Lamé, Beltrami, Michell és a rugalmasságtan alapvető megoldási módszerei

Ebben a hármas életrajzban azoknak a kiváló tudósoknak az életéről és munkásságáról olvashatunk, akiknek köszönhetően a XIX. század végére a mérnökök között ismertté és elfogadottá vált a rugalmasságtan matematikai egyenleteinek két alapvető megoldási változata: az *elmozdulás*- és az *erőmódszer*.

Lamé élete

Gabriel Lamé 1795. július 22-én született a franciaországi Tours[1]-ban egy jómódú polgárcsaládban. Édesanyját *Julie Madeleine Goislard-la Droitiere*-nek, apját *Gabriel Francois Lamé*-nak hívták. Elemi és középiskolai tanulmányait szülővárosában végezte, majd 1813-ban beíratták az *École Polytechnique*[2]-ba, Franciaország (és akkoriban az egész világ) egyik legjobb mérnökképző intézetébe. Négy évig tanult itt és olyan kiválóan haladt tanulmányaiban, hogy első tudományos szintű matematikai dolgozatát[3] is ezekben az években publikálta.

1817-ben befejezte az *École Polytechnique-ot* és beiratkozott a bányászattal foglalkozó *École des Mines*[4]-be. Az itt töltött három év alatt sem csökkentek kutatói ambíciói, kiváló cikket írt például a kristálylapok közötti szögek számításának újszerű módszereiről. Fontos megemlíteni, hogy ezekben az években kötött életre szóló barátságot a szintén az egyetemen tanuló *Clapeyron*nal[5].

Végzés után 1820-ban *Clapeyron*nal együtt elfogadták a francia kormány ajánlatát, mindketten többéves szerződést írtak alá oroszországi vendégtanári állásra. Az ügy hátterében az *I. Sándor* orosz cár és *XVIII. Lajos* francia király közötti megállapodás állt. Ennek értelmében Franciaország mérnököket és tanárokat küldött Oroszországba, elsősorban *Szentpétervár*ra és környékére, hogy segítsenek az iparosításhoz szükséges infrastruktúra (utak, hidak, csatornák, stb.) fejlesztésében illetve a műszaki képzés korszerűsítésében. *Sándor* cár ezen a téren tulajdonképpen XVIII. századbeli elődjei, *Nagy Péter* és *Nagy Katalin* politikáját folytatta (lásd részletesebben az *Euler*ről írt életrajzot).

---

[1] A többszázezer lakosú nagyváros Párizstól délnyugatra fekszik Közép-Franciaországban, híres gyönyörű középkori katedrálisáról. Négy évvel Lamé után itt született *Honoré de Balzac* is.

[2] Az 1794-ben alapított híres intézmény jelmondata: *„Pour la Patrie, les Sciences et la Gloire”* (“A hazáért, a tudományért és a dicsőségért”)

[3] “Mémoire sur les intersections des lignes et des surfaces”*, Gergonne's Journal,* 1816-17.

[4] *École Nationale Supérieure des Mines de Paris*, híres francia bányászati egyetem. XVI. Lajos alapította 1783-ban. Még ma is nagyon kevés hallgatót vesz fel (100-120 főt évente), azokat viszont kiváló képzésben részesíti.

[5] *Benoit Paul Émile Clapeyron* (1799 – 1864) francia fizikus és mérnök, a modern termodinamika megalapítóinak egyike.

Lamét egy *pétervári* intézetbe[6] küldték, amely a közlekedési infrastruktúra fejlesztésével illetve képzéssel foglalkozott. Függvénytant, fizikát, matematikát, mechanikát, kémiát és általános mérnöki tudományokat kellett oktatnia és emellett sokféle mérnöki tervezésben közreműködnie (a város környékén levő utak és hidak építése volt csoportjának feladata). Az első évek meglehetősen nehezek voltak az egyetemet éppen csak frissen elvégzett Lamé számára, de fokozatosan mindenbe belejött, megszerette az oktatói munkát is és a tervezéssel sem voltak gondjai. Különösen az akkor forradalmi újdonságnak számító vasútépítés foglalkoztatta (1830-ban több hónapos szabadságot kért, hogy Angliába utazhasson megnézni a *Liverpool-Manchaster* vasútvonal szeptember 15-i megnyitását). Oktatói és tervezői munkája mellett fokozatosan újból elkezdett publikálni (főleg a mérnöki feladatokhoz kapcsolódó matematikai problémák érdekelték) és egyre több cikke jelent meg orosz, francia és német lapokban.

Lamé ezekben az években nősült meg Oroszországban, francia származású feleségétől, *Marguerite Fortunée Bertin de Géraudon*-tól két fia született.

12 évet töltöttek *Szentpétervár*ott, de 1832 tavaszán *Clapeyron*nal együtt úgy határoztak, hogy nem hosszabbítják meg szerződésüket, hanem visszatérnek Franciaországba egy vasútépítéssel és az ehhez kapcsolódó feladatokkal foglalkozó céget alapítani (ebben a döntésben igen nagy szerepe volt Lamé angliai tapasztalatainak). Két francia üzletemberrel társulva a tervezett cég létre is jött, bár megjegyezzük, hogy Lamé viszonylag rövid idő alatt elvesztette az érdeklődését az üzleti élet iránt és hamarosan ki is lépett (az egyébként jól működő) vállalkozás vezetéséből, csak a konzultánsi feladatok ellátását vállalta.

Sokkal inkább kedvére való volt az az ajánlat, amit 1832 őszén kapott korábbi iskolájából, az *École Polytechnique*-tól. Megüresedett a Fizika Tanszék vezetői állása és Lamét kérték fel vezetésére. Négy évvel később, 1836-ban még magasabb pozícióba jutott, tanszékvezetői címének meghagyása mellett kinevezték a francia bányák állami főmérnökének, emellett pedig felkérték, hogy legyen a *Párizs-Versailles* és *Párizs-Saint Germain* vasútvonalak[7] építésének főfelügyelője.

1843-ban tagjává választotta a Francia Tudományos Akadémia is, matematikai munkássága alapján a Geometria Szekcióban kapott helyet. 1844-ben elbúcsúzott az *École Polytechnique*-tól, mert a híres egyetem, a *Sorbonne*[8] kérte fel a Matematikai Fizika Tanszék egyetemi tanárának. 1851-ben már a Tanszék vezetését is átvette, és ezen a poszton dolgozott egészen 1863-ig, amikor egészségügyi problémái miatt abba kellett hagynia a tanítást, és már csak a kutatással foglalkozott. 1870. május 1-én hunyt el Párizsban.

Utolsó évei egyébként nyugodt alkotó munkával teltek el, legjelentősebb művei lényegében ezekben az években születtek. Mint látni fogjuk, különösen így van ez mechanikai jellegű életművével, de máig ható matematikai cikkeit is ekkor publikálta. Az 1850-es évektől őt

[6] A közlekedési infrastruktúra fejlesztésére 1809-ben *Betancourt* francia mérnök által alapított intézmény francia nevet viselt, ahogy akkoriban sok más oroszországi tudományos központ: *Institut et Corps du Genie des Voies de Communication, St Petersburg*.

[7] Mindkettőt 1837-ben nyitották meg.

[8] Királyi támogatással 1257-ben alapította *Robert de Sorbonne*.

tartották Franciaország vezető matematikusának, még maga *Gauss*[9] is így nyilatkozott, pedig ő soha nem osztogatta a dicséreteket tudós társainak…
Halála után Párizsban egy utcát neveztek el róla, és amikor *Gustav Eiffel*[10] a róla elnevezett híres tornyot építette, felvette Lamét azon 72 francia tudós közé[11], akik nevét a torony lábazatán elhelyezett öntöttvas domborműveken örökítette meg az utókornak.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

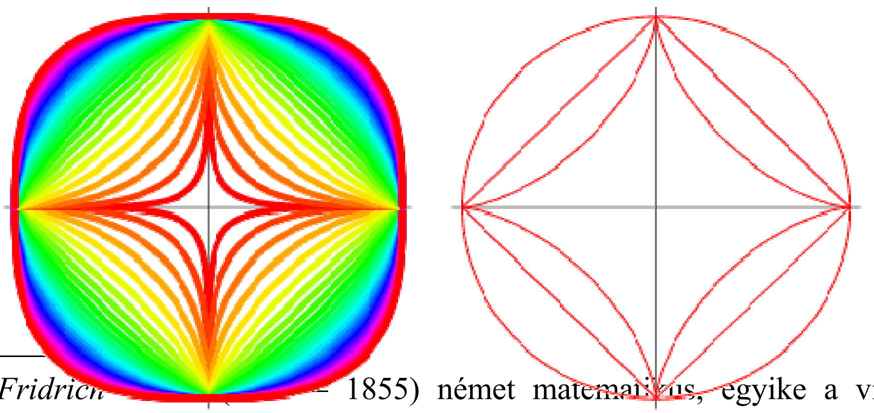
Lamét elsősorban elméleti matematikusként ismeri a tudományos világ, bár ő saját magát inkább „*alkalmazott matematikusként*" jellemezte, hivatkozva arra a sok gyakorlati feladatra, amelyekkel élete során foglalkozott.

Matematikai eredményei közül a *görbevonalú koordináta-rendszerek*[12] általános elméletének kidolgozását tartják az egyik legfontosabbnak. Sokféle feladatot előnyösen tudott kiszámítani segítségükkel, például kimutatta, hogy a $\Delta\varphi = 0$ *Laplace-egyenlet* elliptikus koordináta-rendszerbe transzformálva jóval könnyebben megoldható.

Matematikusok között jól ismertek az *ellipszis-típusú görbéken* (gyakran hívják ezeket Lamé-görbéknek) végzett vizsgálatai. Az első tanulmánya még 1818-ban jelent meg erről a témakörről („*Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie*", *Vve Courcier, 1818*), de későbbi munkáiban[13] is gyakran visszatért vizsgálatukhoz. Az *n* pozitív valós szám segítségével

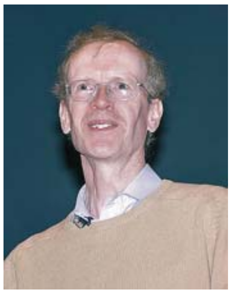
$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n = 1$$

módon megfogalmazott görbesereg igen sokféle alakú képet mutat, néhány érdekes változatot láthatunk például az alábbi ábrán:



[9] *Johann Carl Fridrich* [illegible] 1855) német matematikus, egyike a világ legnagyobb tudósainak.
[10] *Alexandre Gustav Eiffel* (1832 – 1923) francia mérnök, az acélszerkezetű építés kiváló mestere. A nevét őrző párizsi torony mellett ő tervezte a new-yorki Szabadságszobor belső vázát, Ázsia első teljesen acélszerkezetű katedrálisát a Fülöp-szigeteken *San Sebastien*-ben és nem utolsósorban az ő nevéhez fűződik a *budapesti* Nyugati Pályaudvar csarnokszerkezetének megformálása is.
[11] A szilárdságtanhoz kapcsoló tudósok közül megtaláljuk itt például *Cauchy, Navier* és *Poisson* nevét.
[12] Ezt a témakört bemutató összefoglaló jellegű könyvének címe: „Lecons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications", *Mallet-Bachelier, 1859*.
[13] Lásd például: „Leçons sur les fonctions inverses des transcendantes et les surfaces isothermes", *Mallet-Bachelier, 1857.*

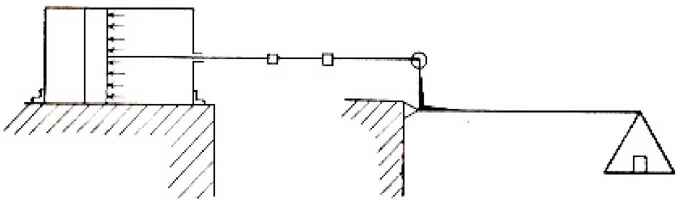
Az ilyen geometriai alakzatok iránt érdeklődök egyébként további hasznos információkhoz juthatnak például a $[4]$ alatti honlapon.



A fentieken kívül Lamé sokat foglalkozott a *számelmélet* egyes kérdéseivel is. Vizsgálta például az úgynevezett *Euklidészi-algoritmus*[14] megoldási lehetőségeit különböző speciális változatokra, továbbá elemezte és megoldotta az utolsó *Fermat-állítás*[15] egy különleges esetét $n = 7$ esetére. A tétel általános bizonyítójának, *Andrew Wiles*-nek arcképét látjuk jobboldalt.

Fizikai kérdéseket is vizsgált, különösen a *hőtan* állt hozzá közel. 1840-ben megjelent „*Cours de physique de l'Ecole Polytechnique. Tome premier, Propriétés générales des corps-Théorie physique de la chaleur", (Bachelier, 1840)* című művét később (amikor már a Sorbonne-on tanított) a „*Leçons sur la théorie analytique de la chaleur" (Mallet-Bachelier, 1861)* című, hasonló témájú könyve követte. Megjegyezzük, hogy sokszor alkalmazta ezekben az írásokban az általa kifejlesztett görbevonalú koordináta-rendszerekre építő matematikai technikát.

Mérnöki – azon belül elsősorban építőmérnöki – munkáira már életrajzában utaltunk. Mint említettük, már Szentpétervárott kapcsolatba került az építőmérnöki feladatok legkülönfélébb változataival. Megemlítjük, hogy – *Clapeyron*nal együtt – tagja volt annak a tervezőcsoportnak, amely egy több mint 300 méteres *függőhidat* (akkoriban a kontinensen a leghosszabb ilyen jellegű híd volt) tervezett a Néván. A híd szerkezeti elemeinek vizsgálatára saját tervezésű szakítógépet építetett (lásd a következő ábrát):



A gép olyan jól működött, hogy segítségével az összes akkoriban Oroszországban gyártott vasfajtát ellenőrizték és Lamé irányításával a vasgyárak kézikönyvet adtak ki a szabványos hitelesítés segítésére.

[14] Az Euklideszi-algoritmus a számelmélet azon feladata, amelynek célja két szám legnagyobb közös osztójának megtalálása. Magát az eredeti feladatot geometriai alapokon *Euklidész* görög matematikus fogalmazta meg kb. 2300 évvel ezelőtt.

[15] *Pierre de Fermat* (1601 – 1665) francia ügyvéd és matematikus. Hivatkozott híres tétele azt állítja, hogy az $a^n + b^n = c^n$ feladatnak ($n > 2$ és mindig egész, *a*, *b* és *c* zérustól különböző egészek) nincs megoldása. Bár *Fermat* azt állította, hogy ő bebizonyította a tétel helyességét, ma a matematikusok és tudománytörténészek vitatják ennek igazát. Több mint háromszáz éves erőfeszítés – és több ezer (!) hibás levezetés – után a tételt végre 1994-ben sikerült bebizonyítania *Andrew Wiles* (1953 –) angol matematikusnak.

Lamé elvégezte a *szentpétervári Szent-Izsák katedrális*[16] kupoláját merevítő bordák stabilitásának elemzését[17], majd később Franciaországban is sokat foglalkozott ívek illetve kupolák stabilitásvizsgálatával.

Az Oroszországban végzett mérnöki munka tapasztalatait *Clapeyron* és Lamé a „*Sur l'equilibre interieur des corps solides homogénes*” című, közösen írt és 1833-ban megjelentetett könyvükben összegezték. Ennek az 1833-as publikációnak Lamé által írt fejezeteiben bukkant fel egyébként először az a gondolat, amely az *elmozdulás-módszerre* építő rugalmasságtani megoldási technikához vezetett, erre azonban majd külön pontban fogunk kitérni.

Lamé itt mutatta be azt a geometriai alakzatot is, amelyet ma *feszültségi ellipszoid* néven ismernek a mérnökök. A rugalmas anyagi viselkedés vizsgálata során ekkor még ő is (francia kortársaihoz hasonlóan) egyetlen egy anyagi konstanst használt.

Rugalmasságtani vizsgálatait 1852-ben megjelent „*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides”* (*Bachelier*) című könyvében összegezte. Ez volt az első könyv a világon, amely kifejezetten csak a szilárdságtan elméleti kérdéseire összpontosított és ebben az értelemben unikumnak számít. Ebben a művében már elismerte az angol *Green*[18] hipotéziseinek jogosságát (lásd a „*Poisson és a Poisson-tényező*” című életrajzban írt részt a rugalmas anyagállandókról!) és – *Cauchy*[19]val és *Poisson*[20]nal ellentétben – ő is *két* konstanst használt a rugalmas anyagi viselkedés elméleti modellezésére (ezeket hívják ma a mechanikában *Lamé-állandók*nak[21]). Kifejezetten bátor tett volt ez a részéről – *Cauchy* bírálta is érte –, mert még sokat kellett várnia a mechanikával foglalkozóknak, amíg a laboratóriumi kísérletek a század második felében végre igazolták a kétparaméteres modell helyességét. Lamé rezgéstani feladatok vizsgálatára is kitért ebben a könyvben, főleg membránok viselkedését elemezte.
Megjegyezzük még, hogy külön fejezetben foglalkozott a rugalmasságtan elméletének optikai alkalmazásaival.

1854-ben újabb szilárdságtani témájú művel jelentkezett, *Liouville*[22] híres folyóratában, a „*Journal de mathematiques*”-ban közölt egy hosszabb tanulmányt „*Mémoire sur l'equilibre d'élasticité des enveloppes sphériques*” címmel, ahol megoszló teherrel terhelt gömbhéjak részletes mechanikai vizsgálatát mutatta be.

---

[16] A római *Szent Péter* és a londoni *Szent Pál* bazilika után a világ *harmadik* legnagyobb kupolájával rendelkező temploma.

[17] Az „*Annales mines*” c. francia lapban 1823-ban részletes tanulmányt is közölt erről.

[18] *George Green* (1793- 1841) angol mérnök és fizikus, az energiaelvű mechanikai vizsgálatok úttörője.

[19] *Augustin Louis Cauchy* (1789 – 1857) világhírű francia matematikus, a mechanika nagyon sokat köszönhet tudományos eredményeinek.

[20] *Siméon-Denis Poisson* (1781 – 1840) kiváló francia matematikus, sokat foglalkozott különféle mechanikai feladatok vizsgálatával.

[21] A két Lamé-paraméter közül az egyik a ma *nyírási rugalmassági* modulusnak nevezett állandó, a másik pedig az $E\nu/\{(1+\nu)(1-2\nu)\}$ összefüggéssel kapcsolható a ma szokásosan használt E *rugalmassági* (*Young-*) *modulushoz* illetve a ν *Poisson-tényezőhöz*.

[22] *Joseph Liouville* (1809 – 1882) francia matematikus.

A *görbevonalú koordináta-rendszerek* matematikai elméletét leíró, már korábban hivatkozott 1859-es munkája is nagyon sok mechanikai feladat megoldását tárgyalja, főleg a rugalmasságtan illetve a termo-mechanika témaköréből. Itt újból megismételte a kétparaméteres rugalmasságtani anyagegyenletek létjogosultságát és végképp elutasította a század elején még oly népszerű – molekulák között erőkre építő – belső erőrendszerek használatát, helyette a *Cauchy* által javasolt feszültségfogalom alkalmazását tartotta egyedül elfogadhatónak.

Laménak ezek a szilárdságtani publikációi komoly befolyást gyakoroltak a mérnökök gondolkodásmódjára. Ebben az időszakban a francia kutatók közül *Saint-Venant*[23] mellett az ő hatása volt a legjelentősebb a mechanika fejlődésére.

Beltrami élete

Eugenio Beltrami 1835. november 16-án született az észak-olaszországi Lombardiában található Cremonában. Ez a város akkor az Osztrák Császársághoz tartozott. Édesapja – ugyancsak *Eugenio Beltraminak* hívták – miniatűröket festő művész volt, apai ágon a legtöbb ős valamilyen kapcsolatban állt a művészetek különböző ágaival.

A kis Eugenio sokat örökölt a család művészi hajlamaiból, bár őt nem a festészet, hanem inkább a zene vonzotta (maga is tehetségesen játszott többféle hangszeren). Emberi természetére is jellemző volt a művészek érzékeny-nyugtalan látásmódja, mint látni fogjuk, egész életében nem tudott néhány évnél hosszabb időt egy helyen eltölteni, mindig vándorolt egyik városból a másikba, új és új feladatokat keresve.

*Lamé*hoz hasonlóan Beltrami is szülővárosában tanult először, itt végezte elemi és középiskoláit. Ezt követően 1853-ban beiratkozott a nagyhírű *Paviai Egyetemre*[24], ahol minden energiáját a matematika tanulásának szentelte. Tanára az akkor éppen *Paviá*ban oktató kiváló matematikus, *Brioschi*[25] volt, aki gyorsan felismerte tanítványa matematikai tehetségét. Sajnos hiába volt remek eredményeket elérő hallgató, 1856-tól családja anyagi nehézségei miatt fel kellett függesztenie a tanulást és munkát kellett vállalnia. Egy vasútépítő mérnök titkáraként dolgozott, először Veronában, majd Milánóban. Munkája mellett sem hagyta abba saját maga képzését, szinte minden idejét matematikai művek olvasásának szentelte, így 1862-ben

[23] *Jean Claude Barre de Saint-Venant* (1797 – 1886) kiváló francia tudós, a mechanika első nagy összefoglaló-rendszerező kutatója.

[24] Európa egyik legrégibb egyeteme, hivatalosan 1361-ben alapították (bár egyes feljegyzések szerint már 825 óta folyt itt felsőfokú képzés). Itt tanult például a híres mechanikus *Girolamo Cardano* (a kardán-tengely névadója) és a kiváló fizikus *Alessandro Volta* (róla nevezték el az elektromos feszültség mértékegységét).

[25] *Francesco Brioschi* (1824 – 1897) olasz matematikus, elsősorban függvénytannal foglalkozott. Nagyszerű előadónak tartották, Beltrami mellett több más leendő kiváló matematikus tanult nála.

Milánóban már arra is elérkezettnek látta az időt, hogy megjelentesse első matematikai tárgyú cikkét. Ennek olyan komoly hatása lett szakmai körökben, hogy a *Bolognai Egyetem*[26] meghívta külső előadónak algebrát és analitikus geometriát tanítani. Kétéves bolognai munka után 1864-ben elfogadta a *Pisai Egyetem*[27] felkérését a *Geodéziai Tanszék* vezetésére. Itt *Pisá*ban ismerkedett meg és kötött barátságot a kiváló tudóssal, *Betti*vel[28].

1866-ban Beltrami már újból *Bolognában* van, most az ottani Elméleti Mechanika Tanszék vezetői posztja üresedik meg, és ő sikeresen pályázik ennek elnyerésére. Most hét évig marad, majd felhasználva az olaszországi politikai változásokat[29] 1873-ben *Rómá*ba, az új fővárosba költözött, elfogadta az ottani egyetem[30] Elméleti Mechanika Tanszékének vezetését. Ez az új állás három évig felelt meg neki, 1876-ban már újból *Páviá*ban, fiatalkora tanulmányainak helyén él, de természetesen most már nem diákként, hanem az ottani Elméleti Mechanika Tanszék vezetőjeként.

Élete leghosszabb „vándorlás nélküli" időszakát töltötte most *Páviá*ban, egészen 1891-ig itt maradt és csak ebben az évben költözött vissza *Rómá*ba, 1876-ban otthagyott tanszékére…
Megjegyezzük, hogy 1899-ben az olasz felsőoktatásban elért eredményeiért megkapta az Olasz Királyság szenátora címet.
Róma volt az utolsó állomáshely életében, most már itt dolgozott és tanított az 1900. február 18-án – hatvanöt éves korában – bekövetkezett haláláig.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Beltrami matematikus volt és a tudományos világ a matematikában elért eredményeire emlékszik elsősorban. Bár nagyon sok cikket és könyvet publikált (halála után 1902 és 1920 között négy vaskos kötetben adták ki összegyűjtött műveit), de legjelentősebb alkotásának ma is a *hiperbolikus geometria*[31] különböző kérdéseiről 1868-ban írt „*Essay on an interpretation of non-Euclidean geometry"* című munkáját, illetve még ugyanabban az évben „*Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante"* című cikkét tartják.

---

[26] Alapítólevele szerint ez a legrégebbi európai egyetem (1088-at tartják ma a történészek elfogadott dátumnak). Itt tanult *Dante, Petrarca, Paracelsus, Kopernikusz, Malpighi* (a vér áramlástanának kutatója)*, Galvani, Goldoni* (drámaíró)*, Umberto Eco* (szintén kiváló író) és sok-sok más híres tudós és művész.

[27] 1343-ban alapított kiváló olasz egyetem. Itt tanított (és/vagy tanult) többek között *Galilei*, *Volterra* (kiváló matematikus és fizikus) és *Enrico Fermi* (híres atomfizikus).

[28] *Enrico Betti* (1823 – 1892) matematikus és fizikus. Algebrával, topológiával és potenciálelmélettel foglalkozott elsősorban, a mérnökök között a felcserélhetőségi tételek miatt ismert.

[29] Olaszország egyesítésére az egyik legfontosabb lépés 1861-ben, az Olasz Királyság kikiáltása volt. Ekkor még Torinó volt az állam székhelye. 1870-ben az olasz csapatok elfoglalták Rómát és a pápai államot is az egységes Olaszországhoz csatolták (korábban a pápa az ott tartózkodó francia csapatok védelme alatt állt, de amikor III. Napóleont a poroszok legyőzték, a franciák kivonultak Rómából). Ettől kezdve Róma lett Olaszország fővárosa.

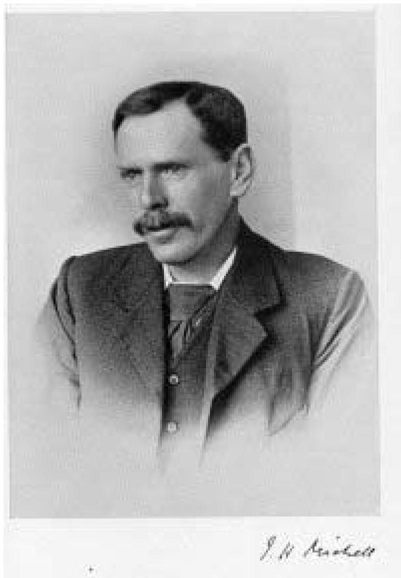
[30] Róma több egyeteme közül ez az 1303-ban alapított *Sapienza Egyetemet* jelentette.

[31] A matematikának ez a területe nem fogadja el a klasszikus geometria *Euklidész* által megfogalmazott tételeit, hanem másféle kapcsolatokat tételez fel az egyes geometriai alakzatok között. Maga a „*hiperbolikus geometria*" elnevezés *Felix Christian Klein* német matematikustól származik 1871-ből.

Ezekben a munkáiban *Bolyai*[32]*, Lobacsevszkij*[33] és *Gauss*[34] nyomdokaiba lépve fogalmazott meg új matematikai tételeket illetve összefüggéseket a nem-euklidészi geometriáról. Megjegyezzük, hogy fontos eredménynek tartják azt is, hogy ezekben a cikkekben kimutatta például a *Bolyai-Lobacsevszkij* illetve a *Riemann*[35]-féle matematikai modellek közötti kapcsolatokat is.

Matematikai munkássága mellett Beltrami optikai, termodinamikai, elektromosságtani és rugalmasságtani feladatok vizsgálatával is foglalkozott (ezek a munkái legkönnyebben az előbb említett poszthumusz kiadású *„Opere Matematiche"* köteteiben férhetők hozzá), de ezeknek a publikációinak közös sajátossága, hogy a vizsgált feladat fizikai tartalma helyett inkább a matematikai háttér elemzésére koncentrálnak, sokkal inkább matematikai, mint fizikai tartalmú dolgozatoknak tekinthetők. A jelenlegi témánk szempontjából fontos szilárdságtani vizsgálat – vagyis az *erőmódszer* – Beltrami által megfogalmazott alapvető egyenletei is tulajdonképpen ilyen jellegű megközelítésből születtek.

Michell élete



John Henry Michell 1863. október 26-án született Ausztráliában, a *Victoria-állam*ban levő *Maldon* nevű kisvárosban. Édesapja – *John Michell* – bányász volt, édesanyja – *Grace Rowse* – a család háztartását vezette. A szülők mindössze hét évvel korábban vándoroltak ki az angliai *Devonshire*-ből, mert úgy látták, hogy Ausztrália biztosabb megélhetést biztosít számukra, mint az állandó válságok sújtotta angol bányák.

Először *Maldon*ban járt iskolába, de a tehetséges fiúra hamar felfigyelő tanárok tanácsára a szülők beíratták a *melbourne*-i *Wesley College*-be. Míg ő itt tanult, szülei 1870-ben rokonlátogatásra Angliába utaztak, és így itt Londonban született meg John kisöccse, a későbbi híres hidromechanikus, *Anthony George Maldon Michell*[36].

A család 1872-ben véglegesen visszatért Ausztráliába. Közben Johnból a *Wesley College* legkiválóbb tanulója lett, egyik ösztöndíjat a másik után nyerte el. Különösen a természettudományi tárgyakból tűnt ki, így nem véletlen, hogy 1881-ben már a *Melbourne-i Egyetem* hallgatója a matematika szakon. 1883-ban – miután minden elérhető egyetemi kitüntetést megkapott és végig osztályelső volt – megszerezte a BSc-fokozatot.

[32] *Bolyai János* (1802 – 1860) kiváló magyar matematikus. Elsősorban a nem-euklidészi geometria tételeinek kidolgozásáról ismert, munkáját 1832-ban publikálta. A Holdon krátert neveztek el róla.

[33] *Nyikolaj Ivanovics Lobacsevszkij* (1792 – 1856) orosz matematikus, *Bolyai*tól függetlenül egy 1830-as cikkében ő is megfogalmazta a hiperbolikus geometria alapvető összefüggéseit.

[34] *Gauss* már egy 1824-ben írt levelében hasonló következtetésekre jutott, mint *Bolyai* és *Lobacsevszkij*, de ezt az ötletét nem publikálta, csak később hivatkozott rá.

[35] *Georg Friedrich Bernhard Riemann* (1826 – 1866) híres német matematikus.

[36] 1870 – 1859. Elsősorban a folyadékokban mozgó testek (hajók, hajócsavarok) súrlódásának kérdéseivel foglalkozott. Kutatásai komoly hatással voltak a XX. század hajótervezésére. Fontos művet írt az optimálásról is.

Kiváló eredményei jutalmaként Michell még ebben az évben az egyetem ösztöndíjával Angliába utazhatott *Cambridge*-be, a *Trinity College*-be matematikai tanulmányait folytatni. Itt is hamarosan a legjobb tanulók közé került. 1890-ben végzett, és rögtön állandó állást kínáltak fel neki a *Trinity College*-ben. Honvágya azonban erősebb volt, nem fogadta el az ajánlatot és még ebben az évben hazautazott[37] Ausztráliába.

A *Melbourne-i Egyetem Matematika Tanszékén* kapott docensi állást és a következő évtizedekben ezt a pozíciót töltötte be minden lényegesebb változtatás nélkül. Soha többet nem utazott külföldre sem. Helyzetében csak az jelentett némi módosulást, hogy 1923-ban – a korábbi tanszékvezető, *Nanson*[38] nyugdíjba vonulása után – őt nevezték ki a Tanszék élére. Még öt évig töltötte be ezt a tisztet, 1928-ban ő is nyugdíjas lett, bár „tiszteletbeli kutató professzorként" mindvégig a Tanszéken maradt.

1940. február 3-án – rövid betegeskedés után – 77 évesen hunyt el a Melbourne-höz közeli *Camberwell*-ben. A városka *Boroondara* nevű temetőjében helyezték örök nyugalomra.

Michell rendkívül szerény, csöndes viselkedésű ember volt. Öccsétől eltérően nem nagyon kedvelte a mozgalmas társasági életet, sokkal inkább szeretett a munkájába zárkózni. Feljegyezték róla, hogy nagyon szerette a klasszikus zenét, kiváló orgonajátékos volt, és rendszeresen játszott is különböző egyházi és világi rendezvényeken. Szabad idejében sokat olvasott, saját maga összeállította könyvtára komoly szépirodalmi gyűjteménnyel rendelkezett. Nagyon szerette a kertészkedést és kiválóan ismerte Ausztrália flóráját, különösen a különböző fafajtákról tudott sokat.

Sohasem nősült meg.

Tudományos munkásságának fontosabb adatai

Michell – életrajzunk másik két szereplőjéhez hasonlóan – szintén matematikus volt. Munkásságának stílusa inkább hasonlít Lamé-éhoz, mivel nem annyira a tisztán elméleti matematikához, hanem inkább a gyakorlati feladatokhoz, elsősorban a hidrodinamika és a rugalmasságtan kérdéseinek megoldásához vonzódott. 1890-ben jelentek meg első publikációi, Angliában, a Royal Society folyóirataiban. Kiemelkedik közülük az „*On the theory of free stream lines"* című munkája[39], amelyet a következő évtizedekben rengetegen idéztek.

Ausztráliába visszatérve is folyamatosan dolgozott különböző mechanikai feladatokon[40], olyan sikerrel, hogy 1902-ben megválasztották a *Royal Society* tagjának, a legelső ausztrál tudósok egyikeként. Ekkoriban írja a szilárdságtan számára jelentős munkáit is, a következő pontban bemutatott erőmódszeres megoldási technika mellett tárcsák illetve félterek

[37] Érdekes hasonlóság ez öccse sorsával, *Anthony* is Angliában tanult építőmérnökként, kiváló eredményei voltak, de ő sem akart Európában maradni, 1889-ben hazautazott.
[38] *Edward John Nanson* (1850 – 1936) angol matematikus.
[39] *Phil. Trans. A.*, Vol. 181, pp. 389-431, 1890.
[40] Egyik leghíresebb ekkori cikke a „The wave resistance of a ship*", Phil. Mag. (5) 45, pp. 106-123, 1898.* Hajótervezéssel foglalkozó könyvek ma is az alapvető munkák között említik.

feszültségfüggvényes vizsgálataival[41], lemezek rezgésszámításával[42] és csavarási feladatokkal[43] is foglalkozott.

A következő években jelentősen csökkent megjelenő cikkeinek száma, mert a Tanszéken – ismerve semmi ellen nem tiltakozó természetét – egyre több oktatási és adminisztratív feladattal halmozták el, így nagyon sokáig egyáltalán nem maradt ideje saját témáinak kutatásához, mivel szinte a legapróbb munkákat is saját magának kellett elvégeznie.

Az 1920-as években kissé könnyebbé vált az élete, tanszékvezetőként már kapott személyzetet, felszabadult az adminisztratív munka jelentős része alól, és végre 1937-ben két kötetben kiadhatta életműve összefoglalásaként a „*The elements of mathematical analysis*" című munkáját[44].

A rugalmasságtan alapvető megoldási módszerei

A XIX. század közepére a mechanikával foglalkozó tudósoknak lényegében már a ma ismert formában álltak rendelkezésre azok a matematikai egyenletek, amelyek a szilárd testek rugalmas viselkedésének vizsgálatához szükségesek.

Az alapvető változók közül a fajlagos alakváltozás fogalma egyszerre több szerzőnél (*Poisson*-nál, *Navier*[45]-nél és *Cauchy*-nál is) felbukkant már a XIX. század elején, de közülük elsősorban a nagy matematikus, *Cauchy* volt az, aki a ma használatos *geometria egyenleteket* elsőként megfogalmazta. Ugyancsak tőle származik az egyensúlyi (vagy más néven Cauchy-) egyenletek szabatos felírása[46]. Az anyagi viselkedés modellezésére *Hooke*[47] már kétszáz évvel korábban megfogalmazta a ma *Hooke-modellként* ismert lineáris kapcsolatot a rugalmas testben létrejövő alakváltozások és a külső erőhatások között. *Young*[48], *Navier* és *Lamé* munkásságának eredményeképpen pedig rendelkezésre álltak azok a kísérletileg is mérhető paraméterek, amelyeket az anyagmodellben használni kellett.

Mindezeket figyelembe véve azt mondhatjuk, hogy ezekben az években a rugalmasságtan 15 ismeretlen változót (hat darab feszültség-, hat darab alakváltozás- és három darab eltolódásfüggvényt) tartalmazó 15 darab egyenlete[49] (*hat* anyagegyenlet, *hat* geometriai

---

[41] „On the direct determination of stress in an elastic solid, with application to the theory of plates", *Proc. Lond. Math. Soc. Vol. 31, pp. 100-124, 1899.*
[42] „Vibrations of a string stretched on a surface", *Messeng. Math., Vol. 19, pp. 87-88, 1890.*
[43] „The uniform torsion and flexure of incomplete tores, with application to helical springs", *Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 31, pp. 130-146., 1899.*
[44] *Macmillan*, 1937.
[45] *Claude Louis Marie Henri Navier* (1785 – 1836) híres francia építőmérnök, a modern gerendaelmélet létrehozója, az első színvonalas építőmérnök-képzés megszervezője.
[46] *Cauchy* életéről és munkásságáról lásd részletesebben a róla készült életrajzot („*Cauchy és az egyensúlyi egyenletek*").
[47] *Robert Hooke* (1635 – 1703) kiváló angol fizikus, csillagász és biológus. Nevéhez fűződik a rugalmas viselkedés első pontos kísérleti modellezése. Életéről a „*Hooke és a rugalmas anyagmodell*" című életrajzban olvashatunk.
[48] *Thomas Young* (1773 – 1829) egyike a legnagyobb angol tudósoknak. Életéről részletesen olvashatunk a „*Young és a rugalmassági modulus*" című életrajzban.
[49] Természetesen ezekhez hozzátartoznak a megfelelő feszültségi és elmozdulási peremfeltételek, csak az egyszerűség kedvéért most nem említjük őket.

egyenlet és *három* egyensúlyi egyenlet[50]) ismert volt a kutatók és mérnökök előtt. Az alapvető célt most már az jelentette, hogy hogyan lehet ezeket tényleges mérnöki feladatok megoldására használni. Sajnos a kutatók nagyon hamar rájöttek, hogy ez a bonyolult egyenletrendszer ebben az *eredeti* formában kezelhetetlen, egészen elemi példák kivételével nem alkalmas arra, hogy gyakorlati problémák vizsgálatára alkalmazzák. Megindult tehát a kutatás, hogy egyszerűbb formában fogalmazzák meg az *eredeti* matematikai rendszert, alkalmassá téve azt hétköznapi számítások céljaira.

Elsőként *Navier* vetette fel az egyenletek egyszerűsítésének lehetőségét az 1826-ban megjelent „*Résumé des Leçons de Mecanique*” című pompás tankönyvében. Nem vezette le részletesen az átalakítást, de utalt arra, hogy megfelelő helyettesítésekkel az ismeretlenek száma csökkenthető, éppen úgy, ahogy ezt egy hagyományos lineáris egyenletrendszernél is meg tudjuk tenni. Ő gyakorlati okokból elsősorban az *eltolódások* függvényeit javasolta meghatározni, mivel véleménye szerint ezek a szerkezeteknél legkönnyebben ellenőrizhető mechanikai változók. Az eredeti rugalmasságtani egyenletrendszer ilyen jellegű átalakítására végülis Lamé vállalkozott. A *Clapeyron*nal 1833-ban közösen írt „*Sur l'equilibre interieur des corps solides homogénes*” című könyv általa írt részében bemutatta, hogy ha az anyagmodellek feszültségekre rendezett egyenleteinél felhasználjuk a geometriai egyenleteket úgy, hogy az alakváltozásokat az eltolódások függvényeivel helyettesítjük, akkor megkapjuk a feszültségek és az *u, v, w* eltolódásfüggvények kapcsolatát. A következő képletekben *G* a nyírási rugalmassági modulus, λ a Lamé-állandónak nevezett anyagi paraméter (*G*-vel és a *Poisson-tényezővel* kifejezve: $\lambda = \dfrac{2G\nu}{1-2\nu}$), *e* pedig az alakváltozástenzor első skalár invariánsát jelöli.

$$\sigma_x = \lambda e + 2G\frac{\partial u}{\partial x}, \sigma_y = \lambda e + 2G\frac{\partial v}{\partial y}, \sigma_z = \lambda e + 2G\frac{\partial w}{\partial z},$$

$$\tau_{xy} = G\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right), \tau_{yz} = G\left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right), \tau_{zx} = G\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right).$$

Ha ezeket a feszültségfüggvényeket behelyettesítjük a *Cauchy-egyenletek*be, máris megkapjuk az alapegyenletek redukált változatát. Itt már csak a három darab eltolódásfüggvény az ismeretlen (Δ a matematika *Laplace-operátor*át, g_x, g_y, g_z pedig a tömegerők függvényének három komponensét jelenti):

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial x} + G\Delta u + g_x = 0,$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial y} + G\Delta v + g_y = 0,$$

$$(\lambda + G)\frac{\partial e}{\partial z} + G\Delta w + g_z = 0.$$

Ezeket az egyenleteket a mechanikában *Navier-Lamé-egyenleteknek* (sok könyvben egyszerűbb elnevezéssel *Lamé-egyenletek*nek) hívják. Ez a rendszer a feladathoz tartozó megfelelő elmozdulási *peremfeltételekkel* együtt a mechanika *elmozdulásmódszer* típusú *peremérték-feladati* alakja. Az elnevezés onnan adódik, hogy csupán az eltolódások az ismeretlenek az egyenletekben. Ha ezeket sikerül meghatározni, akkor a geometriai

[50] Ezeket az egyenletek minden alapvető szilárdságtani munkában megtalálhatók, lásd például az [5] alatti művet.

egyenletekből az alakváltozások, illetve ezekből az anyagmodell segítségével a feszültségek számíthatók.

Lamé egyenletei nem csak a szilárdságtani feladatok megoldásánál nyújtottak segítséget az eredeti feladat egyszerűsítésével, hanem általános elvként a mechanika más területein (tartók statikája, dinamika, stb.) is hivatkozási alapul szolgáltak, amikor egy konkrét feladat megoldásának jellegét kellett minősíteni. Ezt követően minden olyan számítási technikát, ahol az ismeretlen változók elmozdulások voltak, *elmozdulásmódszernek* neveztek a mérnökök.

Néhány évtized múlva az olasz Beltrami alkotta meg a Lamé-egyenleteknek megfelelő módosítást a másik változócsoporttal, a feszültségekkel. 1888-ban írta azt a tanulmányát, ahol különböző matematikai eszközök fizikai feladatokon való alkalmazására többek között bemutatta a rugalmasságtani egyenletek átalakításának egy lehetséges módját, hivatkozva Lamé korábban említett könyvére. Ez a munkája gyakorlatilag ismeretlen maradt a mérnökök között, csak az 1902-ben megjelent *„Opere Matematiche”* gyűjteményes kötetekben publikált levezetésre figyeltek fel igazán a mechanikával foglalkozó tudósok.

Beltrami a geometriai egyenletekből indult ki, átalakította őket a ma kompatibilitási összefüggésekként[51] ismert alakba (vagyis eliminálta az elmozdulásfüggvényeket), majd behelyettesítette ide az anyagegyenleteket. Az egyensúlyi egyenletekkel együtt így már egy olyan rendszer állt rendelkezésére, ahol csak a feszültségfüggvények voltak ismeretlenek. Ez a rendszer azonban meglehetősen bonyolult összefüggéseket tartalmazott a hat ismeretlen függvényre, ezért Beltrami matematikai „trükkök” sorozatával átalakította ezt egy matematikailag jóval „elegánsabb” formába. Ez a módosítás jóval hosszadalmasabb, mint a Lévi-féle átalakítás, ezért itt most nem ismertetjük. A levezetés egyébként részletesen megtalálható a *Bojtár-Tarnai: „Mechanika MSc”* című egyetemi jegyzetben vagy a $\left[6\right]$ alatti irodalomban.

Beltramitól teljesen függetlenül Michell 1900-ban megjelent *„Some elementary distributions of stress in three dimensions”* (*Proc. Lond. Math. Soc., Vol. 32, pp. 23-35.*) című cikkében szintén megoldotta ugyanezt a feladatot, azzal a – javára írható – különbséggel, hogy ő nem hanyagolta el a szilárd test tömegerőit a számításban, ahogy Beltrami tette. A különbség rávilágít a kettőjük közötti szemléletbeli eltérésre: Michell – bár szintén matematikus volt – mindig a mérnöki szempontokat tartotta elsődlegesnek, míg Beltrami számára inkább a matematikai „technika” volt fontos.

Megjegyezzük, hogy Michellnek a tömegerők figyelembevétele miatt néhány másféle módosítást is figyelembe kellett vennie[52], de a levezetés végeredményben ugyanarra az alakra vezetett mindkettőjüknél:

[51] A kompatibilitási egyenleteket lásd részletesen az $\left[5\right]$ alatti műben.

[52] Az egyetemi jegyzetben hivatkozott levezetés a részletesebb Michell-féle változatot mutatja be.

$$\Delta\sigma_x + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial x^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial g_x}{\partial x},$$

$$\Delta\sigma_y + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial y^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial g_y}{\partial y},$$

$$\Delta\sigma_z + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial z^2} = -\frac{\nu}{1-\nu}\left(\frac{\partial g_x}{\partial x} + \frac{\partial g_y}{\partial y} + \frac{\partial g_z}{\partial z}\right) - 2\frac{\partial g_z}{\partial z},$$

$$\Delta\tau_{xy} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial y} = -\left(\frac{\partial g_y}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial y}\right),$$

$$\Delta\tau_{xz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial x\partial z} = -\left(\frac{\partial g_z}{\partial x} + \frac{\partial g_x}{\partial z}\right),$$

$$\Delta\tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu}\frac{\partial^2 S}{\partial y\partial z} = -\left(\frac{\partial g_z}{\partial y} + \frac{\partial g_y}{\partial z}\right).$$

Ezeket az összefüggéseket[53] *Beltrami-Michell-egyenleteknek* hívjuk, a feszültségi peremfeltételekkel kiegészítve ezek alkotják a mechanikában *erőmódszernek* nevezett eljárás peremértékfeladatát. Megjegyezzük, hogy a *tömegerők nélküli* alakot szokás *Beltrami-egyenleteknek* nevezni.

Most is megismételjük a Lamé-egyenleteknél elmondottakat: A mérnökök és a mechanikával foglalkozó tudósok ezeket a publikációkat követően minden olyan megoldási technikát, amely a f*eszültségváltozókat*[54] tekinti a feladat alapvető ismeretlenjeinek, *erőmódszernek* hívtak.

Tudománytörténeti szempontból érdekes megjegyezni, hogy az *Airy*[55] által jóval korábban javasolt (és *Maxwell*[56] által azonnal általánosított) feszültségfüggvények[57] elméleti bevezetésekor tulajdonképpen nagyon hasonló lépéssorozatot használtak a kiindulási egyenletek átalakítására. A különbség ott van, hogy *Airy* kizárólag kétdimenziós feladattal foglalkozott[58], továbbá az általa a mechanikai probléma megoldására bevezetett feszültségfüggvény alapvetően *másféle matematikai* alakra formálja az eredeti feladatot. Ennek ellenére az *Airy-féle* megoldás is az erőmódszeres technikák közé sorolható.

---

[53] A képletekben S a feszültségtenzor első invariánsát jelöli. Ma erre a célra az I_1 szimbólumot használjuk, de most megtartottuk a Beltrami (és Michell) által használt klasszikus elnevezést.

[54] Vagy a feszültségekből integrálható belső igénybevételeket.

[55] *George Biddell Airy* (1801 – 1892) angol csillagász és matematikus, mechanikai számításokkal is foglalkozott.

[56] *James Clerk Maxwell* (1831 – 1879) skót matematikus és fizikus, a legnagyobb tudósok egyike. Sokat foglalkozott mechanikai témájú feladatokkal is.

[57] Lásd részletesen az *„Airy és a feszültségfüggvények"* című életrajzot.

[58] Megjegyezzük, hogy *Maxwell* megadta a háromdimenziós változatot, bár ez a mérnökök körében nem vált ismertté.

Felhasznált irodalom

1./ Timoshenko, S. P.: History of Strength of Materials, *McGraw-Hill, 1953*.
2./ Love, A. E. H.: A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity, *Cambridge University Press, 1892*.
3./ Todhunter, I. – Pearson, K.: A History of the Elasticity and of the Strength of Materials from Galilei to the Present Time, Vol. I-II, *Cambridge University Press, 1886.*
4./ http://mathworld.wolfram.com/Superellipse.html
5./ Kaliszky S. – Kurutzné K. M. – Szilágyi Gy.: Szilárdságtan, *Egyetemi Tankönyv, 2000.*
6./ Muszhelisvili, N.: Some basic problems of mathematical theory of elasticity. *P. Nordhoff. 1953*.