Kiegyenlítő számítások MSc 2023/24

3. előadás

Áttekintés

- Bevezetés a Bayesi statisztikába
- Metrológiai alapfogalmak
- Mérési bizonytalanság meghatározása a GUM előírásai alapján

Bevezetés a Bayesi statisztikába

- szubjektív valószínűség
- Bayes tétele
- Bayesi becslés és hipotézisvizsgálat
- a bayesi statisztika alkalmazásai a geodéziában

A valószínűség fogalma

- A *klasszikus* felfogás szerint a valószínűség objektív fogalom: a megismételt események relatív gyakoriságának határértéke
- A *bayesi* keretek szerint a valószínűség fogalma jóval szabadabban értelmezhető:
  nem csak tömegesen előforduló események bekövetkeztését jellemző számérték, hanem egyes, nem ismétlődő események vagy állapotok bekövetkezésének *várt* gyakoriságát jellemző mérőszám (szubjektív valószínűség)

Klasszikus és bayesi statisztika

- statisztikai számítások nagyrészt valószínűségekkel végzett súlyozott átlagolást vagy integrálást jelentenek

  klasszikus módszerek:

  mintatérben integrálnak vagy átlagolnak

  bayesi módszerek:

  hipotézisekre (paraméterekre) vonatkozóan integrálnak vagy átlagolnak

Bayes tétele

- Ha A és B két egymástól nem független esemény, az együttes bekövetkezésük valószínűsége

$$P(AB) = P(A|B)\,P(B) = P(B|A)\,P(A)$$

- Ebből átrendezéssel megkapható a Bayes-tétel

$$P(B|A) = \frac{P(A|B)\,P(B)}{P(A)}$$

Bayes tétele teljes eseményrendszerre

- Ha B nem egy elemi esemény, hanem $B_1, B_2, \ldots, B_k$ az események teljes rendszere, akkor a teljes valószínűség tétele $$\sum_{i=1}^{K} P(A|B_i)P(B_i) = P(A)$$
- és a Bayes-tétel ($j = 1, 2, \ldots, K$) $$P(B_j|A) = \frac{P(A|B_j)P(B_j)}{\sum_{i=1}^{K} P(A|B_i)P(B_i)}$$

Példa a Bayes-tétel alkalmazására
(Hunyadi, 2011)

- A beszállító esetén a selejtarány 0.2, B beszállítónál pedig 0.3
- Nem tudjuk biztosan, hogy egy adott szállítmány melyik szállítótól származik
- Előzetes feltételezés a korábbi tapasztalat alapján:
  0.4 valószínűséggel A szállító, 0.6 valószínűséggel B szállító
- egyetlen kételemű mintában egy hibátlan és egy selejtes van
  ($k = 1$ a selejtes darabok száma, ez az adat)
- Hogyan módosul az előzetes feltételezés a minta ismeretében?

Számítás

- A keresett θ paraméter diszkrét, csak két értéke lehet (A vagy B volt a beszállító)
- A paraméter kezdeti valószínűség eloszlása (*prior*)

$$P(A)=0.6 \quad P(B)=0.4$$

- A selejtes darabok k száma binomiális eloszlást követ (miért?), az adat ($k=1$) valószínűsége a paraméter függvényében (ez a likelihood) így írható fel:

$$P(k=1|A)=2\cdot 0.2\cdot(1-0.2)=0.32$$
$$P(k=1|B)=2\cdot 0.3\cdot(1-0.3)=0.42$$

Számítás

- A keresett feltételes valószínűség szintén kételemű „eloszlás” lesz (*poszterior*): mi az egyes beszállítók valószínűsége a minta ismeretében? Alkalmazzuk a Bayes-tételt:

$$P(A|k=1)=\frac{P(k=1|A)\cdot P(A)}{\sum_{i\in(A,B)} P(k=1|i)\cdot P(i)}=\frac{0.32\cdot 0.6}{0.36}=0.53$$

$$P(B|k=1)=\frac{P(k=1|B)\cdot P(B)}{\sum_{i\in(A,B)} P(k=1|i)\cdot P(i)}=\frac{0.42\cdot 0.4}{0.36}=0.47$$

- Kezdeti hitünk a minta hatására kicsit megváltozott: A 0.6-ról 0.53-ra, illetve B 0.4-ről 0.47-re. A példából jól látható a fordított irányú gondolkodás

A bayesi becslés (következtetéselmélet)

- Bayes tétele – sűrűségfüggvényekre felírva

$$f(\theta|x) = \frac{f(x|\theta)\,f(\theta)}{f(x)} \propto f(x|\theta)\,f(\theta)$$

- A θ paraméter a becslés tárgya, az x minta a tapasztalati eredmények. Az $f(\theta)$ fejezi ki a paraméterre vonatkozó a priori ismereteinket (prior)

- Az $f(x|\theta)$ a likelihood függvény, az $f(\theta|x)$ a becslés eredményét jelentő a posteriori sűrűségfüggvény (posterior). Ez fejezi ki milyen a vizsgált paraméter eloszlása. Az $\propto$ jel az arányosságra utal, mivel $f(x)$ egyetlen szám (egy minta van)

A klasszikus és bayesi statisztika eltérései (Hunyadi, 2011)

Tulajdonság	Klasszikus statisztika	Bayesi statisztika
1. Paraméter	Rögzített	Valószínűségi változó
2. Valószínűség	Objektív	Szubjektív is lehet
3. Külső információ	Nincs vagy csak kevés	Van és lényeges
4. Minta	Valójában csak egy van, de feltételezzük az ismételt mintavétel lehetőségét	Csak egyetlen mintát értékelünk

Hipotézisvizsgálat

- Lényegesen eltér a klasszikus statisztikában megszokottól
- H_0 nullhipotézis, H_1 ellenhipotézis szimmetrikus és megfordítható (a klasszikus statisztikában H_0 kitüntetett szerepet játszik)
- Egyszerű választás két hipotézis között a posterior esélyhányados (odds) alapján
- prior esélyhányados (PRO), posterior esélyhányados (POO)

$$PRO = \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \qquad POO = \frac{P(H_1|x)}{P(H_0|x)}$$

Összefüggés a prior és posterior esélyhányados között

- Egyetlen θ paraméterre, folytonos esetben

$$POO = \frac{P(H_1)}{P(H_0)} \cdot \frac{\int P(x|\theta, H_1) P(\theta|H_1) d\theta}{\int P(x|\theta, H_0) P(\theta|H_0) d\theta}$$

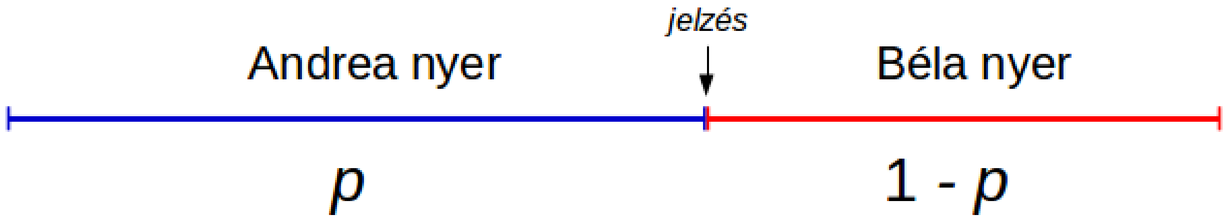
- Ha a posterior esélyhányados egynél nagyobb, akkor a mintavétel után az ellenhipotézist tartjuk esélyesebbnek, és azt fogadjuk el, míg ha egynél kisebb, akkor a nullhipotézist
- szignifikanciaszint, *p*-érték értelmetlenek, mert azok a *minták* összességére tesznek valamilyen megbízhatósági állítást

Példa a bayesi következtetésre: a Bayes-féle billiárd játék

- Andrea és Béla egy olyan játékot játszanak, amelyben az nyer, aki elsőként szerez meg 6 pontot
- A játékteremben egy billiárdasztal található, amelyet egyikük sem láthat
- A játék kezdete előtt a segítő az asztalra egy golyót gurít, amely egy véletlenszerű helyen áll meg és ezt a helyet megjelöli
- Ezután minden pontot egy golyó gurítása után osztanak ki. Ha ez a golyó a jelzéstől balra áll meg, akkor Andrea, ha jobbra, akkor Béla kap pontot
- Andrea már 5 pontot szerzett, Bélának csak 3 pontja van. Mi Andrea nyerési esélye Bélával szemben?

Ha tudnánk hol a vonal, könnyű dolgunk lenne

- A tábla jelzéstől balra eső részének aránya legyen p. Ez annak valószínűsége, hogy Andrea kap pontot. Annak valószínűsége, hogy a pont Béláé lesz, $(1-p)$. (Bernoulli-eloszlás)



- Ha p-t ismernénk, könnyű lenne a dolgunk. Béla csak akkor nyerhet, ha egymás után 3 pontot nyer. Ennek az esélye $(1-p)^3$, minden más esetben Andrea nyer, tehát az ő nyerési esélye $[1-(1-p)^3]$.
- Modell: p értéke, adat: a következő, legfeljebb 3 pontot eredményező kimenetek. Ennek valószínűsége a modell segítségével (likelihood): $P(\text{adat} \mid \text{modell})$

Maximum likelihood becslés

- A likelihood függvény azt fejezi ki, hogy a paraméterek mely értéke eredményezhette legvalószínűbb módon a megfigyelt adatokat
- A probléma az, hogy nem ismerjük p-t, de szükségünk van rá az eredmény kiszámításához (muszájparaméter)
- A maximum likelihood becslés p-re egyenlő Andrea nyerésének relatív gyakoriságával, vagyis $5/8$-al.
- Ezért Béla nyerési esélye $(3/8)^3 = 27/512$, Andreaé pedig $485/512$, vagyis körülbelül $18:1$-hez

Bayes-féle becslés

- Annak az E várható valószínűségét keressük, hogy Béla fog nyerni. Ez súlyozott átlagként számítható a p paraméter minden lehetséges értékére:

$$E(\text{Béla nyer}) = \int_0^1 (1-p)^3 P(p|A=5, B=3)\,dp$$

- $P(p|\,A=5,\,B=3)$ az a valószínűség, hogy az adott p érték helyes a megfigyelés birtokában, hogy Andreának 5, Bélának 3 pontja van

Inverz valószínűség

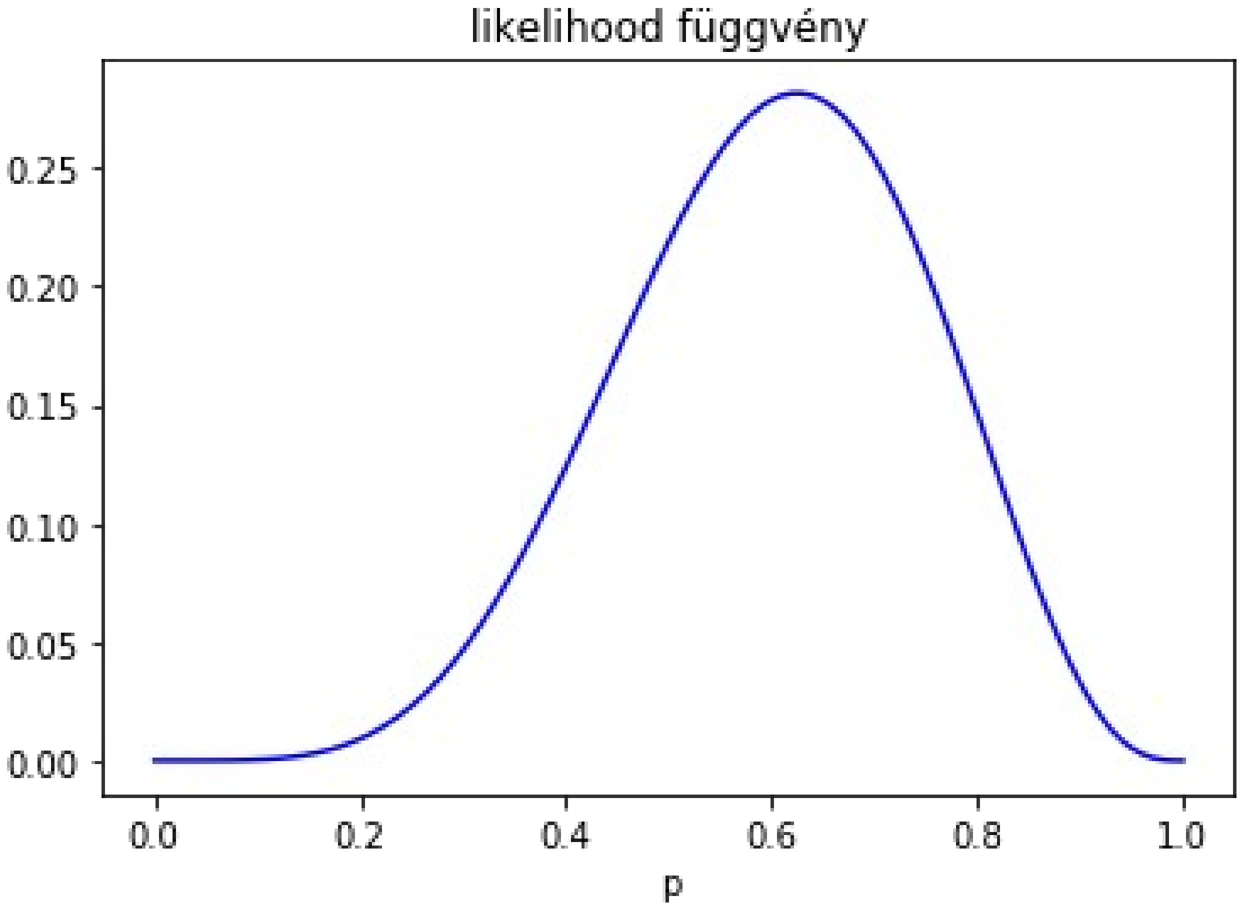
- $P(p|\,A=5,\,B=3)$ valószínűség a $P(A=5,\,B=3|\,p)$-nek a fordított (inverz) valószínűsége:
- Ez a Bayes-tételből számítható: $P(\text{modell}|\text{adat})$

$$P(p|A=5,B=3)=\frac{P(A=5,B=3|p)\,P(p)}{\int_0^1 P(A=5,B=3|p)\,P(p)\,dp}$$

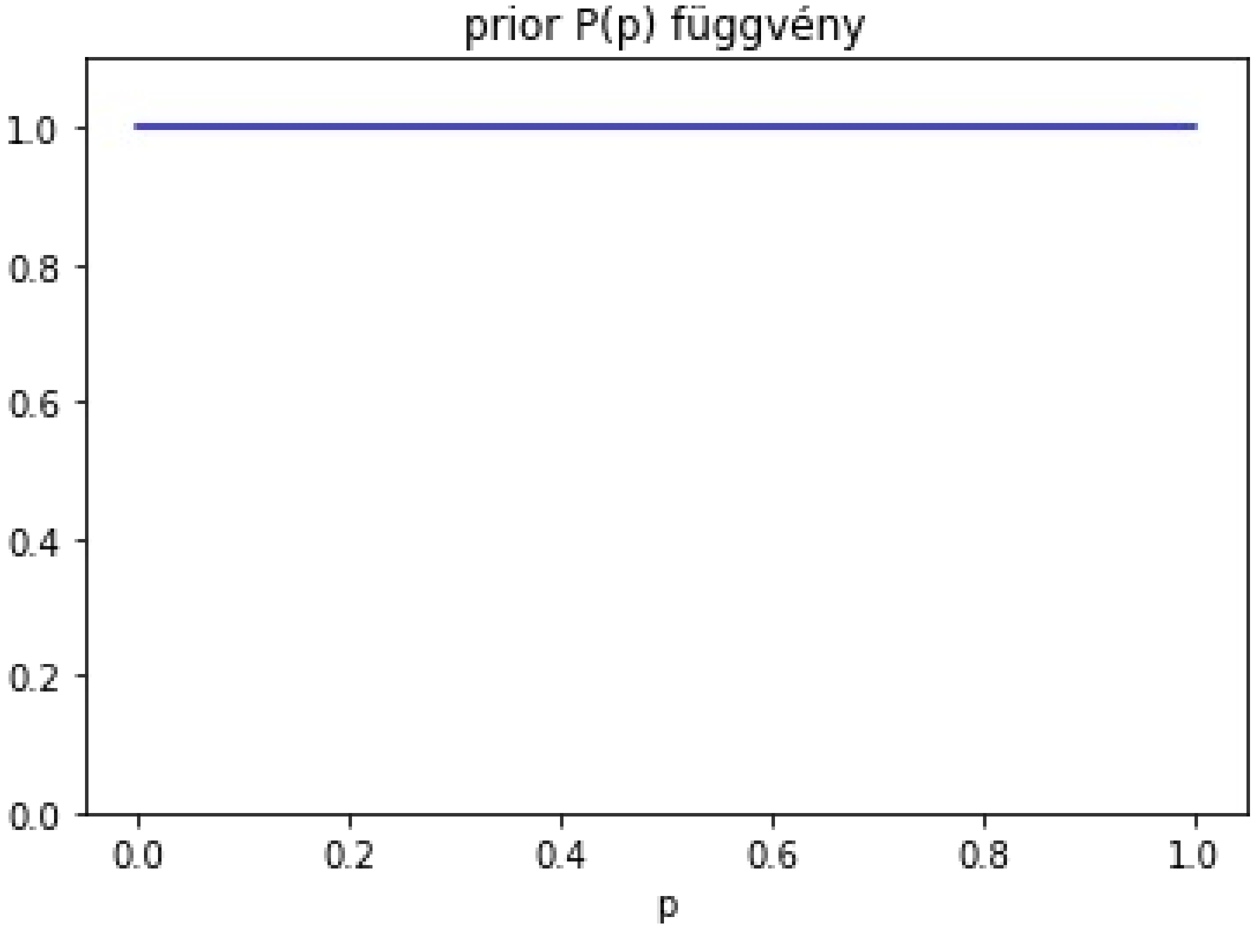
- $P(A=5,\,B=3|\,p)$ valószínűség (likelihood függvény) a binomiális tételből kiszámítható

$$P(A=5,B=3|p)\,P(p)=\frac{8!}{5!\,3!}\,p^5(1-p)^3$$

Likelihood függvény

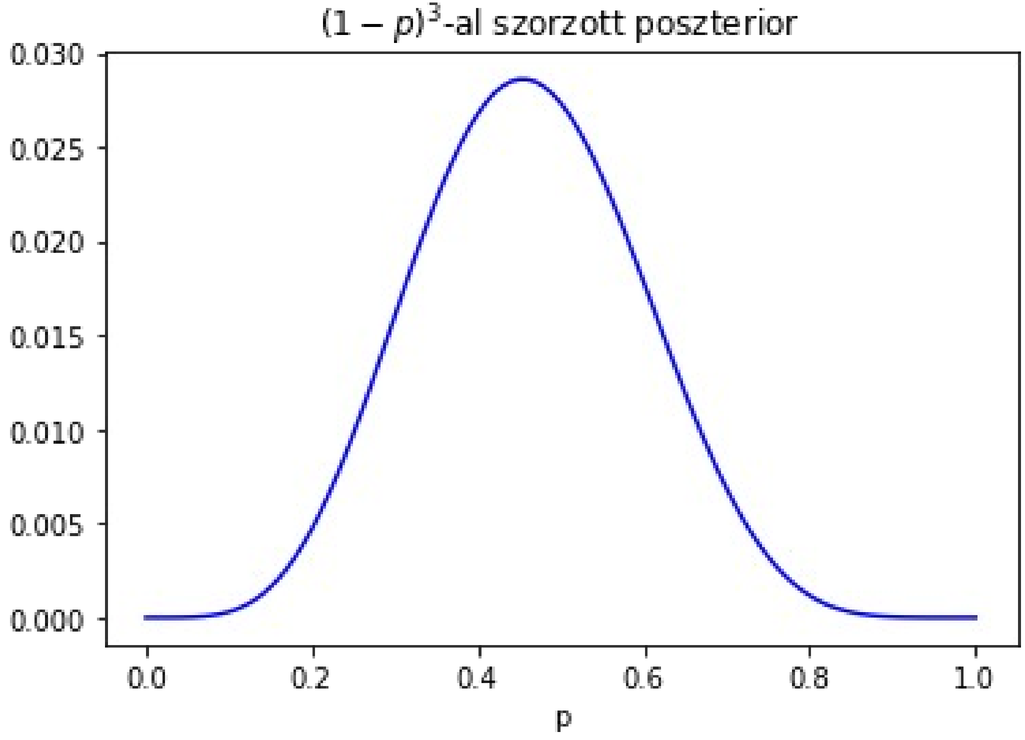


Prior valószínűség



Poszterior valószínűség

- A prior miatt megegyezik a likelihood függvénnyel, egy konstans szorzótól eltekintve
- Béla nyerésének valószínűségét tehát a poszterior $(1-p)^3$ -el szorzott értékének integrálja adja



A Bayes-féle becslés

- Béla nyerésének valószínűsége numerikus integrálással

$$E\left(\text{Béla nyer}\right)=0.0909$$

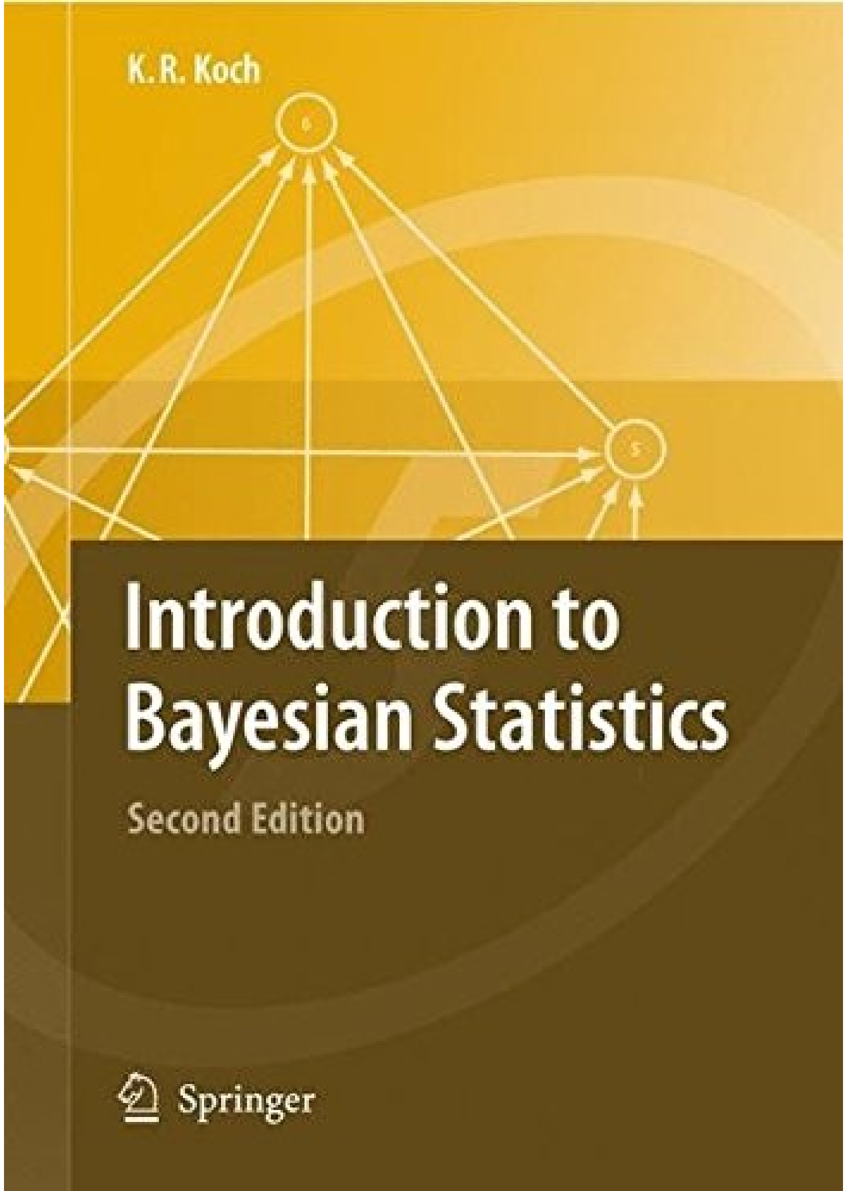
- Andrea esélye tehát $10:1$-hez, szemben a maximum likelihood becslésből kapott $18:1$-es eséllyel
- Az eltérés oka az, hogy a maximum likelihood módszer pontbecslést végzett a paraméterre a poszterior eloszlás meghatározása helyett
- Az $E[f(p)]$ várható érték nem egyenlő $f(E[p])$-vel (az első a helyes, a második a hibás)

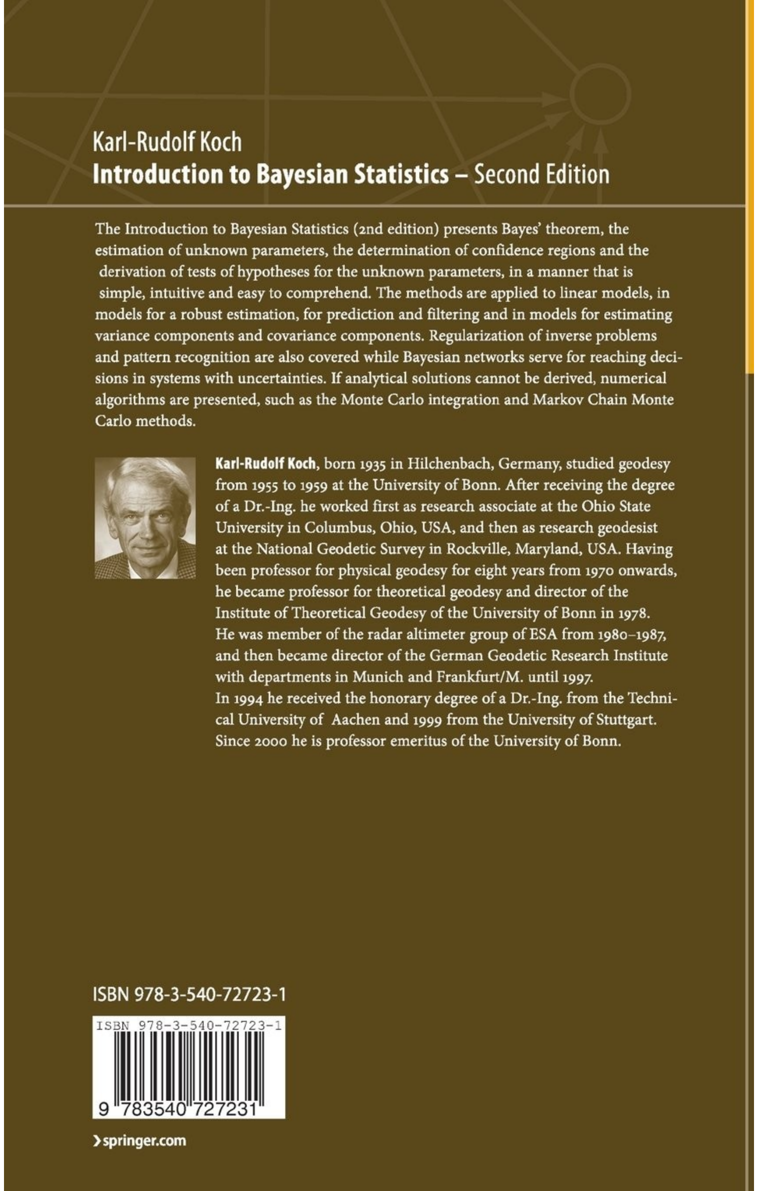
A Bayes-féle statisztika nehézségei

- számítási nehézségek
  - paraméterekre vonatkozó bonyolult integrálok számítása
  - bonyolult eloszlások várható értékének, mediánjának, momentumainak meghatározása
  - Markov-láncokon alapuló Monte Carlo algoritmusok (MCMC): a mintavételt alkalmas Markov-lánc vezeti
- a prior megválasztása
- szubjektív valószínűség

A bayesi statisztika alkalmazásai a geodéziában

- GNSS fázismérések ciklusugrásainak, idősorok kivágó értékeinek a detektálása (de Lacy et al, 2008, Qianqian, Qingming, 2013)
- GNSS ciklustöbbértelműségek validálása (Wu, Bian, 2015)
- GPS bázisvonalak konfidencia intervallumai (Gundlich, Koch, 2002)
- GNSS meteorológia (Foelsche, Kirchengast, 2001)
- mozgásvizsgálatok (Sacerdote et al, 2009)
- LIDAR adatok és légifényképek fúziója (Rastiveis, 2015)
- képelemzés, klasszifikáció (Storvik et al, 2005)
- gömbfüggvény analízis (Muir, Tkalcic, 2014)
- mérési bizonytalanság számítása (Weise, Wöger, 1992)





Karl-Rudolf Koch
Introduction to Bayesian Statistics – Second Edition

The Introduction to Bayesian Statistics (2nd edition) presents Bayes' theorem, the estimation of unknown parameters, the determination of confidence regions and the derivation of tests of hypotheses for the unknown parameters, in a manner that is simple, intuitive and easy to comprehend. The methods are applied to linear models, in models for a robust estimation, for prediction and filtering and in models for estimating variance components and covariance components. Regularization of inverse problems and pattern recognition are also covered while Bayesian networks serve for reaching decisions in systems with uncertainties. If analytical solutions cannot be derived, numerical algorithms are presented, such as the Monte Carlo integration and Markov Chain Monte Carlo methods.

Karl-Rudolf Koch, born 1935 in Hilchenbach, Germany, studied geodesy from 1955 to 1959 at the University of Bonn. After receiving the degree of a Dr.-Ing. he worked first as research associate at the Ohio State University in Columbus, Ohio, USA, and then as research geodesist at the National Geodetic Survey in Rockville, Maryland, USA. Having been professor for physical geodesy for eight years from 1970 onwards, he became professor for theoretical geodesy and director of the Institute of Theoretical Geodesy of the University of Bonn in 1978. He was member of the radar altimeter group of ESA from 1980–1987, and then became director of the German Geodetic Research Institute with departments in Munich and Frankfurt/M. until 1997. In 1994 he received the honorary degree of a Dr.-Ing. from the Technical University of Aachen and 1999 from the University of Stuttgart. Since 2000 he is professor emeritus of the University of Bonn.

ISBN 978-3-540-72723-1

springer.com

Metrológia

- A metrológia (méréstudomány, méréstan) a mérés tudományos ismeretköre
- A mérésügy a metrológia „törvényes” ága
- Metrológiai alapfogalmak

Metrológiai alapfogalmak

- **mérhető mennyiség**
  Egy jelenségnek, testnek vagy anyagnak minőségileg elkülöníthető és mennyiségileg meghatározható jellemzője
- **valódi érték**
  a konkrét mennyiség **definíció**jával konzisztens érték, a mennyiség pontos **definíció**ja ezért nagyon fontos
- **mérés**
  azoknak a műveleteknek az összessége, amelyek célja egy mennyiség értékének meghatározása
- **mérési bizonytalanság**
  a mérés eredményéhez csatolt olyan paraméter, amely a mérendő mennyiségnek indokoltan tulajdonítható értékek szóródását jellemzi

Metrológiai alapfogalmak

- **mérési pontosság**
  egy mennyiség mért értéke és valódi értéke közötti egyezés szorossága
- **megismételhetőség**
  ha egy mennyiség mérését *azonos* körülmények között megismételjük, az eredményül kapott mért értékek közötti egyezés szorossága
- **reprodukálhatóság**
  ha egy mennyiség mérését *változó* körülmények mellett megismételjük, az eredményül kapott mért értékek közötti egyezés szorossága
- **mérési hiba**
  a mért érték és a valódi érték különbsége
- **véletlen hiba**
  a mérést a megismételhetőség feltételei között végtelen sokszor megismételve, egy érték és a kapott átlag közötti különbség

Metrológiai alapfogalmak

- **rendszeres (szisztematikus) hiba**
  a mérést a megismételhetőség feltételei között végtelen sokszor megismételve, a valódi érték és a kapott átlag közötti különbség
- **korrekció**
  egy nyers mért értékhez a rendszeres hiba ellensúlyozására céljából algebrailag hozzáadott érték
- **korrekciós tényező**
  számérték, amellyel egy nyers mért értéket megszorzunk a rendszeres hiba ellensúlyozása céljából
- **bizonytalanság A-típusú becslése**
  a mérési bizonytalanságnak a mért értékek statisztikai elemzésén alapuló becslése
- **bizonytalanság B-típusú becslése**
  a mérési bizonytalanságnak az A-típusú becsléstől eltérő eszközökkel való becslése

Metrológiai alapfogalmak

- **etalon**
  mérték, mérőeszköz, anyagminta vagy mérőrendszer, amelynek az a rendeltetése, hogy egy mennyiség egységét, illetve egy vagy több ismert értékét definiálja, megvalósítsa, fenntartsa vagy reprodukálja, és referenciaként szolgáljon
- **visszavezethetőség**
  egy mérési eredménynek vagy egy etalon értékének az a tulajdonsága, hogy *ismert bizonytalanságú összehasonlítások megszakítatlan láncolatán keresztül* kapcsolódik megadott referenciákhoz
- **kalibrálás**
  azoknak a műveleteknek az összessége, amelyekkel meghatározott feltételek mellett megállapítható az összefüggés a mérőeszköz vagy egy mérőrendszer értékmutatása, illetve egy mértéknek vagy anyagmintának tulajdonított érték és a mérendő mennyiség etalonnal reprodukált megfelelő értéke között

Mérésügy

- **joghatással járó mérés**

  Joghatással jár a mérés, ha annak eredménye az állampolgárok és/vagy jogi személyek jogát vagy érdekeit érinti

  A joghatással járó mérést

    hiteles mérőeszközzel, vagy

    használati etalonnal ellenőrzött mérőeszközzel kell elvégezni

  Az országos etalonról kell leszármaztatni, arra *vissza kell vezetni* minden olyan mérőeszközt, melyet joghatással járó méréshez használnak

Mérési bizonytalanság meghatározása a GUM alapján

- Mi a GUM?
- Mérési bizonytalanság meghatározás eljárásai
  - Statisztikai (A típusú) meghatározás
  - Nem statisztikai (B típusú) meghatározás
  - Eredő mérési bizonytalanság meghatározása
- Monte Carlo módszerek alkalmazása a mérési bizonytalanság meghatározására

Mi a GUM

- a mérési bizonytalanság meghatározásának módját írja le
- a metrológiában nemzetközileg széles körben mértékadóként elfogadott dokumentum
- magyarul: Útmutató a mérési bizonytalanság kifejezéséhez (**G**uide to the Expression of **U**ncertainty in **M**easurement, **GUM**)
- a JCGM (Joint Committee for Guides in Metrology) a GUM és kiegészítései felelőse

  A JCGM tagjai: ISO, BIPM, IEC, IFCC, IUPAC, IUPAP, OIML és ILAC
- A kiadvány angol nyelvű legújabb változata ingyenesen letölthető a BIPM honlapjáról (www.bipm.org)
- A mérési bizonytalanság iránti érdeklődést a mérésnek nemhatósági szolgáltatásként (kalibrálás) való elterjedése jelentősen fokozta, mivel a mérési (kalibrálási) bizonytalanság az adott szolgáltatás egyik legfontosabb minőségi jellemzője.

GUM

- A GUM elődje 1980-ban született meg a BIPM kezdeményezésére
- 1993-ban publikálták először
- Javított kiadása és magyar fordítása is 1995-ben jelent meg (OMH, ma MKEH gondozásában)
- Kiegészítések jelentek meg hozzá

  Supplement 1: Monte Carlo módszer az eloszlások terjedésének meghatározásához

  Supplement 2: több kimeneti értékre történő kiterjesztés

  Supplement 3: modellezés (előkészítés alatt)

A GUM fontossága

- Amikor egy fizikai mennyiség mérésének eredményét közöljük, kötelező az eredmény valamilyen *minőségi* jellemzőjét is megadni, hogy a felhasználók megítélhessék az eredmény megbízhatóságát
- Egy ilyen jellemző nélkül a méréseket *nem lehet összehasonlítani* sem egymás között, sem pedig valamilyen referencia etalonhoz vagy standardhoz képest

    egy mérési eredmény *ismert bizonytalanságú* összehasonlítások megszakítatlan láncolatán keresztül kapcsolódik megadott referenciákhoz = *visszavezethetőség*

- A mérési bizonytalanság meghatározását az ISO/IEC 17025 nemzetközi szabvány előírja minden akkreditált laboratóriumnál

A GUM előnyei

- Elősegíti azt, hogy teljes információt lehessen adni a mérési bizonytalanság kimutatott értékéről
- Alapul szolgál a nemzetközi összehasonlítások számára
- Fogalmi keretet ad a bizonytalanság kiértékeléséhez és kifejezéséhez
- Elősegíti az egységes szóhasználatot és jelöléseket

Mérési bizonytalanság

- „a mérés eredményéhez csatolt olyan paraméter, amely a mérendő mennyiségnek indokoltan tulajdonítható értékek szóródását jellemzi”
- példák:
  - u standard bizonytalanság (1 szigma) vagy többszörösei (pl. 2 vagy 3 szigma)
  - egy olyan intervallum fél szélessége, amely a közölt megbízhatósággal tartalmazza a mért értéket

Mérési bizonytalanság

- a mérési bizonytalanság adja meg annak a tartománynak a határait, amelyen belül a mért mennyiség „valódi” értéke a becslés szerint adott valószínűséggel megtalálható

mérési eredmény = becslés ± bizonytalanság

(22.564 ± 0.005) m

Kalibráció

- A kalibráció olyan sajátos mérés, amelynek során a mérendő mennyiség valódi értéke ismert
- Segítségével meghatározhatók:

  rendszeres hibák

  maradék bizonytalanság

A mérési bizonytalanság kiszámítása

- standard bizonytalanság
- **A típusú meghatározás**

  a mérési bizonytalanságnak a mért értékek statisztikai elemzésén alapuló becslése
- **B típusú meghatározás**

  a mérési bizonytalanságnak az A-típusú becsléstől eltérő eszközökkel való becslése

A standard bizonytalanság

- standard bizonytalanság (s, u vagy u_e)

a mérési eredmény bizonytalansága szórásként kifejezve (korrigált tapasztalati szórás)

s – a mérési sorozatot statisztikai elemzés alapján számítják (A-típusú értékelés)

u – más módszerrel határozzák meg (B-típusú értékelés)

u_e – eredő standard bizonytalanság – számítás útján kapjuk; akkor alkalmazzák, ha a mérési eredményhez is számítással jutunk

A kiterjesztett bizonytalanság

- kiterjesztett bizonytalanság ($U = k \cdot s$, $U = k \cdot u$ vagy $U = k \cdot u_e$), k – kiterjesztési tényező

  k értéke általában 2 vagy 3

  a mért értékek közelében olyan tartomány, amelyben várhatóan a mért mennyiség benne van

- az eredmény megadása pl. $y \pm U$

Megbízhatósági tartomány

- azt adja meg, hogy a kapott y érték körüli $y \pm U$ tartomány mekkora valószínűséggel tartalmazza a mérendő mennyiség valódi értékét

$$P(y - U \leq y_{\text{valódi}} \leq y + U) = p(U)$$

- ezt általában akkor alkalmazzák, ha az eredményt egy specifikációval, pl. tűréssel kell összehasonlítani

A mérési bizonytalanság meghatározása – „A” típusú

- A bizonytalanság „A” típusú meghatározásánál kiszámítjuk az elvégzett mérési sorozat varianciabecslőjét (s^2) illetve szórásbecslőjét (s) és ezt tekintjük a standard bizonytalanság számszerű értékének ($u = s$)
- Az X mérendő mennyiség meghatározására n elemű mérési sorozatot végzünk: $x_1, x_2, \dots, x_n$.
- A sorozat átlaga az X valószínűségi változó várható értékének x becslője:

$$x = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

- A sorozat tapasztalati varianciája

$$s^2(x) = \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{X}\right)^2$$

- Az x becslő varianciája, vagyis az átlag varianciája a sorozat varianciájának n-ed része:

$$s^2\left(\overline{X}\right) = \frac{s^2(x)}{n}$$

A mérési bizonytalanság meghatározása – „B” típusú

- Néhány lehetőség, a teljesség igénye nélkül
- Az x_i becslő értéke és a becslő bizonytalansága specifikációban adott. A specifikáció rögzíti a megadott bizonytalanság értelmezését is (pl. a kiterjesztési tényező értéke). Az adatokból a szórás meghatározható
- Az x_i mért mennyiség (becslő) bizonytalanságát 90, 95 vagy 99%-os konfidenciaszinttel adják meg. Feltételezhető az X_i mennyiség Gauss eloszlása. Gauss eloszlásnál az adott konfidencia szinthez tartozó konfidencia intervallumból a szórás, vagyis a keresett standard bizonytalanság meghatározható az alábbi táblázatból

konfidencia szint (%)	konfidencia intervallum	szorzófaktor
50	0.68·σ	0.68
68	σ	1
90	1.64·σ	1.64
95	1.96·σ	1.96
95.4	2·σ	2
99	2.58·σ	2.58
99.7	3·σ	3

Az eredő bizonytalanság meghatározása

- A mérendő mennyiséget az egyes összetevők alapján számítással határozzuk meg. Az összetevők bizonytalanságai alapján a mérendő mennyiség eredő bizonytalanságát a standard bizonytalanságok terjedési törvényének segítségével határozzuk meg (hibaterjedés)
- Az X_i bemeneti mennyiségek (összetevők) és az Y mérendő, vagy kimeneti mennyiség kapcsolatát megadó függvény a fizikai törvényszerűségek alapján ismert:

$$Y = f\left(X-1, X_{2,}\ldots, X_N\right)$$

- A mérési folyamat során az X_i bemeneti mennyiségek x_i becslőit határozzuk meg. A becslők értékét a függvénybe helyettesítve megkapjuk a kimeneti mennyiség y becslőjét:

$$y = f\left(x-1, x_{2,}\ldots, x_N\right)$$

- A becsült kimeneti mennyiség standard bizonytalansága (négyzete):

$$u_e^2(y) = \sum_{i=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u^2(x_i) + 2\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=i+1}^{N}\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j}u(x_i, x_j)$$

- A kifejezés a standard bizonytalanságok terjedési törvénye, amelyben az $u(x_i, x_j)$ a becslők becsült kovarianciája, a $\partial f/\partial x_i$ számok az *érzékenységi együtthatók*. Ez a törvény azonos a geodéziában jól ismert hibaterjedés törvényével

A GUM korlátai

- nem ad információt a bemeneti eloszlásokról, azok helyett csak az átlagértéket és a szórást (standard bizonytalanságot) adja meg
- feltételezi, hogy a modell linearizálható és a kimenet Gauss eloszlású (→ Supplement 1)
- nem foglalkozik eléggé a többszörös kimenetekkel, a kimenetek kovariancia mátrixa csak a bemenetekre van vonatkoztatva, de nincs megadva a köztük levő összefüggés
(→ Supplement 2)
- a GUM korszerűsítésével, bővítésével kapcsolatos munkák jelenleg is folynak

Monte Carlo módszerek alkalmazása a mérési bizonytalanság meghatározására

- A GUM Supplement 1: „Propagation of distributions using a Monte Carlo method” 5.1.1

a) modell felállítása

1. a mérendő mennyiség, Y definiálása
2. az $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)^T$ bemeneti mennyiségek meghatározása, amiktől Y függ
3. az $\boldsymbol{X}$-et és Y-t összekapcsoló modell megalkotása
4. a meglevő ismeretek alapján X_i-k eloszlásfüggvényeinek (Gauss, egyenletes, háromszög, stb.) megadása, illetve nem független X_i-k együttes eloszlásfüggvényinek a megadása

b) terjedés

c) összefoglaló statisztikák készítése Y eloszlásfüggvényéről

Monte Carlo módszerek alkalmazása a mérési bizonytalanság meghatározására

- A GUM Supplement 1: „Propagation of distributions using a Monte Carlo method” 5.1.1

a) modell felállítása

b) terjedés

   1. az X_i-k eloszlásfüggvényeinek terjedése a modellen keresztül: megkapjuk Y eloszlásfüggvényét

c) összefoglaló statisztikák készítése Y eloszlásfüggvényéről

   1. az Y várható értéke y becslése (nem minden alkalmazás számára megfelelő)
   2. az Y standard bizonytalansága az y mennyiség $u(y)$ standard bizonytalansága (Cauchy eloszlás esetén nem létezik)
   3. megbízhatósági tartomány készítése, mely Y-t előírt megbízhatósági valószínűséggel tartalmazza

Eloszlásfüggvények terjedése

- a mérendő mennyiség, Y eloszlásfüggvénye:

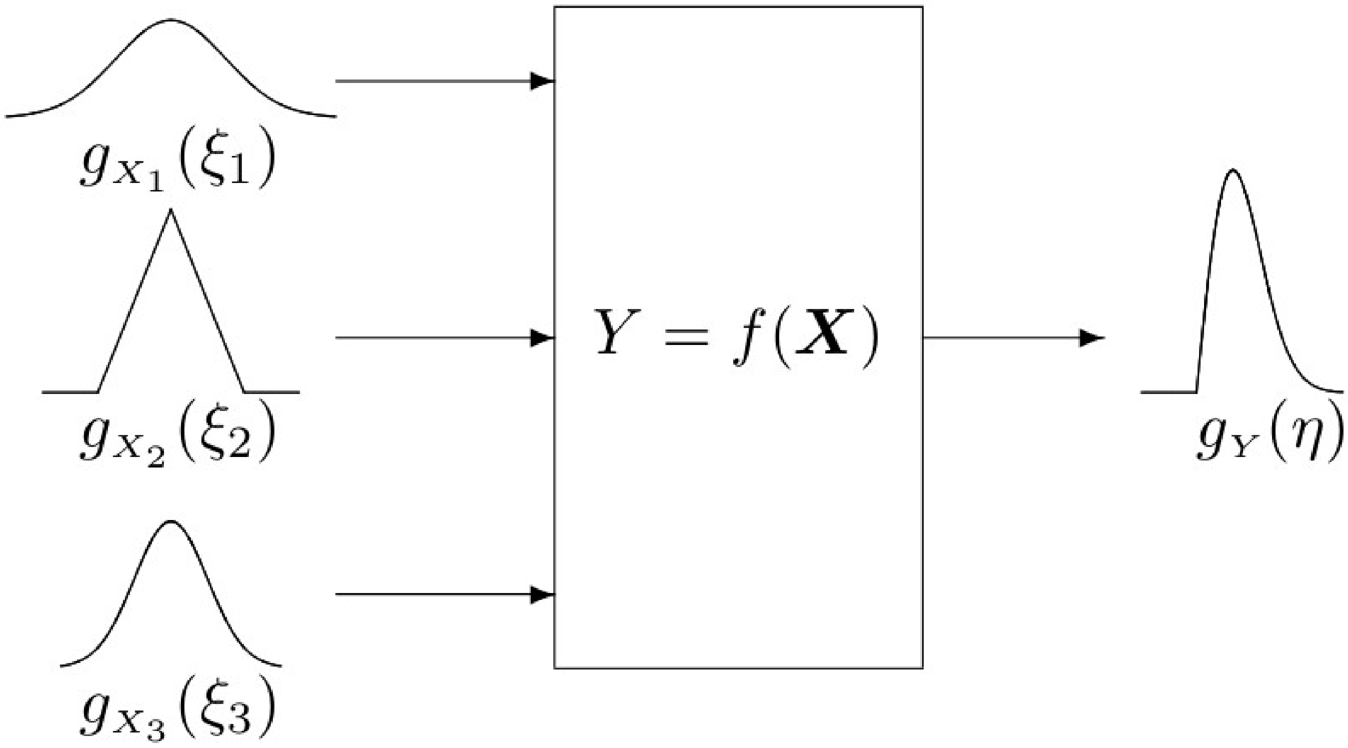
$$G_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z)\,dz$$

- a sűrűségfüggvény formális definíciója (δ a Dirac delta):

$$g_Y(\eta) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathbf{X}}(\boldsymbol{\xi})\,\delta(\eta - f(\boldsymbol{\xi}))\,d\xi_N \cdots d\xi_1$$

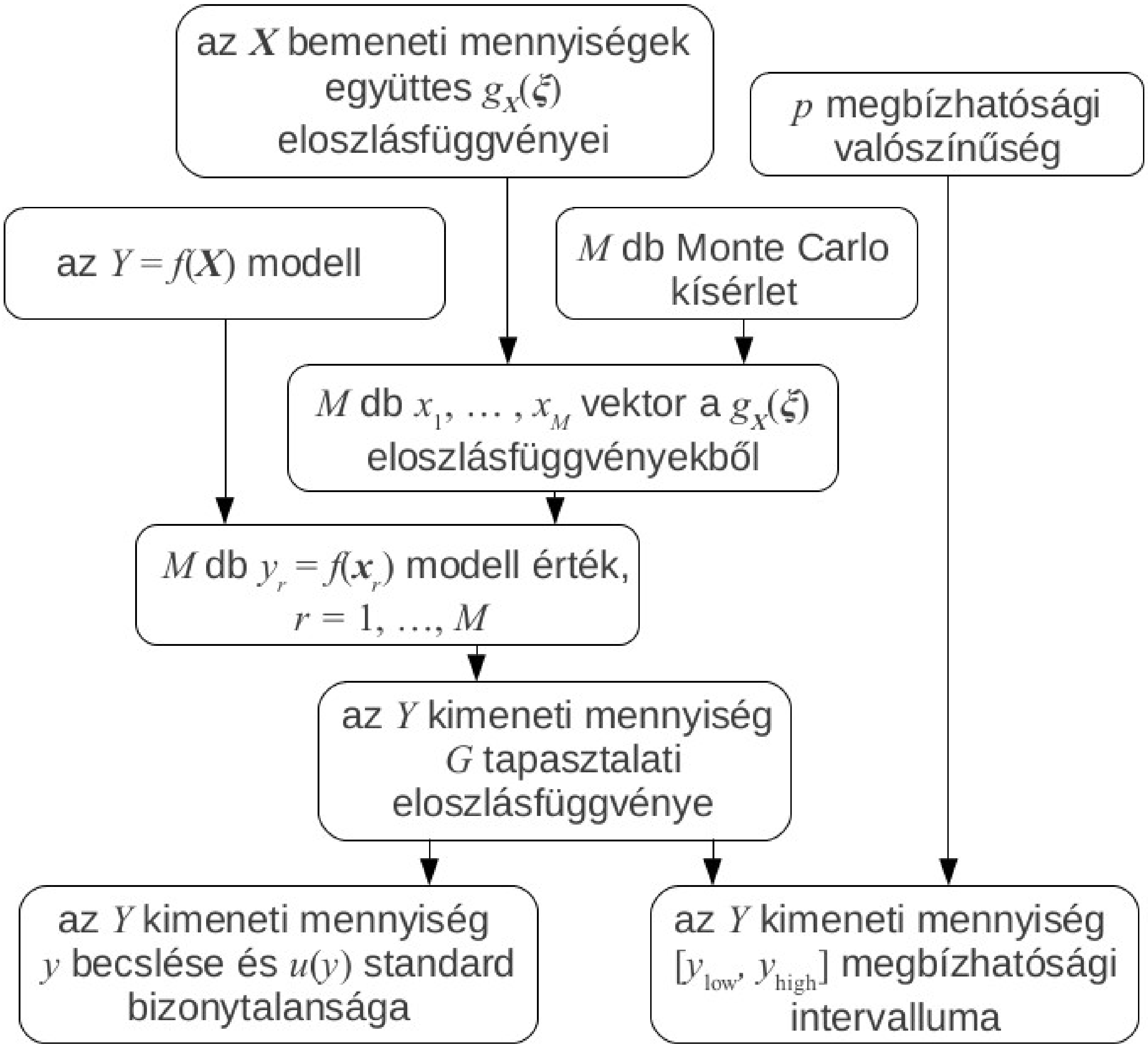
- analitikusan az integrálás nem végrehajtható, helyette Monte Carlo számításra (MCM) van szükség

Eloszlásfüggvények terjedése



Az eloszlások terjedésének illusztrációja *N* = 3 független bemeneti mennyiségre

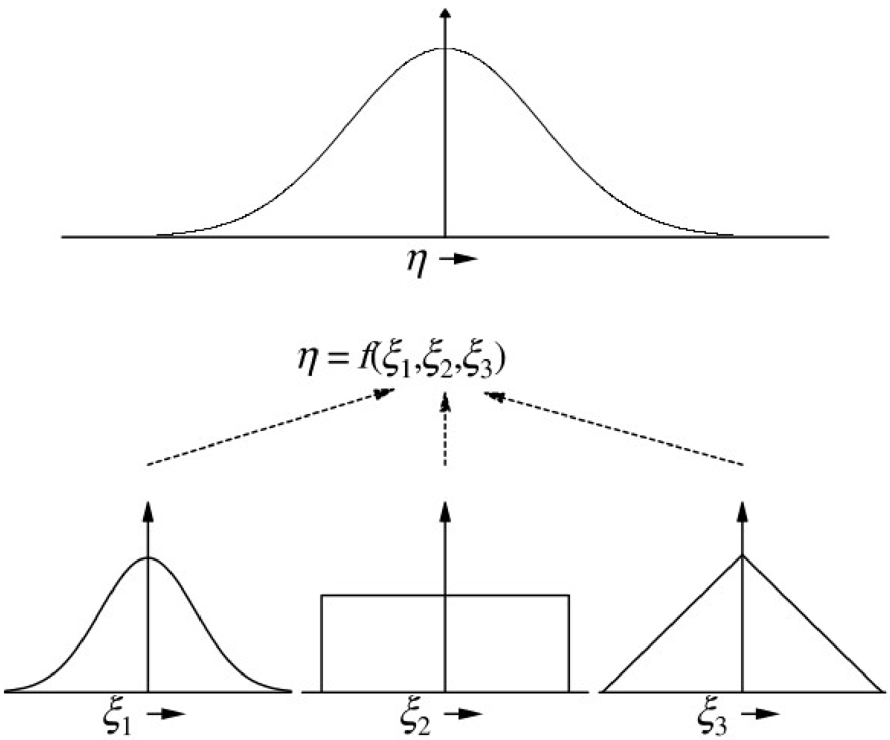
Monte Carlo számítás

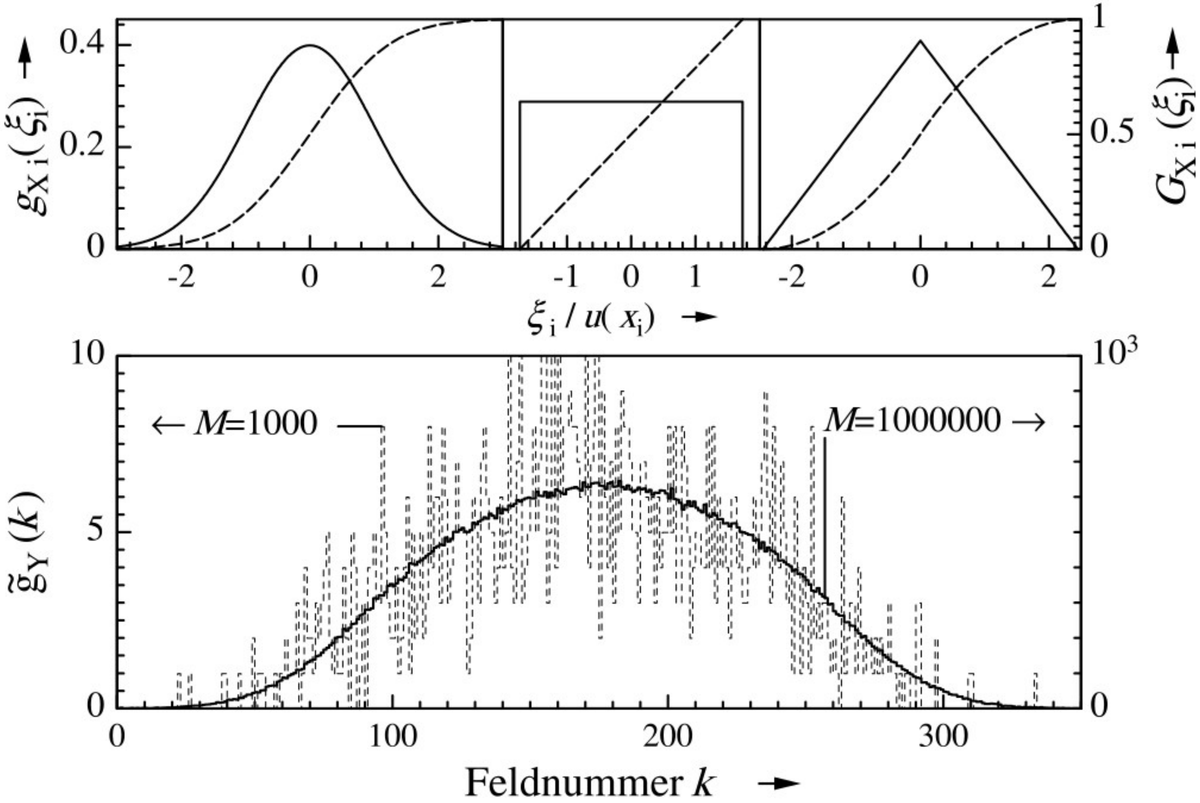


(Siebert – Sommer, 2004)

MCM példa

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$





Irodalom

- Hunyadi L (2011): Bayesi gondolkodás a statisztikában. Statisztikai Szemle 89/10-11, 1150-1171
- Steiner F. (1990): 5.1.3 pont
- Nemzetközi Metrológiai Értelmező Szótár (1998) Országos Mérésügyi Hivatal, Budapest
- JCGM 100:2008: GUM (Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement) 2008
- JCGM 101:2008: GUM (Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" — Propagation of distributions using a Monte Carlo method) 2008