulajdonképpen Love neve nem is annyira újszerű mechanikai eredményei, mint sokkal inkább kiváló összefoglaló, rendszerező és ismeretterjesztő hatása miatt kapcsolódik a „klasszikus” lemezmodellnél Kirchhoff neve mellé a világ mechanikai tankönyveiben...

A rugalmas vékony lemezek ma használatos elméletének kialakulásáig vezető közel másfél száz éves történet befejezéseként a teljesség legcsekélyebb igénye nélkül megemlíjtük néhány olyan tudós nevét is, akik valamilyen módon szintén hozzájárultak a modell fejlesztéséhez:

- *Rudolf-Friedrich Alfred Clebsch* (1833 – 1872) geometriával és invariánsokkal foglalkozó német matematikus volt, de sokat foglalkozott mechanikai⁷⁰ feladatokkal is. Folytatta Kirchhoff nagy elmozdulásokra vonatkozó levezetéseit, többféle lemeznél bemutatva a megoldást. Kör alakú lemeznél az elsők között oldotta meg a koncentrált erővel terhelt lemez egyenletét.
- *Franz Grashof* (1826 – 1893) német építőmérnök, a Karlsruhei Egyetem mechanika professzora volt az első, aki számítási modelleket⁷¹ dolgozott ki egyenletes távolságban elhelyezett oszlopokkal alátámasztott lemezek vizsgálatára.
- *Horace Lamb* (1849 – 1934) kiváló angol matematikus és fizikus (főleg hangelmélettel és hidrodinamikával foglalkozott) rugalmasságtani munkáiban kör alakú lemezek és hengershimmetrikus héjak rezgésvizsgálatával foglalkozott. Ő is *Rayleigh* módszerét használta a különböző típusú peremfeltételek hatásának vizsgálatára.
- *Borisz Grigorjevics Galjorkin* (1871 – 1945) orosz mérnök az általa javasolt variációs eljárás segítségével (részleteket lásd a „*Ritz, Galjorkin és a mechanikai feladatok numerikus közelítő módszerei*”⁷² című életrajzban) nagyon sokféle geometriájú (háromszög, ellipszis, stb.) lemez közelítő megoldását előállította. Foglalkozott pillérekén álló vasbeton lemezek számításával is. „*Vékony rugalmas lemezek*” című, 1933-ban megjelent könyve átfogó összefoglalása az általa vizsgált feladatoknak.

⁶⁸ *Lord Rayleigh*, 1842 – 1919. Nobel-díjas angol fizikus. Életéről bővebben lásd a „*Ritz, Galjorkin és a mechanikai feladatok numerikus közelítő módszerei*” című fejezetben.

⁶⁹ Ez akkoriban radikálisan új megoldási technika volt!

⁷⁰ *Saint-Venant* életrajzánál említettük, hogy *Clebsch* „*Theorie der Elasticität fester Körper*” című könyvét ő fordította 1883-ban franciára (és ő egészítette ki rengeteg kommentárral).

⁷¹ Könyvének címe: „*Theorie der Elastizität und Festigkeit*”. Érdekes megjegyeznünk, hogy olyan tanítványai voltak, mint *Ferdinand von Zeppelin*, *Wilhelm Maybach*, *Carl Bosch* és *Ferdinand Porsche*.

⁷² Fontos megjegyeznünk, hogy maga *Walter Ritz* (1878 – 1909) soha nem foglalkozott mechanikai feladatok vizsgálatával – így lemezek elemzésével sem – bár módszerének 1908-ban történt publikálása után éppen a mérnökök lettek annak leggyakoribb alkalmazói.

- August Otto Föpl⁷³ (1854 – 1924) német építőmérnök, több német egyetem tanára volt az első, aki feszültségfüggvények segítségével jól használható közelítő eljárást dolgozott ki nagy elmozdulások számítására. Ezt a módszert is tartalmazó „*Technische Mechanik*” című könyve 1907-ben jelent meg.
- Szöllőskislaki Kármán Tódor (Theodore von Karman, 1881 - 1963), a magyar születésű gépészmérnök 1910-ben publikálta „*Festigkeits im Maschinenbau*”⁷⁴ című cikkét, amelyben megfogalmazta a gyakorlat számára kiválóan használható „átmeneti” modelljét, mely kis elfordulások és viszonylag nagy eltolódások követésére képes alakváltozás-mező felvételét ajánlta lemezeknél. Megjegyezzük, hogy erre a rugalmasságtani modellre építve az ugyancsak magyar származású Nádai Árpád „*Elastische Platten*” című könyvében 1926-ban már lemezfeladatokat is vizsgált. Nádai az elsők közé tartozott a lemezekre ható koncentrált erők számítási technikájának kidolgozásában is.
- Harald Malcolm Westergaard amerikai mérnök (a törésmechanika egyik legnagyobb alakja) a rugalmasan ágyazott lemezek vizsgálatának hosszú sorát nyitotta meg 1923-ban megjelent első cikkével (*Ingenioren, Vol. 32. pp. 513, 1923*).
- Egy Gehring nevű német mérnök 1860-ban, Berlinben megjelent disszertációja tartalmaz először számítási modellt anizotrop viselkedésű lemezekről. Maximilian Titus Huber (1872 – 1950), a kiváló lengyel mérnök (a Huber-Mises-Hencky-féle folyási feltétel egyik alkotója) 1929-ben Varsóban jelentetett meg egy könyvet „*Probleme der Statik technisch wichtiger orthotroper Platten*” címmel, ebben már többféle gyakorlati esetre kidolgozott számítási változatot közölt. Néhány évvel később az orosz mérnök, Szergej Lehnyickij⁷⁵ megírja ennek a témakörnek az egyik legjobb összefoglaló művét (a könyvben átfogó irodalmi hivatkozás található az anizotrop rugalmasságtan teljes történetéről).

.....

Hosszan lehetne még sorolni a különböző kutatók nevét és témáikat. A XX. század közepén elkezdődtek a különféle vastag lemezek vizsgálatai is, (megjelent például Reissner és Mindlin modellje, stb.), fellendült a képlékeny illetve rideg anyagú lemezek vizsgálata, létrejött a minden addiginál hatékonyabb végeselemes technika. Ahogy a mechanika más területein, a lemezek mechanikai vizsgálatában is teljesen új korszak kezdődött.

Ez már egy teljesen másféle, új fejezetbe kívánczó történet...

⁷³ Ludwig Prandtl, a képlékenységtan nagy tudósa fiatal korában az ő hallgatója és doktorandusza volt.

⁷⁴ *Encykl. Math. Wissenschaften, Vol. IV. pp. 311, 1910.*

⁷⁵ „*Anisotropic Plates*”, Moszkva, 1944. Az első orosz nyelvű kiadás után többször is megjelent angolul illetve más nyelveken is.

Felhasznált irodalom:

1./ Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials, *McGraw-Hill*, 1953.

2./ Todhunter, I. – Pearson, K.: A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press*, 1886