

Koloszov, Muszhelisvili, Westergaard és a törésmechanika feszültségfüggvényes vizsgálati módszerei

Ebben az életrajzban annak a három tudós életéről olvashatunk, akiknek a munkássága a XX. század első felében hozzájárult a ma törésmechanikának nevezett tudomány elméleti alapjainak lerakásához. Természetesen sok más nagyszerű kutató (például *Griffith*¹ vagy *Irwin*²) nevét sem szabad elfelejtenünk, ha a törésmechanika létrehozásáról írunk, de róluk – fontosságuk miatt – külön életrajz emlékezik meg. Most azokról a matematikusokról lesz szó, akik a repedések, bemetszések környezetének vizsgálatát „hagyományos” *peremérték-feladatok* vizsgálatával oldották meg, és így továbbvitték a XIX. század kiváló tudósai (*Cauchy, Navier, Saint-Venant, Airy, Lamé* és mások)³ által a mechanikai feladatok vizsgálatára kidolgozott matematikai technikát.

Koloszov élete

Jurij Vasziljevics Koloszov 1867. augusztus 25-én született *Uszty*-ban, Oroszország novgorodi kormányzóságának egy kisvárosában. A tavak és folyók hálózata között elhelyezkedő településen töltötte gyermekkorát, itt járt általános iskolába. Kiváló tanuló volt, így tanítói tanácsára szülei *Szentpétervárra* írták be gimnáziumba. A matematika és fizika iránti fogékonysága és tehetsége hamar kiemelte társai közül, 1885-ben az iskola aranyérmét elnyerve fejezte be a középiskolát és rögtön be is iratkozott a Szentpétervári Egyetem Matematika-Fizika Karára. Itt akkoriban kétlépcsős képzés folyt, Koloszov az első fokozatot 1889-ben, az MSc diplomát pedig 1893-ban szerezte meg, 1903-ban pedig már a doktori minősítést is megkapta.



1893-ban megbízták az Egyetem Mechanikai Laboratóriumának vezetésével, emellett „másodállásban” tanított az egyik műszaki főiskolán, mérnököknek adott elő matematikát. 1902-ben elfogadta az észtországi *Tartu*⁴ egyetemének meghívását, ide költözött, és egészen 1913-ig itt tanított matematikát, mechanikát és fizikát. Az egyetem akkori képét láthatjuk baloldalt egy korabeli litográfián. Ezeket az éveket egyébként elsősorban habilitációs tézisei kidolgozásának szentelte. Kutatómunkája a komplex feszültségfüggvények mechanikai alkalmazásával foglalkozott,

mint látni fogjuk, tulajdonképpen ez az eredménye az, ami máig megőrizte nevét. Habilitációs dolgozatának első változatát egyébként 1907-ben nyújtotta be a Szentpétervári Egyetemre.

¹ *Alan Arnold Griffith* (1893 – 1963) kiváló angol mérnök, a repedések környezetének energiaelvé mechanikai vizsgálatairól ismert elsősorban. Sokat tett a korszerű gázturbinás hajtóművek fejlesztéséért is.

² *George Rankine Irwin* (1907 – 1998) amerikai mérnök, a mai értelemben vett törésmechanika létrehozója. Tudományos munkássága mellett említésre méltó széleskörű és kiváló pedagógiai tevékenysége a törésmechanika alkalmazásának népszerűsítésére.

³ Életről és munkásságukról lásd bővebben a róluk készült életrajzokat...

⁴ Észtország akkoriban a cári birodalom része volt, a várost *Jurjevnek* hívták (mai neve *Tartu*). A város egyetemét egyébként még 1632-ben *II. Gusztáv Adolf* svéd király alapította, Észtország akkor a Svéd Királysághoz tartozott és a városnak *Dorpat* volt a neve.

Szteklóv⁵ professzor, a Matematika Intézet akkori vezetője, a munka sok részletét vitatta, de Koloszov végülis sikeresen megvédte téziseit, és így – kisebb-nagyobb javítások és módosítások után – 1909-ben az egyetem végülis elfogadta „*A komplex változós függvények alkalmazása a matematikai rugalmasságtan síkbeli feladataira*” című dolgozatát és így megkapta az egyetemi tanári kinevezéshez szükséges habilitációs címet.

Történeti érdekességként megjegyezzük, hogy a dolgozat téziseinek megvédésében Koloszovnak sokat segített tanítványa, a később híres matematikussá váló *Niko Muszhelisvili* is (lásd a róla készült életrajzot néhány sorral lejjebb). Másik megjegyzésként megemlíjtjük, hogy *Szergej Csapligin*⁶, aki akkoriban szintén Pétervárott dolgozott az egyetemen, tanszéki belső felhasználásra már tíz évvel korábban készített olyan vázlatokat, melyekben a komplex függvények szilárdságtani vizsgálatokra való alkalmazását javasolta. Soha nem dolgozta ki ezt az ötletét részletesebben és nem is publikálta semmilyen részletét sem akkor, sem később⁷, ezért így ma is teljes joggal tekinthetjük Koloszovot a komplex függvények úttörő alkalmazójának a szilárdságtan sík feladatainál.

1913-ban Koloszov visszatért Pétervárra, és ettől kezdve egészen élete végéig az egyetem Elméleti Mechanika Tanszékén dolgozott. Ezzel párhuzamosan még 1913-ban kinevezték a pétervári Elektrotechnikai Intézet Elméleti Mechanika osztályára is igazgatónak (itt csak néhány évig töltött), 1916-ban pedig az Elméleti Mechanika Tanszék vezetője lett. Az első világháború és az azt követő polgárháború viharait illetve az utánuk következő változásokat mind át- és túlélve⁸ tanszékvezető maradt egészen 1936. november 7-én bekövetkezett haláláig.

Koloszov tudományos munkássága

Koloszov magát mérnöki – elsősorban mechanikai – feladatokkal foglalkozó matematikusnak tekintette. Fő műve egyértelműen az a dolgozat, amit már az előző pontban is említettünk, és amire majd az egyes életrajzok bemutatása után részletesebben is kitérünk.

Habilitációs dolgozata mellett említésre méltó az 1903-as doktori disszertációja is, amely a *Hamilton*⁹-elv¹⁰ különleges módosítási lehetőségeivel foglalkozott. Orosz nyelvű munkájának magyar címe: „*A Hamilton-elv speciális módosítási lehetőségei és ezek alkalmazása az anyagi testek mechanikai vizsgálatára.*” Ebből a témakörből egyébként már előzőleg több kisebb cikket is publikált.

1935-ben, halála előtt egy évvel előtt adták ki Moszkvában az élete munkáját összegző könyvét „*Komplex változók alkalmazása az elméleti rugalmasságtanban*” címmel.

⁵ *Vlagyimir Andrejevics Szteklóv* (1864 – 1926) orosz matematikus. Elsősorban függvénytannal, főleg parciális differenciálegyenletek különböző típusú megoldásával foglalkozott. Az ő tanítványa volt *Friedmann*, a későbbi híres fizikus.

⁶ *Szergej Alekszejevics Csapligin* (1869 – 1942) orosz matematikus, analízissel, differenciálegyenletekkel illetve áramlástani kérdésekkel foglalkozott.

⁷ Maga *Csapligin* sem vitatta soha Koloszov elsőségét.

⁸ 1931-ben a Szovjet Tudományos Akadémia tagjának is megválasztották.

⁹ *Sir William Rowan Hamilton* (1805 – 1865) ír matematikus és fizikus. Optikával, dinamikával és algebrával foglalkozott.

¹⁰ A fizikában a *Hamilton-elv* egy mozgást végző test állapotát leíró differenciálegyenlet integrálegyenlettel történő helyettesítését mutatja be a variációszámítás segítségével.

Muszhelisvili élete

Nikoloz¹¹ (Niko) Muszhelisvili 1891. február 16-án született Tbilisziben¹², az akkoriban cári fennhatóság alatt álló Grúzia fővárosában. Érdekességként megadjuk nevének grúz betűkkel¹³ leírt alakját: ნიკოლოზ (ნიკო) მუსხელიშვილი.

Elemi és középiskoláit Tbilisziben végezte, majd sikerrel felvételizett a Pétervári Egyetemre, ahol – Kolosov tanítványaként és jó barátjaként – matematikusnak tanult. A kiváló tehetségű fiatalember 1914-ben sikerrel megvédte diplomáját és egészen 1920-ig ott is maradt adjunktusnak az egyetem Matematika Tanszékén.



A polgárháború eseményei az ő életét is megváltoztatták. 1920-ban úgy döntött, hogy hazatér szülővárosába és az ottani egyetemen vállal oktatói állást. 1922-ig docens volt a két évvel Muszhelisvili hazatérése előtt alapított Tbiliszi Állami Egyetem¹⁴ Matematika Tanszékén (az egyetem főépületének képe látható baloldalt), 1922-ben pedig egyetemi tanárrá nevezték ki. Élete következő 54 évében most már ez maradt a munkahelye és egyetemi címe, élete utolsó napjáig a Matematika Tanszéken dolgozott.

1939-ben megválasztották a Szovjetunió Tudományos Akadémiája rendes tagjának. 1941-ben pedig – hosszas szervező munkája eredményeképpen – megalapította a Grúz Tudományos Akadémiát, aminek első elnöke lett. Ezt a posztot egészen 1972-ig ő töltötte be, akkor – korára tekintettel – lemondott, de megválasztották tiszteletbeli elnöknek, és ezt a címet élete végéig viselte. 1956-ban az „International Committee of Congresses on Applied Mechanics” szervezete vette fel tagjai közé, 1960-ban pedig az “International Union on Theoretical and Applied Mechanics” elnökségébe hívták meg.

1969-ben megkapta az olasz Akadémia „Modesto Panetti” kitüntetését, 1972-ben pedig a Lomonoszov Aranyérmét. Nyolcvanöt éves korában, 1976. július 16-án hunyt el Tbilisziben, itt temették el a város melletti dombokon lévő ősrégi temetőben.

¹¹ Mivel művei hosszú ideig orosz közvetítéssel voltak ismertek, nevével sokszor *Nyikolaj Ivanovics Muszhelisvili* változatban is találkozhatunk.

¹² Akkori nevén *Tifliszben*.

¹³ A nyomtatható grúz betűk létrehozásában komoly érdemei voltak *Misztótfalusi Kis Miklós*nak (1650 – 1702), a kiváló erdélyi nyomdásznak.

¹⁴ Ez volt az egész Kaukázus első egyeteme, korábban sem Grúziában, sem más környező országban nem volt felsőoktatási intézmény. Ma több mint 30.000 hallgatója van.

Muszhelisvili tudományos munkássága

Bár munkássága alapvetően mechanikai területeket érintett és ismertté elsősorban mechanikával kapcsolatos művei tették, Kolosovhoz hasonlóan ő is mindenekelőtt matematikusnak tartotta magát.

Muszhelisvili már fiatal korától kezdve rengeteg cikket írt, de ezek az akkori viszonyok között alig jutottak el külföldre. Munkáit igazán ismertté két vastos terjedelmű gyűjteményes monográfia tette, amelyekben tematikus csoportosításban lényegében minden fontosabb dolgozata megtalálható. Mindkettő 1953-ban jelent meg angol nyelven *Hollandiában*, a *Noordhoff* kiadónál. Az egyik a komplex függvénytan alkalmazásait¹⁵ mutatja be a szilárdságtan különböző területein („*Some basic problems of mathematical theory of elasticity*”), a másik inkább a „tisztá” matematika kérdéseivel kapcsolható, a szinguláris integrálegyenletekkel kapcsolatos dolgozatai („*Singular integral equations*”) ebben a könyvben található meg.

A mérnökök számára alapvetően az elsőként említett mű („*Some basic problems...*”) a jelentősebb és használhatóbb alkotás. Az itt található cikkek a szilárdságtan úgynevezett szinguláris feladatainak (bemetszések, repedések, zárványok, érintkezési problémák, stb. környezetének) mechanikai vizsgálatához nyújtanak precíz és szabatos matematikai leírást és javasolnak megoldási technikát. A monográfiában található cikkek megírása óta eltelt sok évtized sem csökkenti a leírtak elméleti jelentőségét, mindazok számára, akik törésmechanikával vagy más szinguláris jellegű szilárdságtani feladattal kívánnak foglalkozni, éppúgy alapvető marad Muszhelisvili könyve, mint például egy stabilitással foglalkozó mérnöknek *Euler* vagy *Lagrange* munkássága.

Westergaard élete

Harald Malcolm Westergaard 1888-ban született *Koppenhágában*. Szülei apai ágon több generáció óta a dán főváros egyetemének oktatói voltak különféle természettudományos tárgyakat tanítva. A fiatal Harald kiváló tanulóként végezte elemi és középiskolai tanulmányait, majd az építőmérnöki kar hallgatója lett *Koppenhágában*. Mivel az egyetem adta mérnöki képzést a család nem tartotta megfelelő szintűnek, ezért 1912-ben Németországba küldték, ahol a *Göttingeni Egyetemen Felix Klein*¹⁶ előadásait kezdte látogatni. Mivel Klein 1913-ban nyugdíjba vonult, Westergaard 1914 tavaszán *Münchenbe* költözött és az ottani *Műszaki Egyetemen* folytatta tanulmányait. Itt nyújtotta be és védte meg „*Anwendung der Statik auf die Ausgleichsberechnung*” című doktori disszertációját.



Az első világháború kitörése kettétörte egyetemi munkáját. Mivel édesapja közben meghalt, Westergaard úgy döntött, hogy nem tér vissza Dániába, hanem özvegy édesanyjával együtt

¹⁵ Ennek a műnek 1971-ben Lipcsében kiadták német nyelvű változatát is „*Einige Grundaufgaben zur mathematischen Elastizitätstheorie*” címmel.

¹⁶ *Felix Klein* (1849 – 1925) német matematikus és mérnök. Híres volt a mechanika területén végzett alkalmazott matematikai kutatásairól.

kivándorol Amerikába és ott próbálnak új életet kezdeni. Karrierje mindjárt az első években igen sikeresen alakult, *Arthur Nevell Talbot*¹⁷ pártfogásával 1916-tól az *Illinois Egyetem* egyetemi oktatóként alkalmazta az Építőmérnöki Karon és ezt a professzori címét egészen 1936-ig meg is tartotta¹⁸. Akkor még megtisztelőbb állás betöltésére kérték fel: megválasztották dékánnak a *Harvard Egyetem Mérnöki Karára*. 14 évig, az 1950 nyarán váratlanul bekövetkezett haláláig töltötte be ezt a posztot.

Az újabb világháború előtti években Westergaardnak komoly szerepe volt abban, hogy az amerikai egyetemek lehetőséget adtak sok kiváló európai tudósnak, hogy Amerikába költözhessen és ott folytathassa munkáját. Személyesen nyújtott segítséget például *Richard von Mises*¹⁹nek, *Karl von Terzaghi*²⁰nak és *Arthur Casagrande*²¹nek. A felsorolt tudósok a későbbiekben családjá szűkebb baráti köréhez is tartoztak.

Megjegyezzük, hogy a második világháború alatt – bár már nem volt fiatal – önkéntesnek jelentkezett a hadseregbe és több évig szolgált a haditengerészet kötelékében.

Westergaardnak feleségétől, *Rachel Harriet Talbot*-tól (*Arthur Talbot* leányától) két leánya és egy fia született. Fia – *Peter T. Westergaard* – jónévű zeneszerzőként lett ismert Amerikában.

Westergaard tudományos munkássága



Westergaard elméleti jellegű munkáit egész életében különböző gyakorlati építőmérnöki feladatokhoz kapcsolódva publikálta. Az 1930-as évek elején a Colorado folyón épült híres *Hoover-gát* földrengésvizsgálatához szükséges számítások az ő nevéhez fűződnek (a gát mai képét láthatjuk baloldalt), és ugyancsak komoly elismeréssel fogadta a szakma a *Panama-csatorna* felújításánál és a *san-diegoi repülőtér* tervezésénél végzett mérnöki számításait is. Munkáját mindig a magasfokú precizitás, szakmai igényesség és a matematikai eszköztárnak a gyakorlati mérnöki alkalmazásokkal való mesteri kombinációja²² jellemezte.

A rugalmasságtan és képlékenységtan építőmérnöki alkalmazásáról írt cikkei és egyetemei jegyzetei is ezt a szemléletmódot tükrözték, hallgatói körében kifejezetten népszerű volt világos és a különböző szakterületeket mesterien ötvöző előadásairól. Így születtek a jelenlegi témánk szempontjából fontos törésmechanikai publikációi is 1939-ben: a *Koloszov-Muszhelisvili* által bevezetett komplex feszültségfüggvényes technikát kívánta egyszerűsíteni olyan – gyakorlatilag fontos – esetekben, amikor a mérnököknek gyors és egyszerűen

¹⁷ *Arthur Nevell Talbot* amerikai építőmérnök. Elsősorban az anyagvizsgálatokkal és a különböző vasbetonszerkezetekkel kapcsolatos kutatásai tették ismertté nevét.

¹⁸ Közben régi iskolája, a *Koppenhágai Műszaki Egyetem* 1929-ben díszdoktorává választotta.

¹⁹ *Richard Edler von Mises* (1883 – 1953) osztrák mérnök, egyike a XX. század legnagyobb mechanikával foglalkozó kutatóinak. Életéről lásd bővebben a „*Huber, Mises, Hencky és a fémek képlékenységtana*” című életrajzot.

²⁰ *Karl von Terzaghi* (1883 – 1963) kiváló osztrák talajmechanikus.

²¹ *Arthur Casagrande* (1902 – 1981) osztrák talajmechanikus és geológus.

²² Nem véletlenül vallotta magát egész életében *Klein* tanítványának. A német tudós híres volt a matematika és az alkalmazott mérnöki gondolkodásmód briliáns kombinálásáról.

alkalmazható megoldásokra volt szükségük. Megoldásai olyan népszerűek voltak a mérnökök körében, hogy sok mérnöki szakkönyv még évtizedekig csak Westergaard-féle megoldásként mutatta be a repedések környékének feszültségi szingularitásaira levezetett összes számítást. Ma már természetesen –főleg a kicsit komolyabb és részletesebb munkákban – árnyaltabb és precízebb a kép az ilyen mechanikai elemzésekről, de ez semmit nem von le Westergaard érdemeiből, főleg a komplexitást és ezzel együtt a lehetőségek szerinti egyszerűsítést állandóan hangsúlyozó gondolkodásmódja iránti tiszteletből.

A törésmechanika feszültségfüggvényes vizsgálati módszerei

A törésmechanika a mechanika azon tudományterülete, amelyik az anyagban levő *repedések, bemetszések, lyukak* környezetében lévő feszültségi szingularitások elemzésével foglalkozik. A „törésmechanika” elnevezés viszonylag új keletű – a XX. század hatvanas éveiben jött létre –, de maga a vizsgálandó feladat már nagyon régóta foglalkoztatja a mérnököket, hiszen a különböző „gyengítések”, áttörések, repedések, stb. azóta léteznek, amióta csak az ember mérnöki szerkezeteket épít. Igazán fontossá akkor vált ez a kérdés, amikor a XIX. század első évtizedeiben kibontakozó ipari forradalom addig soha nem látott számban kezdett fémszerkezeteket használni: vasutak, hajók, hidak, tartályok, gőzgépek, stb. tízezrei épültek szerte a világon.

Sajnos ezek közül a fémszerkezetek közül rendkívül sok egészen hirtelen ment tönkre a használat során, annak ellenére, hogy döntő részüket a kor mérnöki tudásának megfelelően és kifejezetten gondosan tervezték. Példaként említjük, hogy Angliában, a kor egyik legfejlettebb államában az újságok heti rendszerességgel számoltak be fém alkatrészek, vasúti sínek illetve tartószerkezeti elemek váratlan töréséről és az ezzel járó balesetekről.

A folyamatosan gyűlő tapasztalatokból okulva²³ a mérnökök természetesen sejtették, hogy a jelenség oka olyan mechanikai hatásokkal magyarázható, amelyeket a szilárdságtan addig kidolgozott elméletei nem tudtak pontosan leírni, csak éppen megfelelő mechanikai-matematikai modellek híján ezek a „sejtések” önmagukban még nem voltak elegendők a szilárdságtani számítások módosításához.²⁴

Jóllehet elméletileg már *Love*²⁵ is vizsgált koncentrációs hatásokat, amikor végtelen kiterjedésű rugalmas térben²⁶ elhelyezett kör alakú zárványok peremén nyírás hatására

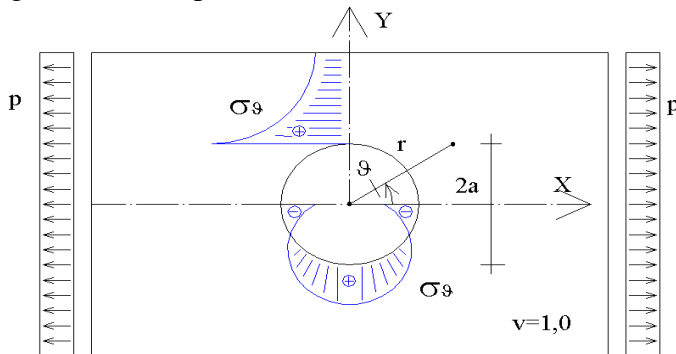
²³ Kiemelkedik az ilyen jellegű „tapasztalatgyűjtők” közül *Henry Clifton Sorby* angol mérnök (1826-1908), aki elsőként vizsgálta mikroszkóppal a laboratóriumi illetve baleseti töréseknél a *törés felületét*. A különböző típusú esetek mechanikai körülményeit rendre összevetette a törési felület képével, és így idővel az általa összegyűjtött „adatbank” segítségével a töréskép alapján (természetesen *csak utólag*) már magyarázni tudta a törés történetét.

²⁴ A gondok megoldására a tervezők a legkézenfekvőbb – és egyúttal persze a legkevésbé gazdaságos – utat választották, növelték a biztonsági tényezők értékét. Jellemző példaként említjük a tervezési számítások bizonytalanságának illusztrálására, hogy még az 1920-as évek közepén is a biztonsági tényező értéke kazánoknál 6, fém tartóoszlopoknál 10, vasúti hidaknál 6 és 10 között, légszavarnál és egyes tengelyeknél 12 volt.

²⁵ *Augustus Edward Hough Love* (1863 – 1940) kiváló angol fizikus és mérnök.

²⁶ Mint látni fogjuk, a későbbiekben is gyakran alkalmaznak „végtelen” méretű tárcsát vagy félteret a számításokban. Erre a peremfeltételek egyszerűbb figyelembe vehetősége miatt van szükség.

létrejövő elmozdulás- és feszültségállapotokat²⁷ elemzett, de az első – gyakorlatilag is használható – számítási modellt *Gustav Kirsch*²⁸ híres publikációja adta meg 1898-ban. Ő a kör alakú lyukkal gyengített, végtelen kiterjedésű húzott tárcsa feszültségeinek vizsgálatára az Airy-féle feszültségfüggvényes technikát alkalmazta (a feszültségfüggvények algebrai illetve trigonometrikus polinomok kombinációi voltak).



Vizsgálatai kimutatták, hogy a kör alakú lyuknál keletkező érintő irányú feszültség (az ábrán ezt σ_{ϑ} -val jelöltük) igen érdekes eloszlást mutat. A szilárdságtan addigi feltételezésével (egyszerű húzás esetén konstans érték) ellentétben $\vartheta=0$ szögnél *negatív* értékű lesz (vagyis a tisztán húzott tárcsában *nyomás* keletkezik!), $\vartheta=\pm\pi/2$ -nél

pedig nagysága a külső terhelő feszültség *háromszorosát* éri el! Ez a megoldás a gyakorlat számára azt jelentette, hogy például a tartószerkezetek szegecslyukak miatt gyengített keresztmetszetű húzott rúdjaik korábban rosszul méretezték²⁹, csak a magas biztonsági tényező óvott meg a sokkal gyakoribb katasztrófáktól.

Sajnos *Kirsch* megoldása kizárólag kör alakú lyukak vizsgálatára volt megfelelő, másféle lyuktípusnál vagy a lyukak határesetének tekinthető „végtelen keskeny” repedéseknél a hagyományos polinomokat használó feszültségfüggvényes eljárás nem működött. A továbblépéshez a segítséget egy francia matematikus, *Goursat*³⁰ munkássága adta meg a következő években. *Goursat* egy 1898-ban megjelent könyvében³¹ bemutatta, hogy ha a biharmonikus differenciálegyenletet *komplex függvények* segítségével akarjuk felírni, akkor két komplex függvény kombinációját kell használnunk a megoldásnál (ez a matematikában *Goursat-egyenletnek* nevezett kifejezés; a levezetés részleteit és a végeredményt lásd *Bojtár: „Gyakorlati törésmechanika”* című egyetemi jegyzetében).

Néhány évvel később *Kolozsov* volt az, aki bebizonyította, hogy *Goursat*nak ez a mechanikától látszólag távoli eredménye radikálisan megváltoztatta a szinguláris szilárdságtani feladatok kezelését. *Kolozsov* – felhasználva *Goursat-egyenletét* – az életrajzában már említett disszertációban levezette a végtelen méretű tárcsa biharmonikus differenciálegyenletének komplex függvények segítségével történő megoldását. Bemutatta, hogy ebben az esetben az

²⁷ „A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity”, Vol. 1., Cambridge Univ. Press, 1892. Valamilyen oknál fogva ez az érdekes megoldás a későbbi kiadásokból kimaradt.

²⁸ *Gustav Kirsch* (1841 – 1901) német mérnök. Hivatkozott előadása először a *Német Mérnökegyet 39. Közgyűlésén* hangzott el 1898. június 8-án *Chemnitzben*, majd nyomtatásban is megjelent „Die Theorie der Elastizität und die Bedürfnisse der Festigkeitslehre” címmel (Zeit. Ver. Deutsch. Ing., Vol. 42., pp. 797-807, 1898).

²⁹ A pontosság kedvéért hozzá kell tennünk azt, hogy ma már tudjuk, a véges méretű rudak vagy tárcsák esetében a feszültségkoncentráció szerencsére kisebb, de mindenesetre még azoknál is nagyobb, mint az elemi szilárdságtan alapján számított érték.

³⁰ *Edouard Jean-Baptiste Goursat* (1858 – 1936) kiváló francia matematikus, elsősorban komplex függvénytanal foglalkozott.

³¹ „Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre, à deux variables indépendantes 1-2.”, Hermann, Párizs, 1898.

eredeti parciális differenciálegyenlet két komplex változós differenciálegyenlettel helyettesíthető. Az elmozdulásokra levezetett – ugyancsak komplex függvényekkel felírt – harmadik egyenletet is figyelembe véve ezt a három egyenletet hívják ma a mechanikában *Koloszov-egyenleteknek*. Érdekesség kedvéért bemutatjuk mindhárom egyenletet (a részletes levezetés az előbb említett „*Gyakorlati törésmechanika*” jegyzetben található):

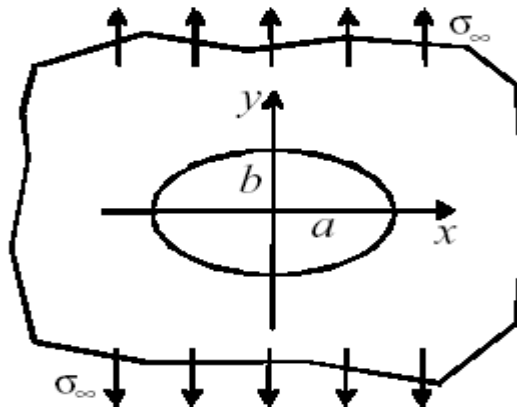
$$\sigma_x + \sigma_y = 2\{\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\} = 4 \operatorname{Re}\{\varphi'(z)\},$$

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\{\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\},$$

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}.$$

Az első két egyenlet a feszültségekre, a harmadik pedig az elmozdulásokra felírt Koloszov-egyenlet. A változók a következőket jelentik: σ_x, σ_y és τ_{xy} a végtelen méretű tárcsa feszültségeinek függvényei, u és v az eltolódásfüggvényeket jelentik, κ a *Poisson-tényező*től függő anyagi konstans, μ a nyírási rugalmassági modulus, z egy komplex változó, φ és ψ pedig a megoldás során felhasznált komplex változós feszültségfüggvények. A „Re” szimbólum a komplex függvény valós részére utal, a jobb felső sarokban szereplő egy vagy két vessző a komplex változó szerinti deriválást jelzi, a felülvonás pedig a konjugálás művelete.

Ezeknek az egyenleteknek az az elvi jelentősége, hogy *segítségükkel* egy tényleges feladatnál a *terhelések* és az *adott peremfeltételek* figyelembevételével lehetőségünk lesz a megoldás megtalálásra és most már a feladatban fellépő szingularitás sem lesz akadály. Koloszov elsőként oldotta meg a végtelen térben terhelt elliptikus lyuk környezetének feszültségszámítását tetszőleges irányú teherre. Az ábrán ennek a feladatnak egy egyszerűsített változata látható. Az egyszerűsítés abban rejlik, hogy most a terhelés merőleges az ellipszis alakú lyuk hosszabbik tengelyére:

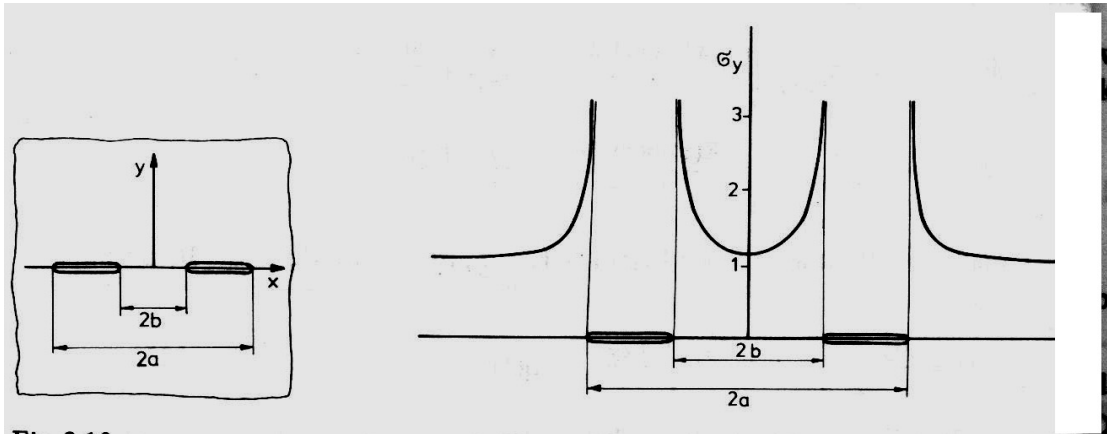


Munkája egyik legfontosabb eredménye az a lépés volt, amikor elvégezte a $b \rightarrow 0$ határátmenetet, vagyis a lyukból végtelenül keskeny repedés lett. Ebben az esetben a repedés két végén lévő csúcsnál a repedés irányára merőleges feszültségkomponens értéke elméletileg *végtelenül nagy*³² lett, vagyis Koloszovnak sikerült kimutatnia a már régóta sejtett *szingularitást*.

³² A valóságban azért nem keletkezik végtelenül nagy feszültség, mert egy repedés vastagsága soha nem zérus, a csúcsnál mindig van valamilyen lekerekítés. A másik korlátozó tényező az anyag képlékenyedési hajlama: sok fém, polimer, stb. ilyen jelentős feszültségértékeknél már nem rugalmasan viselkedik, hanem egy képlékeny zóna alakul ki a repedéscsúcs környékén.

Érdekes megjegyezni, hogy Kolozsov ezeket a levezetések és mintapéldákat nem csak már említett disszertációjában közölte, hanem egy nemzetközi konferencián is bemutatta, ami akkoriban nagyon sokat jelentett. Kevésbé ismert, hogy 1908-ban részt vett Rómában a *IV. Nemzetközi Matematikai Kongresszuson* és április 11-i előadásában beszámolt eredményeiről. Bár szekciója elnökségében olyan tudósok voltak, mint *Runge*³³, *Hadamard*³⁴ és *Volterra*³⁵, előadása nem keltett különösebb érdeklődést matematikus kollégái között.

Kolozsov munkásságának igazi *folytatója és továbbfejlesztője* Muszhelisvili volt. Az 1910-es évektől kezdve számos cikkben foglalkozott a komplex függvénytan mechanikai alkalmazásaival. Ezek a cikkek ma legkönnyebben a „*Some basic problems...*” című gyűjteményes monográfiájában olvashatók. Muszhelisvili teljesen másféle gondolatmenet alapján újból levezette *Goursat* alapegyenletét és részletesen elemezte a Kolozsov-egyenleteket is. Komplex leképezések illetve a *Cauchy-integrálok*³⁶ alkalmazásával radikálisan újszerű matematikai technikákat dolgozott ki, amelyek segítségével számos speciális szinguláris feladatot tudott megoldani (egymás mellett elhelyezkedő tetszőleges számú repedés vizsgálata, repedések belsejében levő megoszló és koncentrált erők hatása, stb.). Illusztrálásul Muszhelisvili munkáiból egy kettős repedés vizsgálatának eredményét mutatjuk be:



A bal oldali képen két egymás melletti repedés látható, jobboldalt a függőleges terhelés hatására létrejövő (a külső terhelés értékével normált) feszültségeloszlás képe látható.

A XX. század első felében alapvetően Muszhelisvili volt az általános célokra használható komplex feszültségfüggvényes megoldási technika igazi kiterjesztője. Hatása ma is érezhető a törésmechanika azon elméleti kutatói között, akik modern szerkezeti anyagokban (kompozitok, ragasztott anyagok, stb.) terjedő repedések feszültségeloszlásának vizsgálatára keresnek analitikus megoldásokat.

³³ *Carl David Tolmé Runge* (1856 – 1927) kiváló német matematikus és fizikus. Nemlineáris rendszerek matematikai vizsgálata mellett sokat foglalkozott spektroszkópiával is.

³⁴ *Jacques Salomon Hadamard* (1865 – 1963) francia matematikus, a prímszámok elméletének kutatója.

³⁵ *Vito Volterra* (1860 – 1940) olasz matematikus és fizikus. A matematikai biológia megteremtőjének tartják. Mechanikai munkássága főleg a kristályok diszlokációjának vizsgálatára összpontosult.

³⁶ Lásd a [4] alatti irodalmat.

Történetünk harmadik szereplője, Harald Westergaard a speciális feszültségfüggvények bevezetésével örökítette meg nevét a törésmechanikában³⁷. Az általa vizsgált feladatoknál *átalakította* a Kolosov-egyenleteket olyan módon, hogy *egyetlen* komplex feszültségfüggvény felvételével lehetővé vált a feszültségkomponensek meghatározása. Westergaard *csak* olyan feladatokat vizsgált, amelyek a tengelyekre szimmetrikus terheléssel rendelkeznek. A nyírófeszültség zérus értéke miatt a második Kolosov egyenlet alapján felírható az

$$\operatorname{Im}(\bar{z}\varphi'' + \psi'')\Big|_{y=0} = 0$$

feltétel, amiből a $\psi'' = -\bar{z}\varphi'' + C$ egyenlet adódik. A normálfeszültségek azonossága miatt a C konstans zérus, így **egyetlen** feszültségfüggvény is elegendő az ilyen típusú feladat vizsgálatához. Így tulajdonképpen nem a megoldás elvén változtatott, hanem annak technikája lett egyszerűbb. Hangsúlyozzuk azonban, hogy ezek az egyszerűsítések *gyakorlatilag fontos* feladatokat érintettek, ezért érthető, hogy Westergaard módszere gyorsan népszerű lett a mérnökök között és egy ideig sokan kizárólag az ő nevével azonosították a repedések környezetének mechanikai vizsgálatánál alkalmazott feszültségfüggvényes eljárások létrehozását.

A XX. század második felében, amikor a gyakorlati tudománnyá váló törésmechanika már sokféle más eljárást (energiaelvű analitikus vizsgálatok, hatékony laboratóriumi mérések, végeeselemes számítások, stb.) is alkalmazni tudott a repedési szingularitások elemzésére, a feszültségfüggvényes matematikai módszerek elvesztették „*kizárólagos eszköz*” szerepüket, de semmiképpen nem szorultak ki teljesen a törésmechanika eszköztárából. Számítási eredményeik ma is *alapját* képezik minden más módszer elvi ellenőrzésének (egyszerűen nélkülözhetetlenek más eljárásoknál tesztelésénél), és – mint említettük – változatlanul sok elméleti kutató használja őket *különleges törésmechanikai kérdések* vizsgálatára.

Felhasznált irodalom

- 1./ Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials, McGraw-Hill, 1953.
- 2./ Tóth L.: Az anyagvizsgálatok története. Egyetemi Kiadó, Miskolc, 1999.
- 3./ Muszhelisvili, N.: Some basic problems of mathematical theory of elasticity. P. Nordhoff. 1953.
- 4./ Gáspár Gy.: Komplex függvénytan. Tankönyvkiadó, 1969.
- 5./ http://en.wikipedia.org/wiki/Gury_Kolosov
- 6./ http://en.wikipedia.org/wiki/Nikoloz_Muskhelishvili

³⁷ Alapvető cikke: „Bearing pressures and cracks”, ASME-Journal of Applied Mechanics, Vol. 6, pp. 49-53, 1939.