KOORDINÁTASZÁMÍTÁS AZ ELLIPSZOIDON

1. Ellipszoidi háromszögek megoldása

2. Geodéziai főfeladatok számítása

Ellipszoidi háromszögek megoldása

Gauss-tétel: Bármely felület elemi darabja helyettesíthető annak a gömbnek az elemi darabjával, melynek sugara azonos a kérdéses felület középgörbületi sugarával a felület súlypontjában.
Az $R=\sqrt{MN}$ sugarú gömbön fekvő háromszögekkel számíthatunk, ha R az ellipszoid középgörbületi sugara a háromszög súlypontjában. Ez az ún. közepessugarú gömb vagy simulógömb.

↓

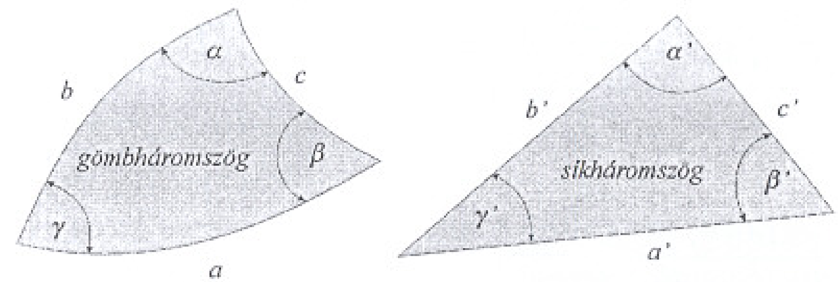
ellipszoid ➡ gömb ➡ sík

Legendre-féle megoldás ↑

Soldner-féle megoldás ↑

Legendre-féle megoldás

Az oldalhosszak számításakor a háromszöget Gauss tétele alapján gömbháromszögnek tekintjük, melynek szögei azonosak az ellipszoidi háromszög szögeivel. Az oldal hosszak a síkháromszögekre vonatkozó összefüggésekkel számíthatók, ha a gömbi szögeket a szögfelesleg harmadával csökkentjük. A gömbháromszög oldalai csekélyek a Föld méreteihez képest.



Adott: α, β, γ és a=s_{12}, φ_1

$$a=6\ 378\ 160\ m \qquad e^2=0{,}006\ 694\ 605$$

Számítandó: b és c

$$a'=a \quad , \quad \alpha'=\alpha-\frac{\varepsilon''}{3}$$
$$b'=b \quad , \quad \beta'=\beta-\frac{\varepsilon''}{3}$$
$$c'=c \quad , \quad \gamma'=\gamma-\frac{\varepsilon''}{3}$$

$$\varepsilon''=\frac{F}{R^2}\rho''=\frac{s_{12}^{\,2}}{2R^2}\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\sin\alpha}\rho''$$

$$R=\sqrt{MN}=\frac{a\sqrt{1-e^2}}{\left(1-e^2\sin^2\varphi_1\right)}$$

Soldner-féle megoldás

(hosszpótlékos megoldás)

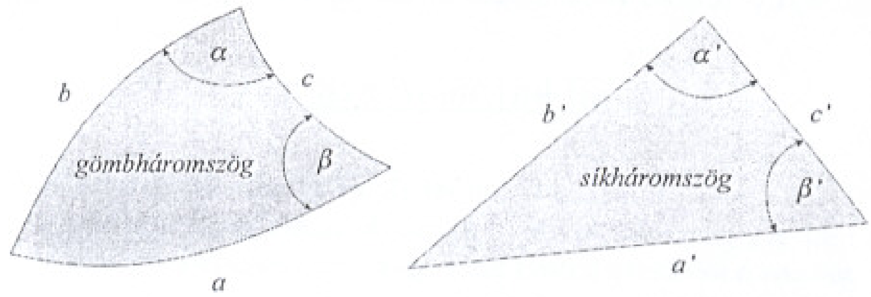
Síkbeli segéd háromszög bevezetése a gömb- háromszög helyett. Az a két szöge amely a keresett oldal meghatározásához szükséges változatlan ➡ nem kapjuk meg a gömbháromszög oldalhosszát, ezt a síkháromszög oldalhosszából korrekcióval, az ún. additament-tel (hosszpótlék) számítjuk.

Adott: α, β, γ és $a=s_{12}$

Számítandó: b és c

Két szöget azonosnaknak tekintünk a síkon és a gömbön, és kiszámítunk egy oldalt ➡ nem egzakt megoldás

b oldal számítása: a , α' , β' $\rightarrow b'$



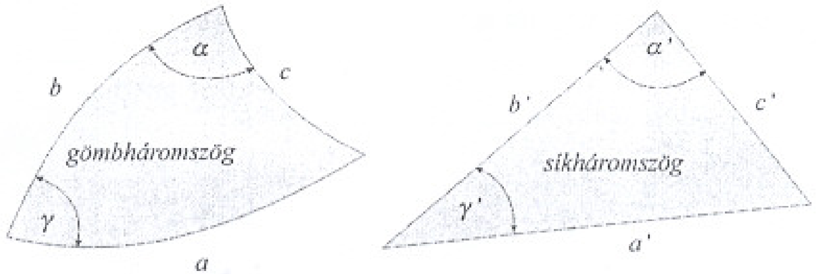
$$\alpha'=\alpha \qquad a'=a-Aa$$
$$\beta'=\beta \quad , \quad b'=b-Ab$$
$$\gamma'\neq\gamma$$

Additament:

$$Aa=\frac{a^3}{6R^2} \quad , \quad Ab=\frac{b^3}{6R^2} \quad , \quad \mathrm{R}=\sqrt{\mathrm{MN}}$$

$$a'=a-\frac{a^3}{6R^2} \quad , \quad b'=a'\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \quad , \quad b=b'+\frac{b'^3}{6R^2}$$

c oldal számítása: a , α' , γ' $\rightarrow c'$



$$\alpha = \alpha' \qquad\qquad a' = a - Aa$$
$$\gamma = \gamma' \quad , \quad c' = c - Ac$$
$$\beta \neq \beta'$$

Additament:

$$Aa = \frac{a^3}{6R^2} \quad , \quad Ac = \frac{c^3}{6R^2} \quad , \quad \mathrm{R} = \sqrt{\mathrm{MN}}$$

$$a' = a - \frac{a^3}{6R^2} \quad , \quad c' = a' \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} \quad , \quad \mathrm{c} = c' + \frac{c'^3}{6R^2}$$

Geodéziai főfeladatok számítása

Azokat a koordinátaszámításokat, amelyeket a Föld „matematikai modelljeként" bevezetett forgási ellipszoidon mint alapfelületen végzünk, geodéziai főfeladatoknak nevezzük.

I. geodéziai főfeladat: Adott az ellipszoidon az A pont (φ_A, λ_A) ellipszoidi földrajzi koordinátáival, az AB felületi görbe s_{AB} ívhossza és a görbe A pontbeli α_{AB} azimutja. Meghatározandó a B pont (φ_B, λ_B) koordinátái és a B pontbeli α_{BA} azimut. (Ennek a feladatnak a síkon a poláris pont számítás felel meg).

II. geodéziai főfeladat: az I. főfeladat inverze. Adott az ellipszoid felületén az A és a B pont a (φ_A, λ_A) és a (φ_B, λ_B) ellipszoidi földrajzi koordinátáival. Meghatározandó a két pontot összekötő AB felületi görbe s_{AB} ívhossza és a görbe A és B pontbeli α_{AB} és α_{BA} azimutja. (Ennek a feladatnak a síkon az irányszög és távolság számítás felel meg).

I. geodéziai főfeladat

Gerstbach-féle megoldás ➡ munkaképleteket a MacLaren sor negyedrendű tagokig való sorbafejtésével, a geodéziai vonalnak a keresett pontban lévő azimutját a Clairaut egyenlet alapján vezette le. **A rövidített képletek**

$$\varphi = 45^o - 54{,}5^o \text{ között és } s \le 60km$$

esetén használhatók.

1. $c = \frac{a^2}{b}$ 2. $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_i$ 3. $V = \sqrt{1+\eta^2}$

4. $u' = \frac{sV}{c} \cos\alpha_{ik}$ 5. $t = \mathrm{tg}\,\varphi_i$ 6. $\bar{t} = \mathrm{tg}\,\varphi_k$

7. $\alpha = \alpha_{ik}$ 8. $\bar{\alpha} = \alpha_{ki}$

9. $$\frac{\Delta\varphi}{\rho'' V^2} = u'\left\{1 - \frac{u'}{2}\left[3t\eta^2 + \mathrm{tg}^2\,\alpha\left(t + u'\left(0{,}323 + (t+u')^2\right)\right)\right]\right\}$$

10. $$\frac{\Delta\lambda \cos\varphi_i}{\rho''} = u'\,\mathrm{tg}\,\alpha\left\{1 + u'\left[t + u'\left(0{,}3343 + (t+u')^2 - \frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha}{3}(t + 2{,}5u')^2\right)\right]\right\}$$

11. $\varphi_k = \varphi_i + \Delta\varphi$ 12. $\lambda_k = \lambda_i + \Delta\lambda$

13. $$\sin\alpha_{ki} = \sin\alpha_{ik}\sqrt{\frac{\bar{t}^2 + 1 + e'^2}{t^2 + 1 + e'^2}}$$

II. geodéziai főfeladat

Gerstbach-féle megoldás ➡ Gauss-módszerrel a geodéziai vonal elsőrendű differencil egyenlet-rendszerét oldja meg Taylor-sorfejtéssel.
Az I. főfeladathoz hasonlóan

$$s \le 60km \text{ és } 1{,}0 \le \mathrm{tg}\,\varphi\ 1{,}4$$

esetén egyszerűbb képletek használhatók.

1. $c = \frac{a^2}{b}$ 2. $\eta^2 = e'^2 \cos^2 \varphi_o$ 3. $V = \sqrt{1+\eta^2}$

4. $\Delta\varphi = \varphi_k - \varphi_i$ 5. $\Delta\lambda = \lambda_k - \lambda_i$ 6. $\varphi_o = \frac{\varphi_i + \varphi_k}{2}$

7. $$s \sin\alpha_o \frac{\rho''}{c} = \frac{\Delta\lambda \cos\varphi_o}{V}\left[1 + \frac{0{,}96\Delta\varphi^2 - \Delta\lambda^2 \sin^2\varphi_o}{24\rho''^2}\right]$$

8. $$s \cos\alpha_o \frac{\rho''}{c} = \frac{\Delta\varphi \cos\frac{\Delta\lambda}{2}}{V^3}\left[1 + \frac{\Delta\lambda^2 \cos^2\varphi_o}{24\rho''^2}\right]$$

9. $$\alpha_o = arc\,\mathrm{tg}\frac{s\sin\alpha_o \frac{\rho''}{c}}{s\cos\alpha_o \frac{\rho''}{c}}$$

10. $$s = \frac{s\sin\alpha_o \frac{\rho''}{c}}{\sin\alpha_o \frac{\rho''}{c}} = \frac{s\cos\alpha_o \frac{\rho''}{c}}{\cos\alpha_o \frac{\rho''}{c}}$$

11. $\Delta\alpha = \Delta\lambda \sin\varphi_o \left[1 + \frac{2\Delta\lambda^2 \cos^2\varphi_o + 3\Delta\varphi^2}{24\rho''^2}\right]$

12. $\alpha_{i,k} = \alpha_o - \frac{\Delta\alpha}{2}$ 13. $\alpha_{k,i} = \alpha_o + \frac{\Delta\alpha}{2} + 180^o$

Az IUGG 1967-es ellipszoid geometriai paraméterei

a = 6 378 160 *m* *az ellipszoid fél nagytengelye*

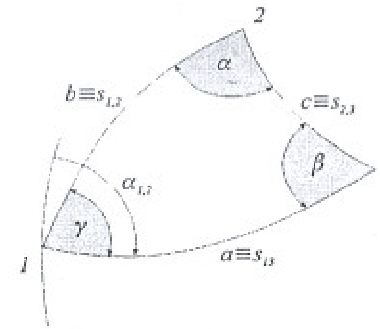
b = 6 356 774,516 *m* *az ellipszoid fél kistengelye*

az ellipszoid első numerikus excentricitása és négyzete

e = 0,081 820 567 9 , e^2 = 0,006 694 605

az ellipszoid második numerikus excentricitása és négyzete

e' = 0,082 095 829 0 , e'^2 = 0,006 739 725 198



1. <u>adott:</u> $\varphi_1, \lambda_1, \alpha_{1,2}, s_{1,2}$ **<u>számított:</u>** $\varphi_2, \lambda_2, \alpha_{2,1}$ **I. főfeladattal**

<u>ellenőrzés:</u> $s_{1,2}, \alpha_{1,2}, \alpha_{2,1}$ **számítása II. főfeladattal**
$\varphi_1, \lambda_1, \varphi_2, \lambda_2$ **adatokból**

2. <u>adott:</u> $\varphi_1, \lambda_1, \alpha_{1,3} = \alpha_{1,2} - \gamma, s_{1,3}$ **<u>számított:</u>** $\varphi_3, \lambda_3, \alpha_{3,1}$
I. főfeladattal

<u>ellenőrzés:</u> $s_{1,3}, \alpha_{1,3}, \alpha_{3,1}$ **számítása II. főfeladattal**
$\varphi_1, \lambda_1, \varphi_3, \lambda_3$ **adatokból**

3. <u>adott:</u> $\alpha_{2,1}, \alpha_{31}, \alpha, \beta$ **<u>számított:</u>** $\alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}$

a belső szögek felhasználásával $\alpha_{2,3} = \alpha_{2,1} + \beta$
$\alpha_{3,2} = \alpha_{3,1} - \alpha$

4. <u>ellenőrzés:</u> $\alpha_{2,3}, \alpha_{3,2}, s_{2,3}$ **számítása II. főfeladattal**
$\varphi_2, \lambda_2, \varphi_3, \lambda_3$ **adatokból**

<u>Figyelem:</u>

s [0,001] *m* , φ, λ, α [0,0001"] *élességgel számítandó !*