Kiegyenlítő számítások MSc 2023/24

4. előadás

Miről lesz szó?

- Extrém érték elmélet
- Monte Carlo eljárások

Extrém érték elmélet

- Bevezetés
- Alapvető módszerek (GEV és POT)
- Extrém érték eloszlások
- Alkalmazás: GNSS integritás vizsgálat
- Példa: Tisza várható árvízszint előrejelzése

Bevezetés

- Az extrém érték elmélet (extreme value theory, EVT) célja olyan *események valószínűségének a becslése*, amelyek kívül esnek a megfigyelt adatok körén
- ilyen események lehetnek
  - szélsőséges időjárási események
  - földrengések, erdőtüzek
  - GNSS életvédelmi célú szolgáltatás meghibásodása
  - nagy kárértékű biztosítási események
  - gépalkatrészek tönkremenetele (kifáradás, korrózió)
  - tőzsdekrach

Bevezetés

- Az extrém érték elmélet a mérési adatokon kívüli extrapolációt jelent
  - könnyen kritizálható, természeténél fogva nem megbízható
  - felvett modelleken alapszik, a valóság ennél mindig összetettebb
- Matematikai szempontból jól megalapozott
  - még nem javasoltak helyette hihetőbb alternatívát
  - az extrém események valószínűségét az adatokból számítja
- Körültekintően kell alkalmazni

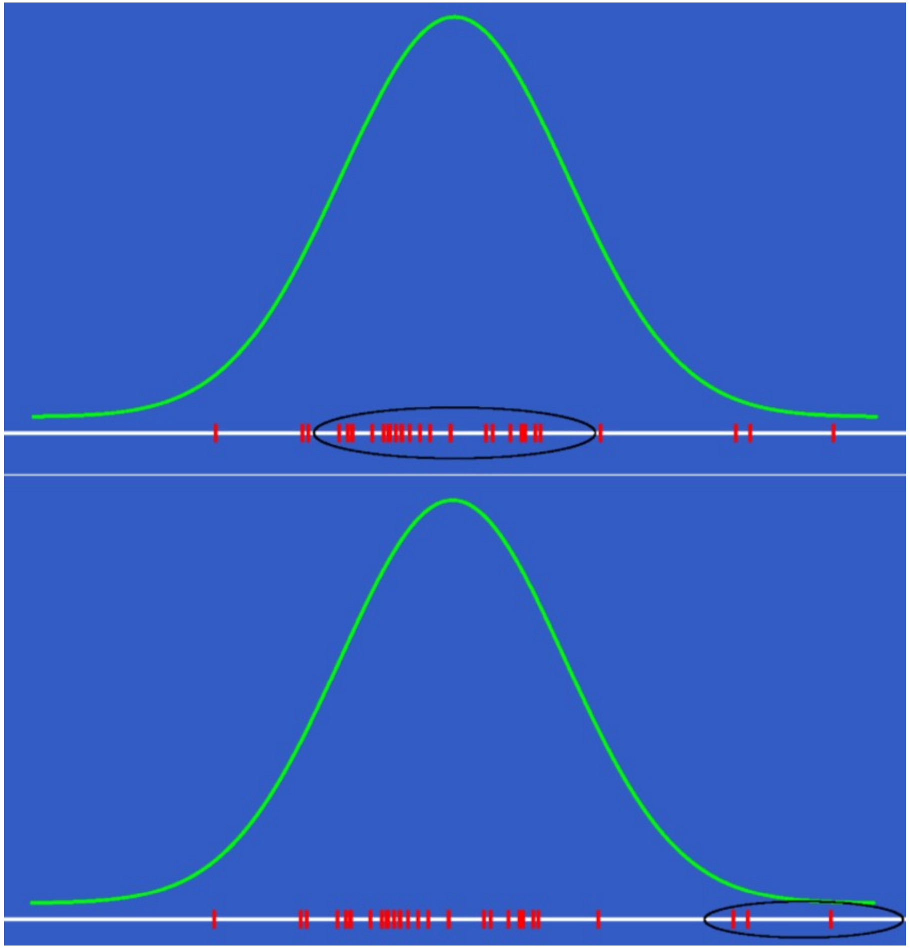
Hagyományos és extrém érték statisztika

- hagyományos statisztika:
  az átlagos viselkedésre összpontosít

  központi határeloszlás tétel
  (Laplace, 1810)

- extrém érték elmélet:
  a rendkívüli és ritka értékekre összpontosít

  Fisher-Tippett tétel (1928)



Centrális határeloszlástétel

- Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók $M = M(\xi)$ várható értékkel és $D = D(\xi)$ szórással, akkor a $\zeta_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n$ összeg standardizáltjának elolszlásfüggvénye a standard normális $N(0, 1)$ eloszlásfüggvényhez tart, ha $n \to \infty$.

Vincze (1975) 2.5.3.

Fisher-Tippett tétel

- normalizált maximum határeloszlásfüggvénye:

Ha $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ teljesen független, azonos eloszlású valószínűségi változók, $M_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$, valamint $a_n > 0$ és b_n alkalmas konstansok úgy, hogy

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} < x\right) = H(x)$$

nem elfajult eloszlásfüggvény, akkor $H(x)$ csak háromféle (Fréchet, Weibull, Gumbel) eloszlásfüggvény lehet

Barabás (2010) 5.1 Tétel

Alapvető módszerek

- Klasszikus (blokk) módszerek
  (GEV = Generalized Extreme Value)

  adott időszakon (blokk) belüli maximum értékekkel foglalkozik – mi legyen az adott időszak?

- Küszöb feletti értékek elemzési módszere
  (POT = Peak Over Threshold)

  adott küszöbérték feletti értékekkel foglalkozik – mi legyen az adott küszöbérték?

Közös jellemzők

- az extrém érték elmélet általánosan alkalmazható függetlenül a mért adatok eloszlásától (pl. nem kell Gauss eloszlás)
- az eloszlás szélei (az adatok és néhány általánosan igaz feltételezés alapján) akkor is meghatározhatók, ha ott nincs adat

Eloszlásfüggvények

- **Blokk maximum**

$$M_n = \max\{X_{1,} \dots, X_n\}$$

ha $n \to \infty$, akkor

M_n általánosított extrém érték (GEV) eloszlású

- **Küszöb feletti értékek**

$$\{X_i - u \mid X_i > u\}$$

nagyon nagy u küszöb esetén általánosított Pareto-féle eloszlású

GEV – Fisher-Tippett tétel

$M_n = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ eloszlása $(n \to \infty)$

$$\xi \neq 0 \quad G(y) = \exp\left(-\left[1+\xi\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right]^{\frac{-1}{\xi}}\right) \qquad \xi = 0 \quad G(y) = \exp\left(-\exp\left(\frac{y-\mu}{\sigma}\right)\right)$$

ami az általánosított extrém érték eloszlás (GEV)

paraméterek: μ hely, σ skála, ξ alak

(Gumbel, Fréchet, Weibull eloszlás kombinációja egyetlen, három paraméteres eloszlásban: McFadden, 1978)

GEV eloszlás típusok

ξ alak paramétertől függően 3 típusa van az eloszlásfüggvénynek

Gumbel $\xi = 0$

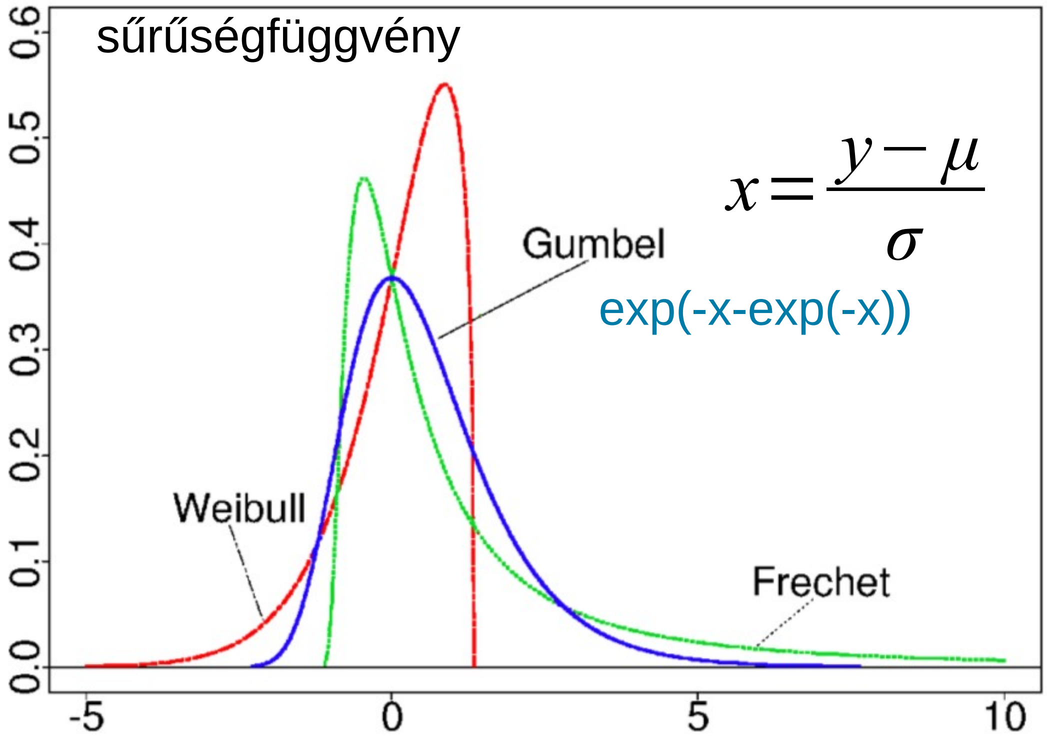
$$G(x) = \exp\left(-\exp[-x]\right)$$

Fréchet $\xi = 1/\alpha > 0$

$$G(x) = \exp\left(-\left[1 + \frac{x}{\alpha}\right]^{-\alpha}\right)$$

Weibull $\xi = -1/\alpha < 0$

$$G(x) = \exp\left(-\left[1 + \frac{x}{\alpha}\right]^{\alpha}\right)$$



$$x = \frac{y - \mu}{\sigma}$$

GEV eloszlás mintából

- A $\{X_1, \ldots, X_n\}$ mintára, melyből a maximumok származnak, teljesüljön az alábbi feltétel:
- X_i -k azonos eloszlású, egymástól független valószínűségi változók legyenek

Visszatérési szintek, p-kvantilis

- Adott idő (pl. 25, 50, 100 év) alatt várhatóan egyszer kapunk ilyen vagy magasabb értéket
- Ha *E* év alatt egyszer tér vissza: $p = 1/E$
- GEV p-kvantilise: $$G(z_p) = 1 - p$$

$$\xi \neq 0 \qquad z_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi}\exp\left(1 - y_p^{-\xi}\right)$$

$$\xi = 0 \qquad z_p = \mu - \sigma \log y_p$$

ahol $\quad y_p = \log(1 - p)$

Visszatérési szint görbe

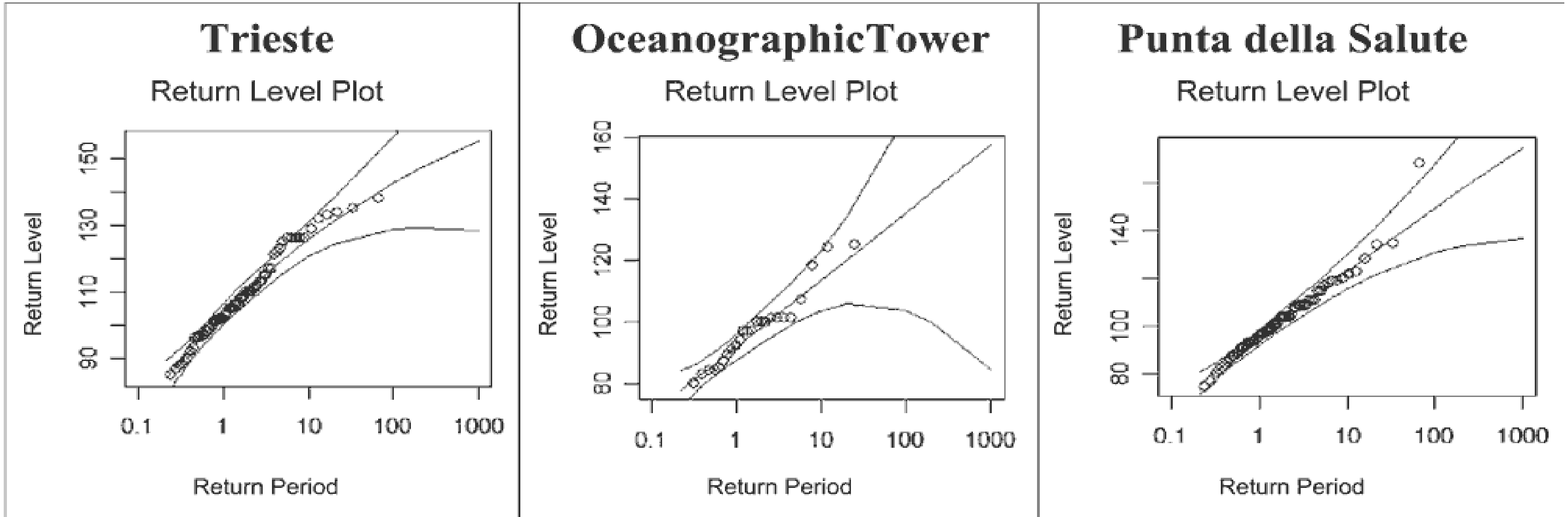
- ábrázoljuk z_p -t $\log(1-p)$ függvényében (logaritmikus skála)

  lineáris (egyenes), ha $\xi = 0$

  konvex görbe, határértéke $\mu - \frac{\sigma}{\xi}$, ha $\xi < 0$

  konkáv görbe, ha $\xi > 0$

Pirazzoli et al. 2007



Küszöb feletti értékek (POT)

- Azok az extrém események, amelyek egy küszöbértéknél nagyobbak
- Ha a küszöb elég magas, az annál nagyobb adatok hasonlóan viselkednek
- Előnye, hogy általában több adatunk van a számításhoz
- A küszöbérték helyes megválasztása a kritikus pont

POT eloszlása

- Az $Y_i = \{X_i - u \mid X_i > u\}$, vagyis egy u küszöbértéknél nagyobb X_i értékek eloszlása nagy u értékekre $(u \to \infty)$

általánosított Pareto-féle eloszlású (GPD)

paraméterek: σ skála, ξ alak

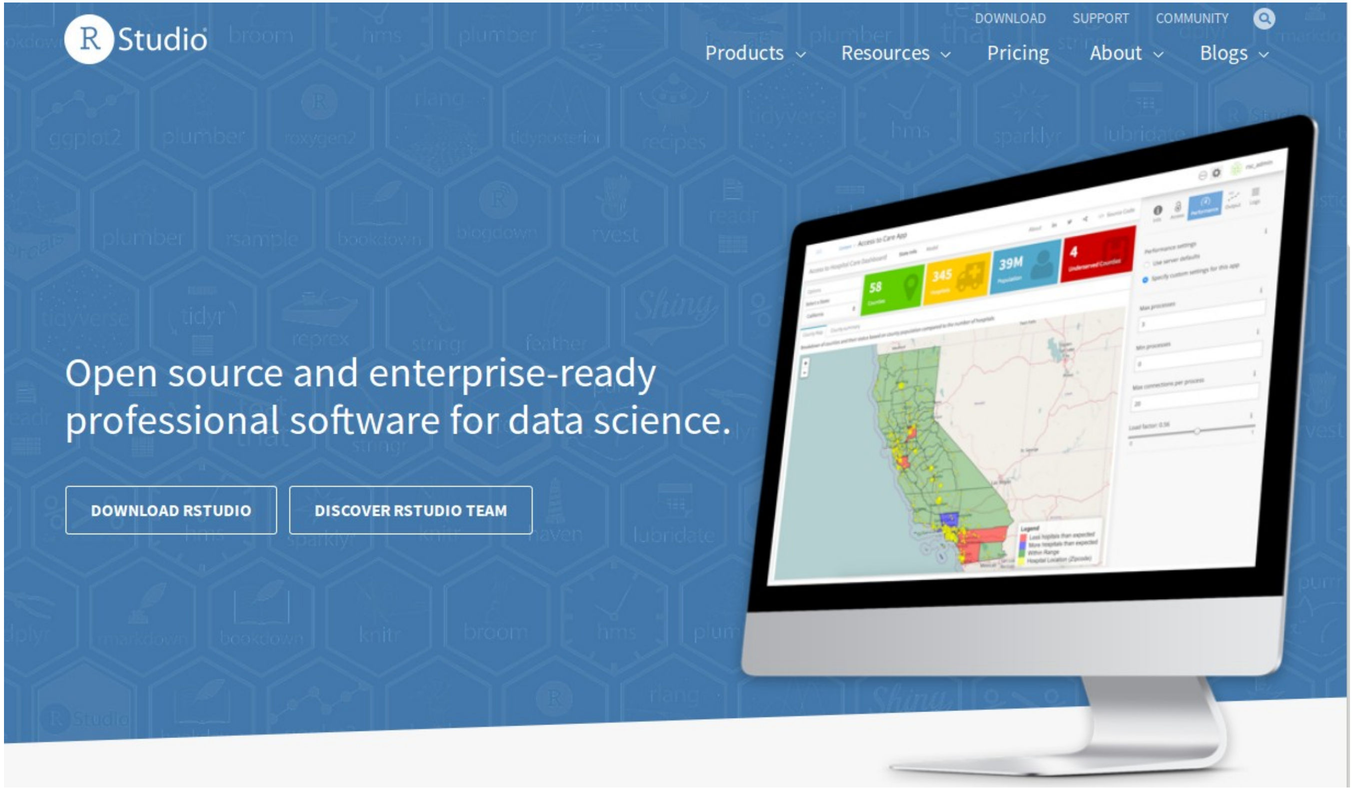
$$H(y|X_i > u) = 1 - \left(1 + \xi \frac{y}{\sigma_u}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$$

Küszöb választása: átlagos többlet ábra

- Tetszőleges u küszöbre ábrázoljuk az $X_i - u$ többlet várható értékét (átlagát) azokra a megfigyelésekre, melyekre $X_i > u$ az u függvényében
- *Ha* a Pareto modell igaz, *akkor* ez a görbe közelítőleg *lineáris* lesz
- Tehát úgy kell megválasztanunk a küszöb értékét, hogy a görbe ezután már lineáris legyen

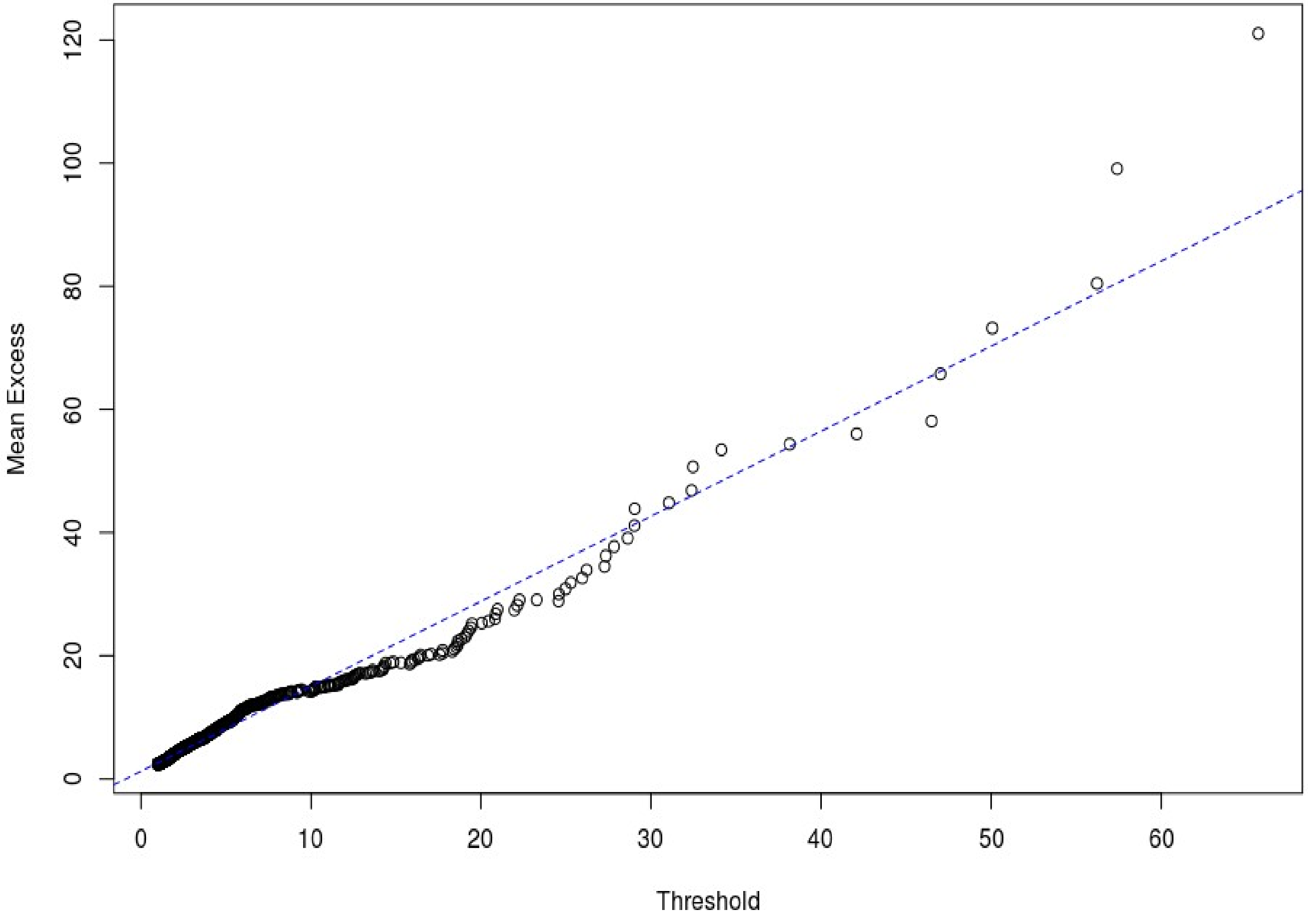
R programozási nyelv

- programozási nyelv és szoftverkörnyezet statisztikai számításokhoz és ábrázoláshoz



Átlagos többlet ábra

- R környezetben: 'evir', meplot(danish)



POT eloszlás típusok

ξ alak paramétertől függően 3 típusa van

Gumbel $\xi = 0$ exponenciális szárny $H(y) = 1 - \exp\left(-\frac{y}{\sigma_u}\right)$

Pareto(Fréchet) $\xi > 0$ súlyos szárny $1 - H(y) \sim c y^{-\frac{1}{\xi}}$

Weibull $\xi < 0$ felső végpont $\omega_F = \frac{\sigma_u}{|\xi|}$

Küszöb választás: paraméter - u ábra

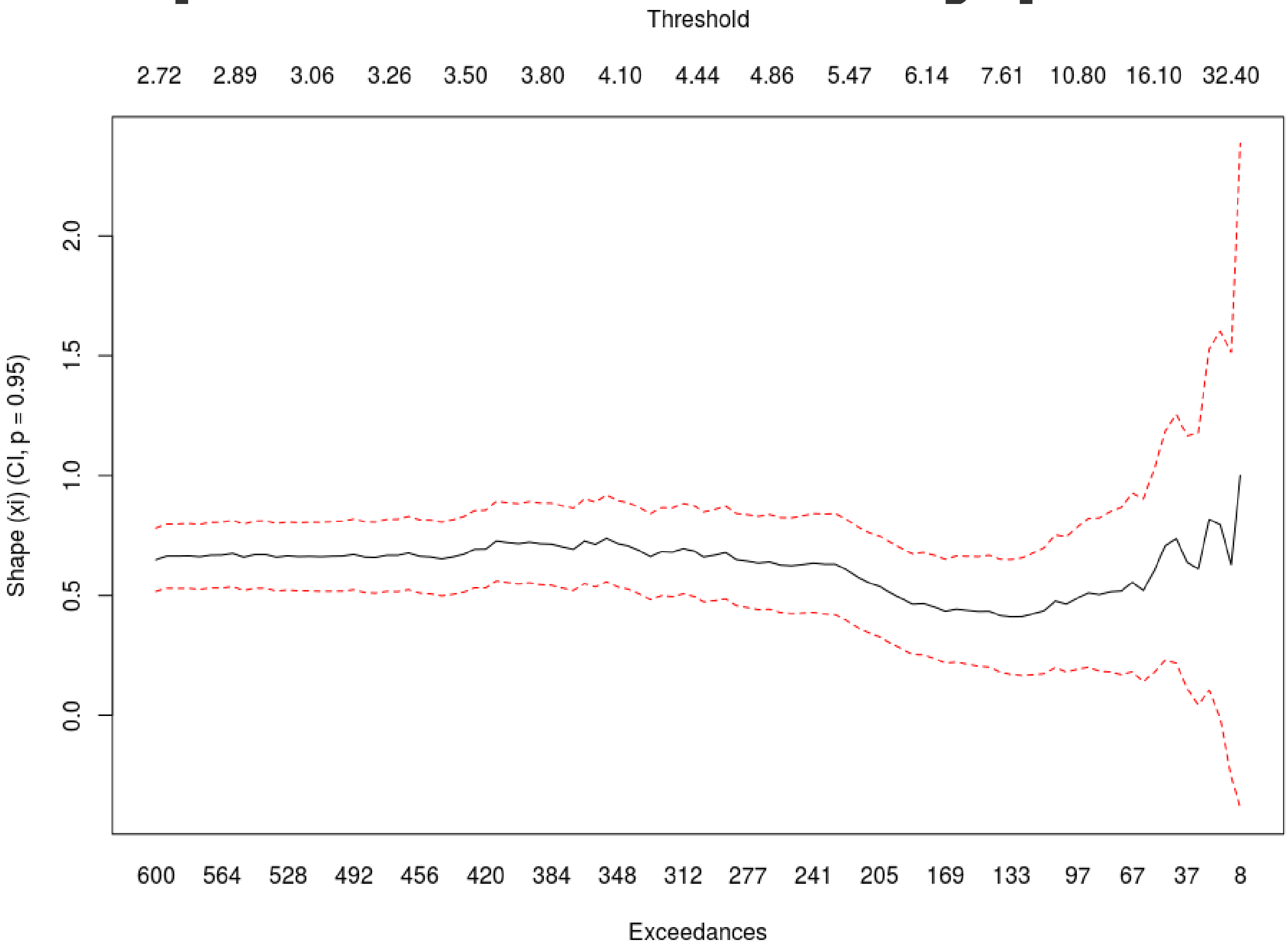
- Tetszőleges u küszöbre ábrázoljuk a ξ vagy a σ paraméter becsült értékét (pl. maximum likelihood becsléssel) azokra a megfigyelésekre, melyekre $X_i > u$, az u függvényében

  Ha a Pareto modell igaz, akkor ez a görbe közelítőleg *konstans* (stabil) lesz

- Tehát úgy kell megválasztanunk a küszöb értékét, hogy a görbe ott konstans legyen

ξ(u) stabilitás ábra (parameter stability plot)

- R környezetben: 'evir', shape(danish)



Alkalmazás: GNSS integritás vizsgálat

- légi irányítás szempontjából (ICAO LPV) a 150 s alatt bekövetkező hiba (MI: Misleading Information) elfogadható maximális valószínűsége $2 \cdot 10^{-7}$ (24 évente 1)

  klasszikus statisztikai módszerekkel nem kezelhető

- extrém érték elmélet jól használható az MI valószínűség becsléséhez

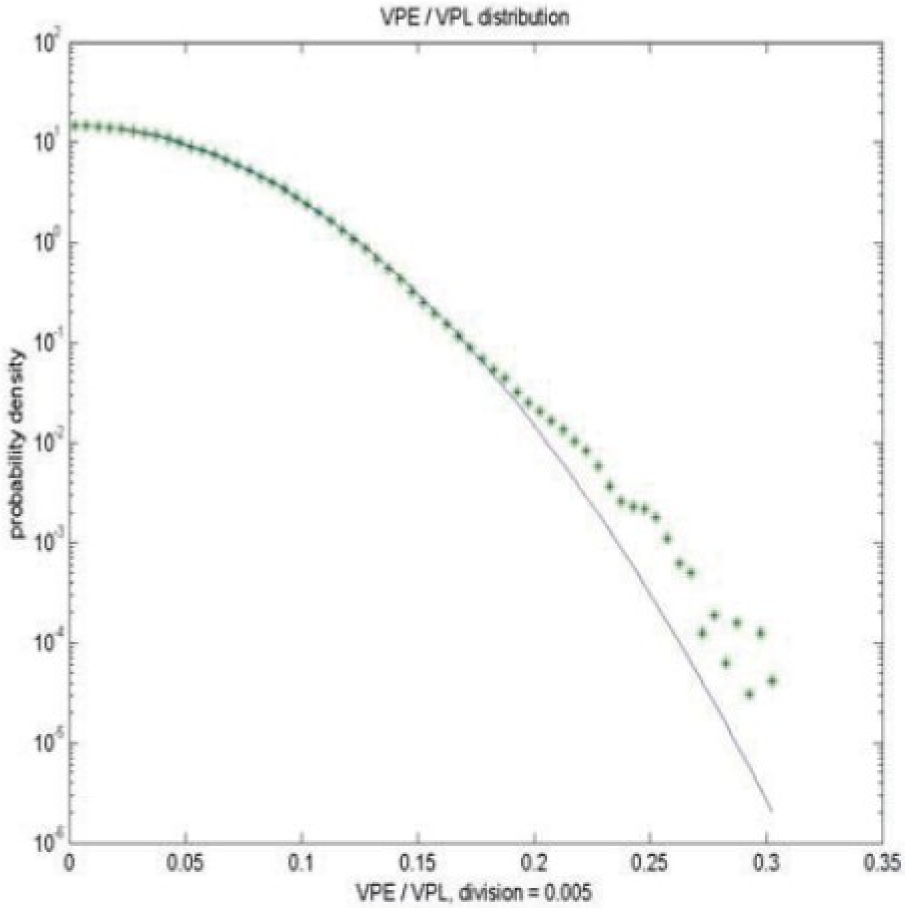
  GIMAT: GNSS Integrity Monitoring and Analysis Tool

VPE/VPL

- VPE: magassági pozíció hiba
- VPL: magassági biztonsági szint
- VPE/VPL > 1 := ML (félrevezető információ)

3 havi GPS/EGNOS adat
(> 6 millió epocha)

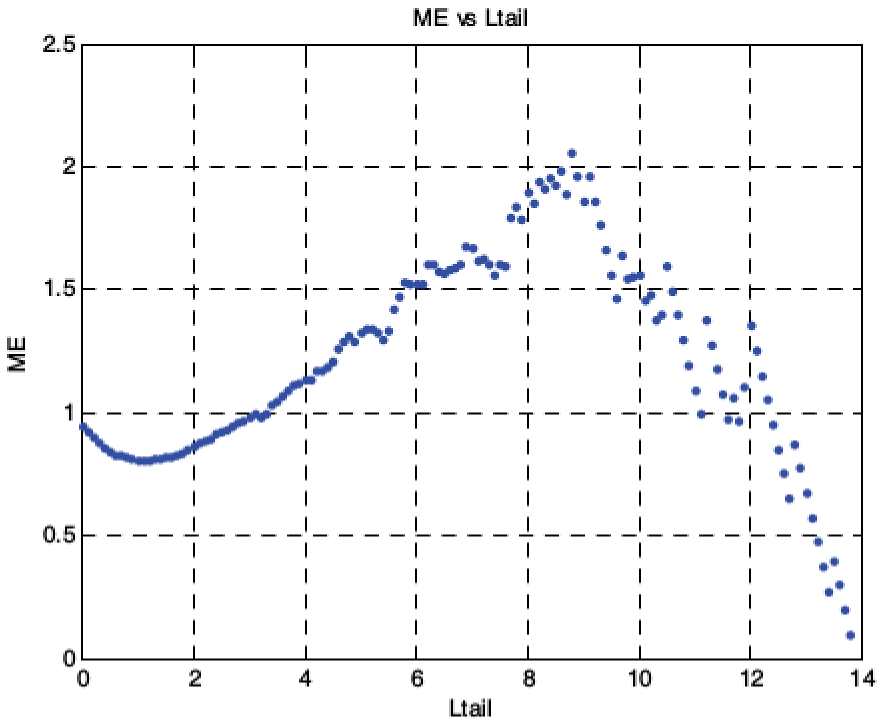
vonal: Gauss-eloszlás



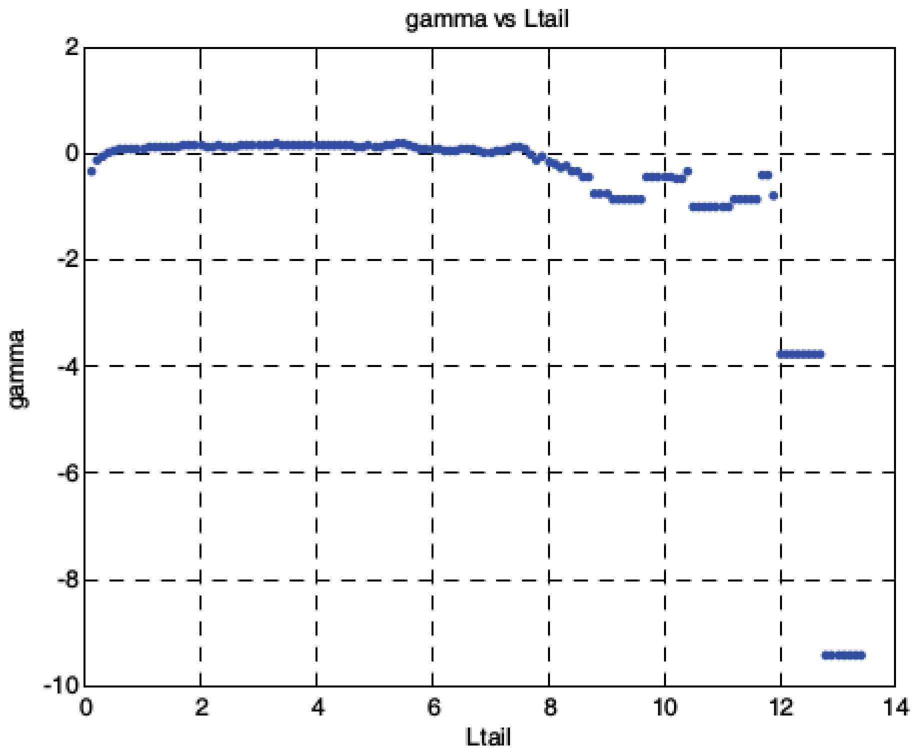
Veerman et al. 2009

Extrém érték elmélet alkalmazása (GIMAT)

átlagos meghaladás ábra

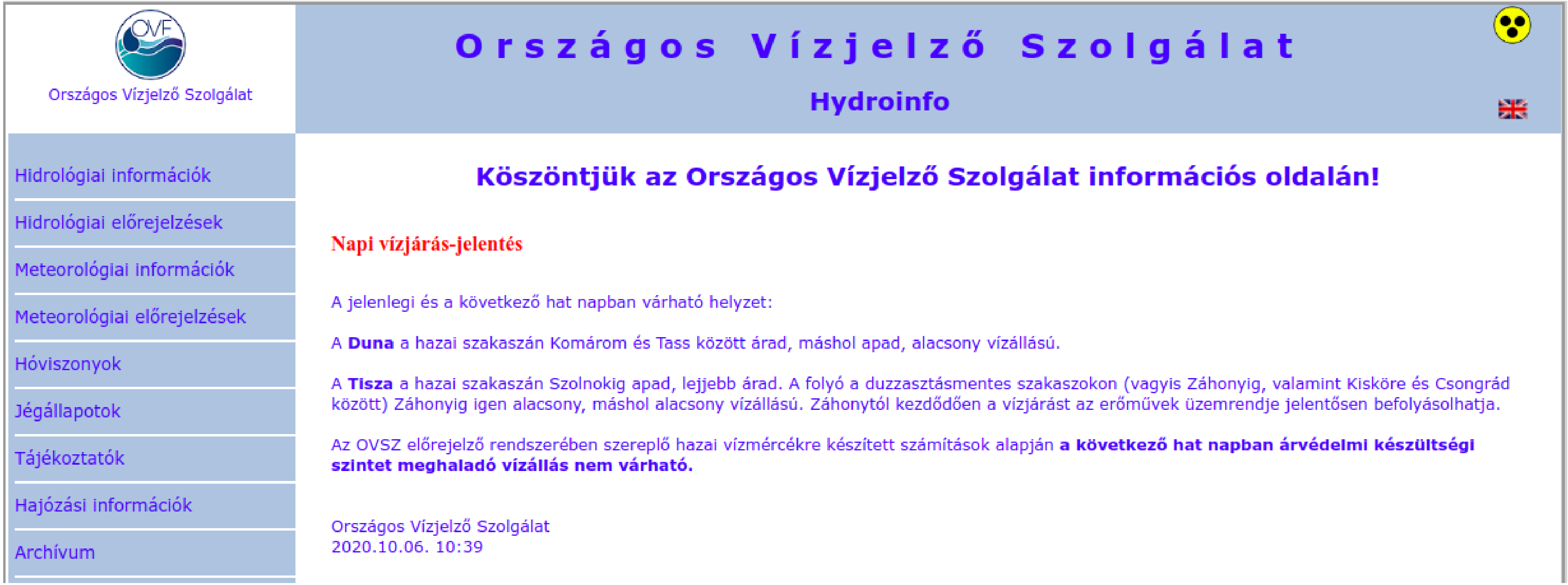


paraméter stabilitás ábra



Példa: Tisza vízszintje Vásárosnaménynál

- Adatok: www.hydroinfo.hu



Országos Vízjelző Szolgálat

Országos Vízjelző Szolgálat

Hydroinfo

Hidrológiai információk
Hidrológiai előrejelzések
Meteorológiai információk
Meteorológiai előrejelzések
Hóviszonyok
Jégállapotok
Tájékoztatók
Hajózási információk
Archívum

Köszöntjük az Országos Vízjelző Szolgálat információs oldalán!

Napi vízjárás-jelentés

A jelenlegi és a következő hat napban várható helyzet:

A **Duna** a hazai szakaszán Komárom és Tass között árad, máshol apad, alacsony vízállású.

A **Tisza** a hazai szakaszán Szolnokig apad, lejjebb árad. A folyó a duzzasztásmentes szakaszokon (vagyis Záhonyig, valamint Kisköre és Csongrád között) Záhonyig igen alacsony, máshol alacsony vízállású. Záhonytól kezdődően a vízjárást az erőművek üzemrendje jelentősen befolyásolhatja.

Az OVSZ előrejelző rendszerében szereplő hazai vízmércékre készített számítások alapján **a következő hat napban árvédelmi készültségi szintet meghaladó vízállás nem várható.**

Országos Vízjelző Szolgálat
2020.10.06. 10:39

Archív adatok

- Éves vízállástáblázatok: Tisza, Vásárosnamény

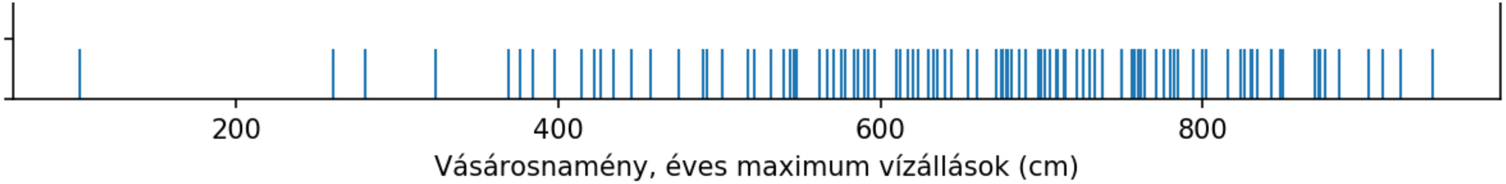
Letöltés és maximumok

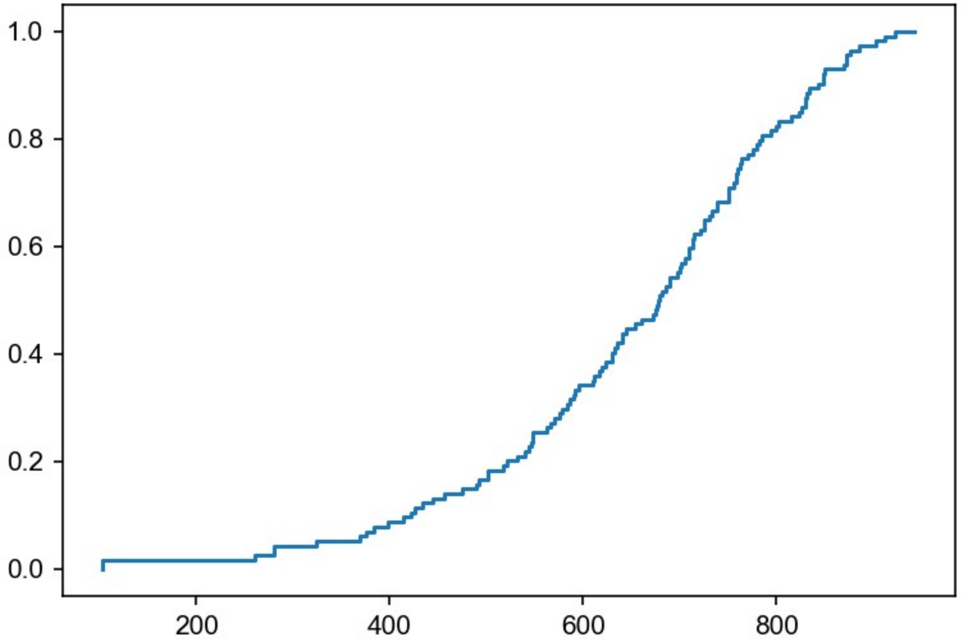
- Python szkript (urllib)

```
starty = 1901
endy = 1902  # 2019
endy = 2019  # új formátum 2002-től
#endy = 2002  # régi formátum 2002-ig
maxis = []
years = []

skipmx = [1919, 1944, 1945, 1984]

for year in range(starty,endy):

    #print(year, end=' ')
    url = "http://www.hydroinfo.hu/vituki/archivum/vn"+str(year)+".htm"
#    fp = urllib.request.urlopen("http://www.hydroinfo.hu/vituki/archivum/vn1901.htm")
    fp = urllib.request.urlopen(url)
    mybytes = fp.read()
    #mystr = mybytes.decode("utf8")
    mystr = mybytes.decode("cp1250")
    fp.close()
    #print(mystr)
    if False:  # ez nem működik!
        try:
            #found = re.search('<pre>(.+?)</pre>', mystr).group(1)
            found = re.search('<pre>\r\n(.+?)</pre>\r\n', mystr).group(1)
        except AttributeError:
            print("<pre>, </pre> not found in the original string")
            # <pre>, </pre> not found in the original string
            found = '' # apply your error handling

    # szöveges adatok keresése
    start = mystr.find('<pre>') + 7
    end = mystr.find('</pre>', start)
    found = mystr[start:end]
    filename = "vn"+str(year)+".txt"
```

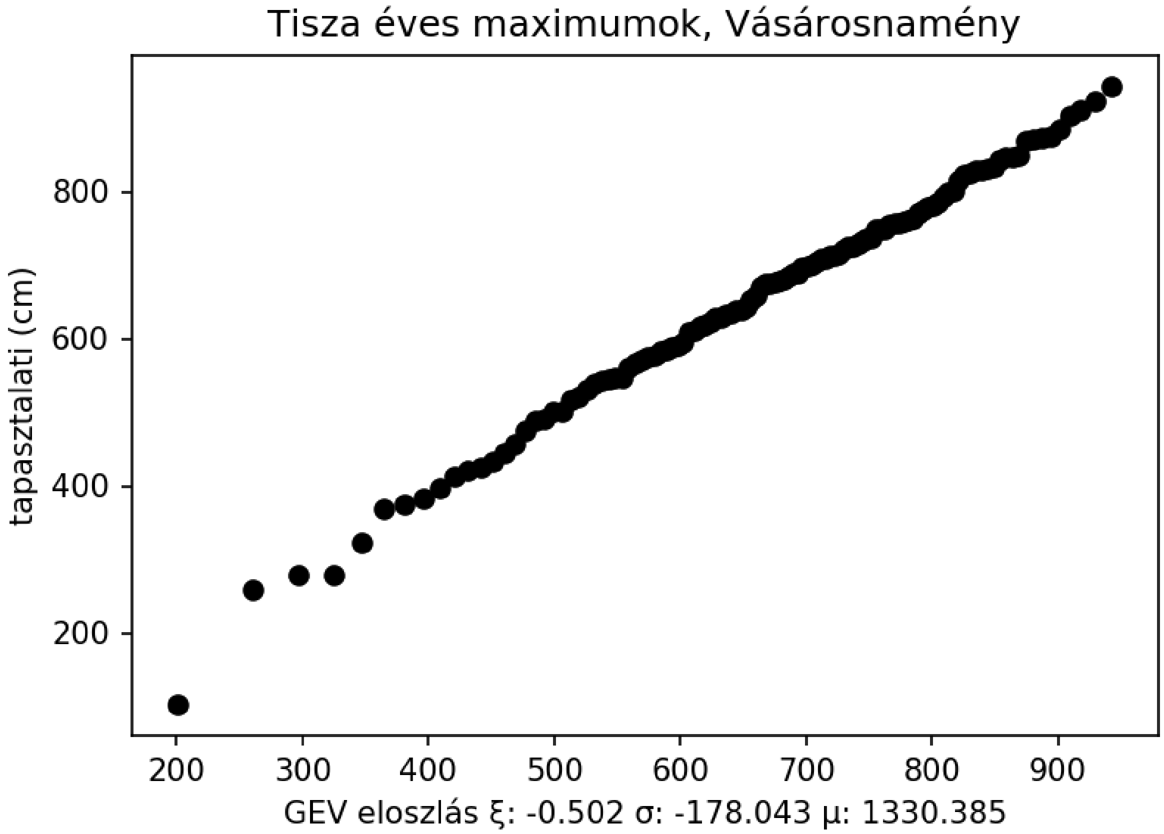
```
# Vásárosnamény éves maximum vízállások
1901 715
1902 730
1903 705
1904 324
1905 571
1906 630
1907 690
1908 675
1909 640
1910 548
1911 457
1912 750
1913 785
1914 750
1915 830
1916 548
1917 475
1918 490
1920 700
1921 280
1922 756
1923 710
1924 738
1925 776
1926 686
1927 426
```

Éves maximumok eloszlása





GEV kvantilis-kvantilis ábra



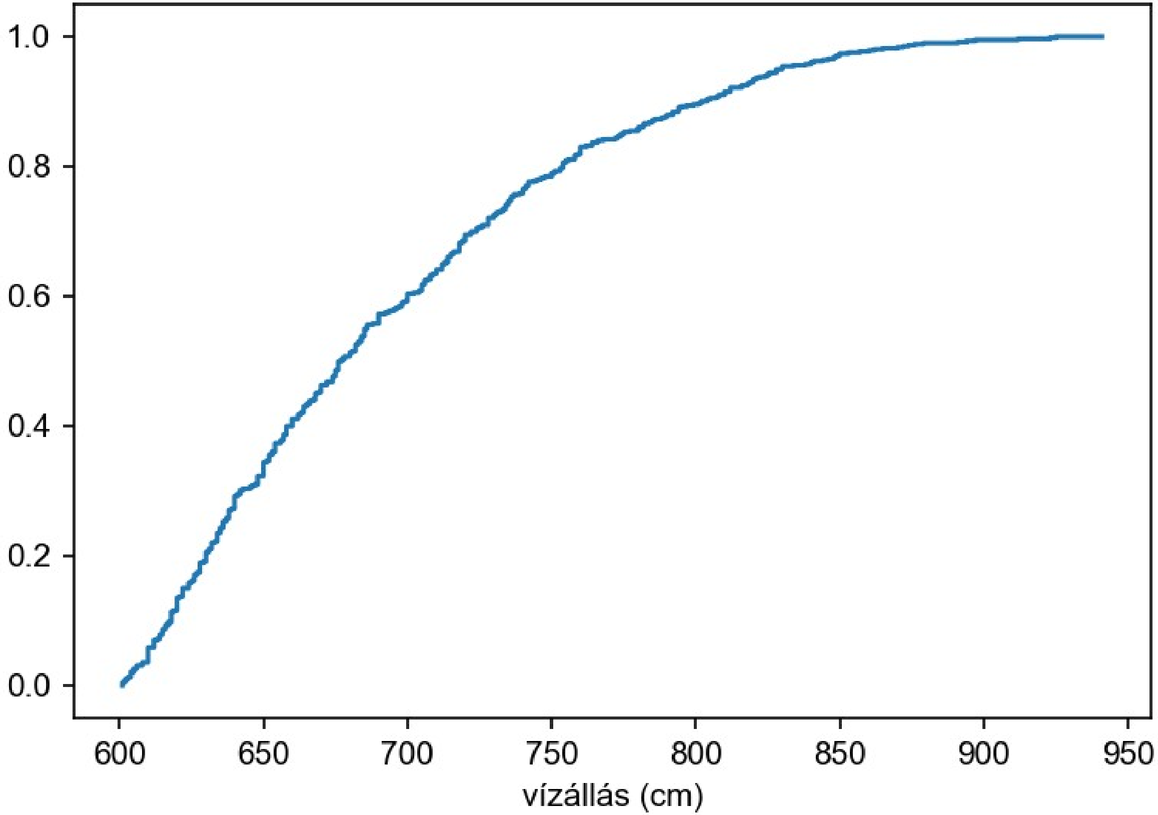
$$\xi \neq 0$$

$$z_p = \mu - \frac{\sigma}{\xi} \exp\left(1 - y_p^{-\xi}\right)$$

korrelációs együttható: 0.997

500 éves visszatérési szint: 960 cm
1000 éves visszatérési szint: 965 cm

u=600 cm-t meghaladó vízállások

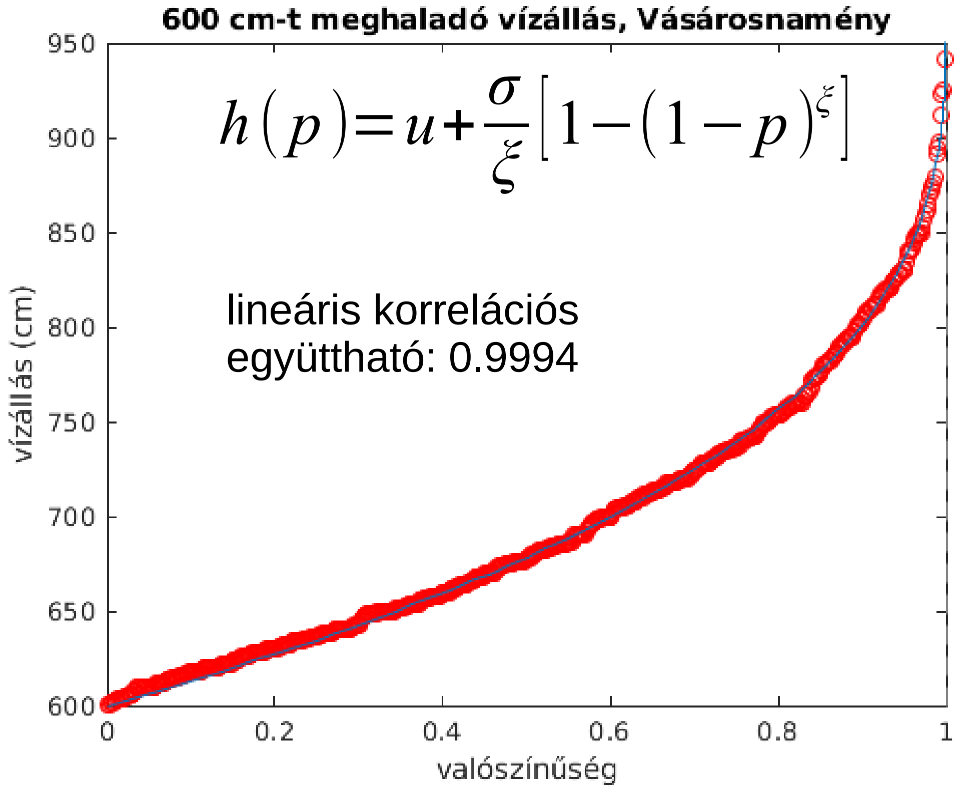


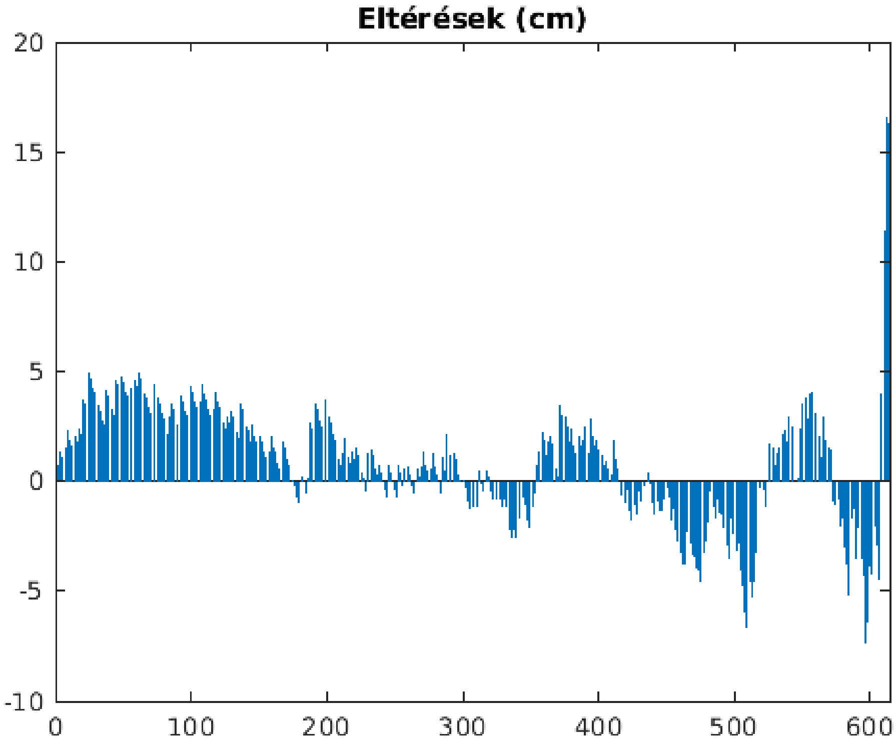
kumulatív tapasztalati eloszlásfüggvény

Általánosított Pareto-eloszlás kvantilis függvénye

$$h(p) = u + \frac{\sigma}{\xi}\left[1 - (1-p)^{\xi}\right]$$

Tapasztalati és elméleti eloszlás





1000 évenkénti árvíz nagysága

- A modell alapján határozzuk meg, hogy 1000 évenként mekkora árvíz bekövetkezése várható Vásárosnaménynál!
- definiáljuk a $p_{1000} = 1 - 1/1000$ valószínűség értéket
- az ehhez tartozó vízszint értéke az illesztett Pareto modell alapján: 930.4 cm

Monte Carlo eljárások

- Számítási algoritmusok széles köre, melyek ismételt véletlen mintavételezéssel állítanak elő számszerű eredményeket
- Hagyományos eszközökkel nehezen vagy egyáltalán nem vizsgálható problémák
- Fő alkalmazási területek:

  optimalizáció

  numerikus integrálás

  adott eloszlás szerinti minta generálása

Lépések

1) Meghatározzuk a lehetséges értékek tartományát
2) A tartományon megadott eloszlás szerint véletlen mintákat állítunk elő
3) A mintákon valamilyen előírt számítást végzünk
4) Összesítjük a kapott eredményeket

Mintavétel tetszőleges valószínűségeloszlásból

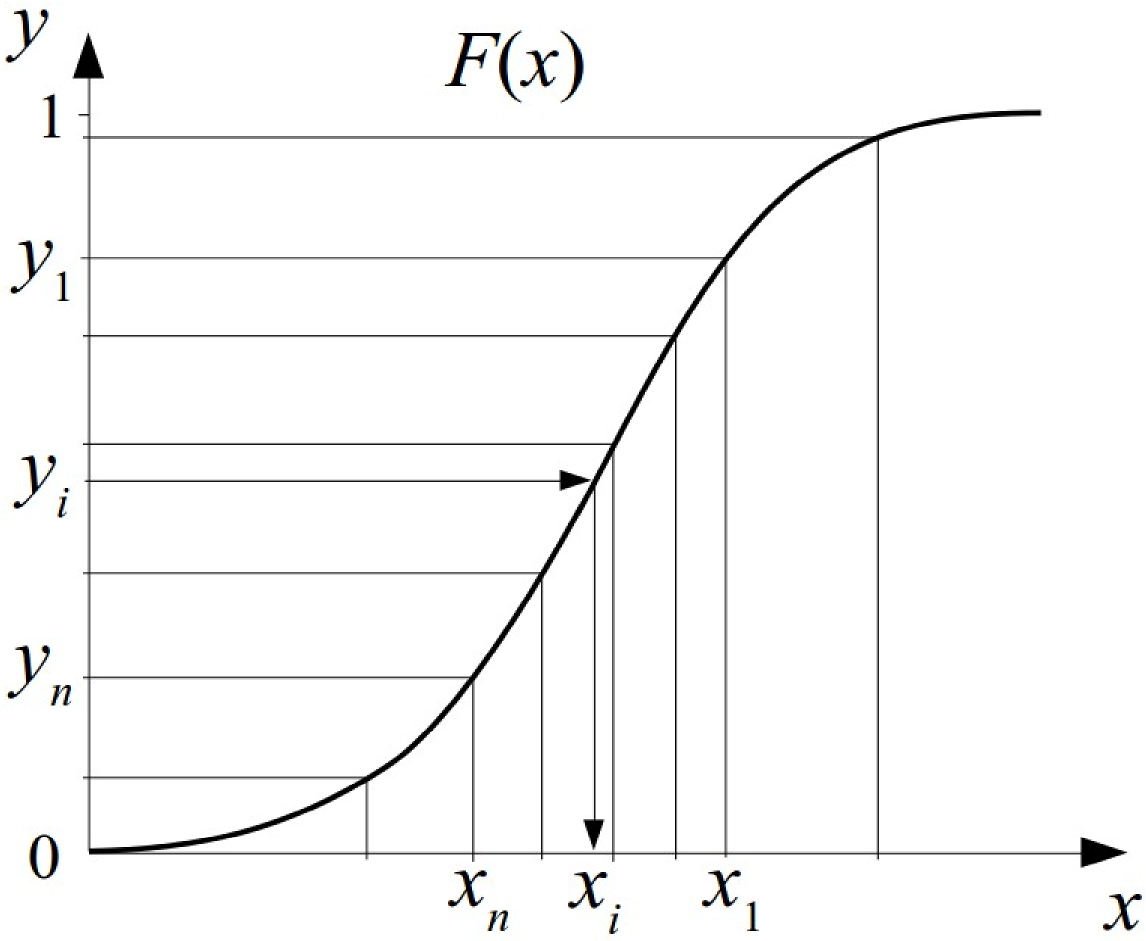
- Rendelkezünk a (0, 1) intervallumban egyenletes eloszlású véletlenszámokat szolgáltató eljárással
- Az $F(x)$ eloszlásfüggvényű valószínűségeloszlásból szeretnénk n elemű mintát venni
- Ismerjük az $F(x)$ eloszlásfüggvény inverzét, az $F^{-1}(y) = F^{-1}(p)$ kvantilis függvényt
- Előállítunk n db y_i egyenletes eloszlású véletlenszámot ($i = 1,\ldots,n$)
- Az $x_i = F^{-1}(y_i)$ a keresett n elemű minta

Mintavétel tetszőleges valószínűségeloszlásból

$$y_i = F(x_i)$$

$$x_i = F^{-1}(y_i)$$

$F^{-1}(p)$ kvantilis függvény

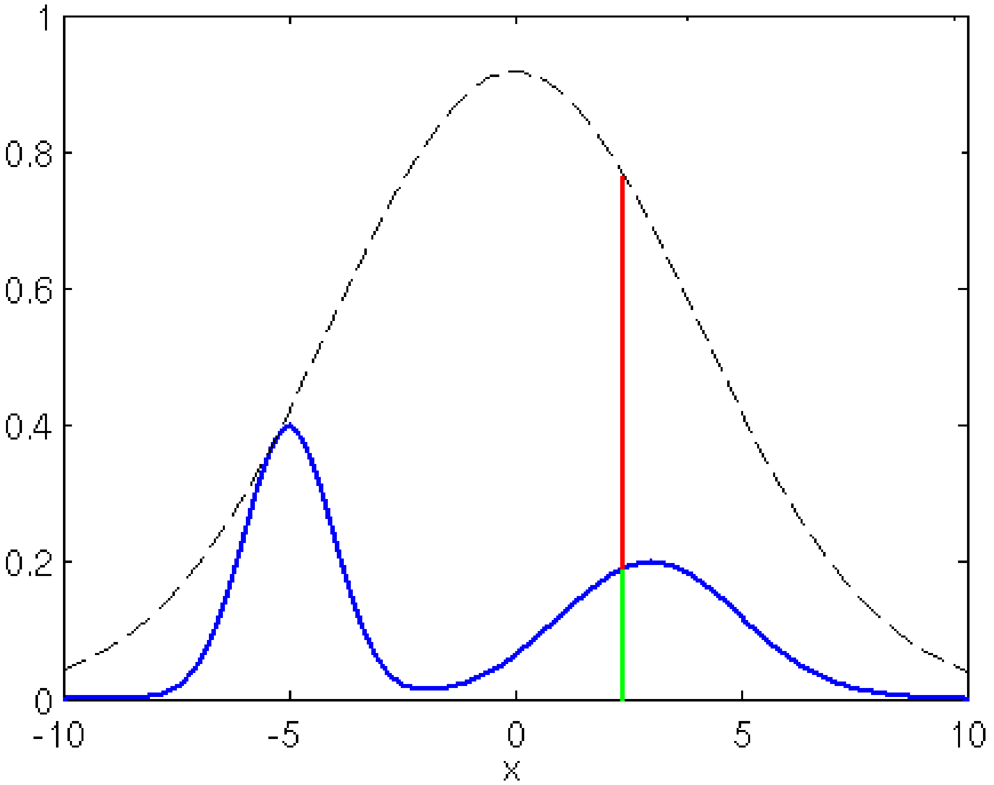


Analitikusan megadható kvantilis függvények

Density $f(x)$	$F(x)$	$X=F^{-1}(U)$	Simplified form
Exponential(λ) $\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$	$1-e^{-\lambda x}$	$-\frac{1}{\lambda}\log(1-U)$	$-\frac{1}{\lambda}\log(U)$
Cauchy(σ) $\frac{\sigma}{\pi(x^2+\sigma^2)}$	$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan(\frac{x}{\sigma})$	$\sigma\tan(\pi(U-\frac{1}{2}))$	$\sigma\tan(\pi U)$
Rayleigh(σ) $\frac{x}{\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$, $x \geq 0$	$1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$	$\sigma\sqrt{-\log(1-U)}$	$\sigma\sqrt{-\log(U)}$
Triangular on$(0,a)$ $\frac{2}{a}(1-\frac{x}{a})$, $0 \leq x \leq a$	$\frac{2}{a}(x-\frac{x^2}{2a})$	$a(1-\sqrt{1-U})$	$a(1-\sqrt{U})$
Tail of Rayleigh $xe^{\frac{a^2-x^2}{2}}$, $x \geq a > 0$	$1-e^{\frac{a^2-x^2}{2}}$	$\sqrt{a^2-2\log(1-U)}$	$\sqrt{a^2-2\log U}$
Pareto(a,b) $\frac{ab^a}{x^{a+1}}$, $x \geq b > 0$	$1-(\frac{b}{x})^a$	$\frac{b}{(1-U)^{1/a}}$	$\frac{b}{U^{1/a}}$

Elutasító mintavétel

- javasolt eloszlából vett minta elfogadása/elutasítása



cél eloszlás

javasolt eloszlás

elfogadjuk a mintát

elutasítjuk a mintát

Markov-lánc Monte Carlo mintavétel (MCMC)

- mintavételezés tetszőleges (bonyolult) eloszlásból:

1) véletlen számok generálása: Monte Carlo rész
2) ezek befolyásolják a következő számok generálását: Markov-lánc
3) eldöntjük, hogy ezek az új számok a „helyes irányban” változtak-e: elfogadás-elutasítás
4) ellenőrizzük a konvergenciát: meghatározzuk, hogy az adataink valamilyen ésszerű eloszláshoz konvergáltak-e? Ha igen, akkor ez az eloszlásból vett minta

Véletlenszám generátorok

- fontos szempontok:
  - statisztikai minőség
  - előrejelezhetőség
  - reprodukálható eredmények
  - ismétlési periódus
  - futásidő
  - tárigény
  - kódméret, bonyolultság
  - tetszőleges dimenzióban egyenletes eloszlás

	Statistical Quality	Prediction Difficulty	Reproducible Results	Multiple Streams	Period	Useful Features	Time Perfomance	Space Usage	Code Size & Complexity	k-Dimensional Equidistribution
PCG Family	Excellent	Challenging	Yes	Yes (e.g. 2^{63})	Arbitrary	Jump ahead, Distance	Very fast	Very compact	Very small	Arbitrary*
Mersenne Twister	Some Failures	Easy	Yes	No	Huge 2^{19937}	Jump ahead	Acceptable	Huge (2 KB)	Complex	623
Arc4Random	Some Issues	Secure	Not Always	No	Huge 2^{1699}	No	Slow	Large (0.5 KB)	Complex	No
ChaCha20†	Good	Secure	Yes	Yes (2^{128})	2^{128}	Jump ahead, Distance	Fairly Slow	Plump (0.1 KB)	Complex	No
Minstd (LCG)	Many Issues	Trivial	Yes	No	Tiny $< 2^{32}$	Jump ahead, Distance	Acceptable	Very compact	Very small	No
LCG 64/32	Many Issues	Published Algorithms	Yes	Yes 2^{63}	Okay 2^{64}	Jump ahead, Distance	Very fast	Very compact	Very small	No
XorShift 32	Many Issues	Trivial	Yes	No	Small 2^{32}	Jump ahead	Fast	Very compact	Very small	No
XorShift 64	Many Issues	Trivial	Yes	No	Okay 2^{64}	Jump ahead	Fast	Very compact	Very small	No
RanQ	Some Issues	Trivial	Yes	No	Okay 2^{64}	Jump ahead	Fast	Very compact	Very small	No
XorShift* 64/32	Excellent	Unknown?	Yes	No	Okay 2^{64}	Jump ahead	Fast	Very compact	Very small	No

Eloszlásfüggvények terjedése nem lineáris rendszeren keresztül

- Ismert a vizsgált rendszer modellje: $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})$
- Bemeneti x_i ($i = 1, \ldots, m$) mennyiségek (együttes) vsz. eloszlás függvényei is ismertek: $F_i(x_i)$ ($F(\boldsymbol{x})$)
- Előállítunk az ismert $F_i(x_i)$ eloszlások ($F(\boldsymbol{x})$) alapján véletlenszerűen egy lehetséges $\boldsymbol{x}$ bemenetet és meghatározzuk a $\boldsymbol{g}$ függvény alapján az y_k ($k = 1 \ldots, n$) kimeneteket
- Monte Carlo: Az eljárást sokszor (N-szer) megismételve az y_k kimenetek mindegyikéből N elemű mintát kapunk
- A kimeneti mennyiségek tapasztalati eloszlásait meghatározzuk
- Az eloszlások segítségével az y_k kimenetek legjellemzőbb értékeit és bizonytalanságait kiszámítjuk

Monte Carlo módszerek alkalmazása a mérési bizonytalanság meghatározására

- A GUM Supplement 1: „Propagation of distributions using a Monte Carlo method” 5.1.1

a) modell felállítása
   1. a mérendő mennyiség, Y definiálása
   2. az $\boldsymbol{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_N)^T$ bemeneti mennyiségek meghatározása, amiktől Y függ
   3. az $\boldsymbol{X}$-et és Y-t összekapcsoló modell megalkotása
   4. a meglevő ismeretek alapján X_i-k eloszlásfüggvényeinek (Gauss, egyenletes, háromszög, stb.) megadása, illetve nem független X_i-k együttes eloszlásfüggvényinek a megadása

b) terjedés

c) összefoglaló statisztikák készítése Y eloszlásfüggvényéről

Monte Carlo módszerek alkalmazása a mérési bizonytalanság meghatározására

- A GUM Supplement 1: „Propagation of distributions using a Monte Carlo method” 5.1.1

a) modell felállítása

b) terjedés
   1. az X_i-k eloszlásfüggvényeinek terjedése a modellen keresztül, hogy megkapjuk Y eloszlásfüggvényét

c) összefoglaló statisztikák készítése Y eloszlásfüggvényéről
   1. az Y várható értéke lesz a mennyiség y becslése (nem minden alkalmazás számára megfelelő)
   2. az Y standard bizonytalansága lesz az y mennyiség $u(y)$ standard bizonytalansága (Cauchy eloszlás esetén nem létezik)
   3. megbízhatósági tartomány készítése, mely Y-t előírt megbízhatósági valószínűséggel tartalmazza

Eloszlásfüggvények terjedése

- a mérendő mennyiség, Y eloszlásfüggvénye:

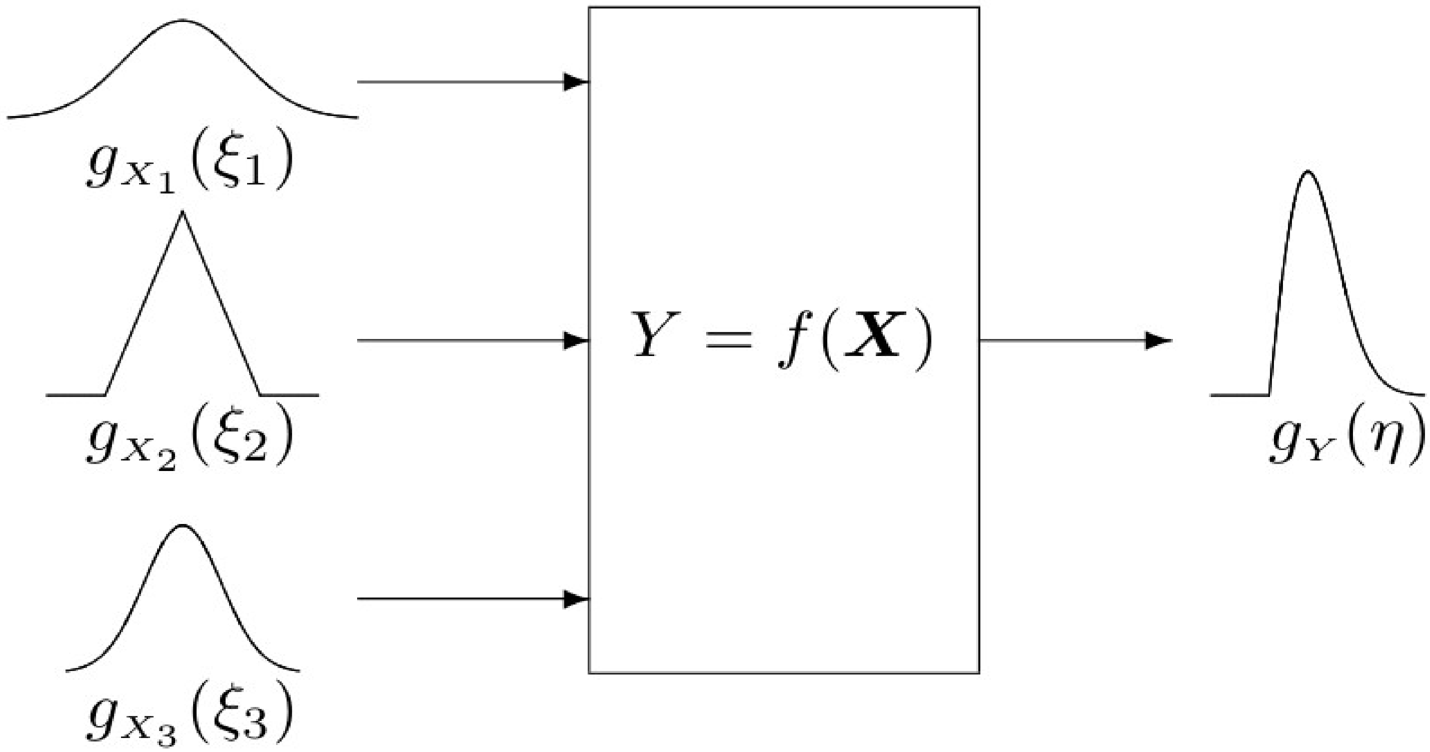
$$G_Y(\eta)=\int_{-\infty}^{\eta} g_Y(z)\,dz$$

- a sűrűségfüggvény formális definíciója (δ a Dirac delta):

$$g_Y(\eta)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} g_{\mathbf{X}}(\xi)\,\delta(\eta-f(\xi))\,d\xi_N\cdots d\xi_1$$

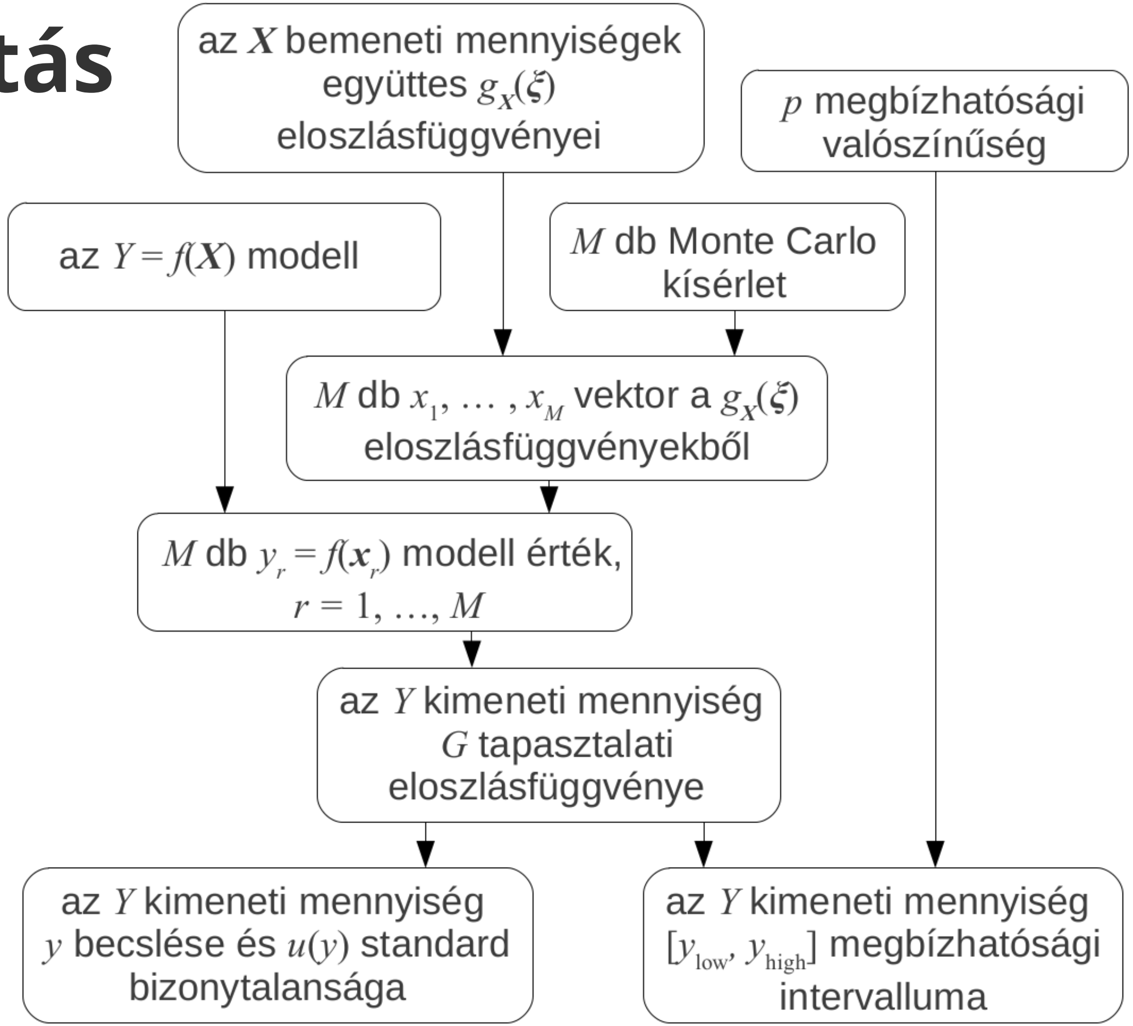
- analitikusan az integrálás nem végrehajtható, helyette Monte Carlo számításra (MCM) van szükség

Eloszlásfüggvények terjedése



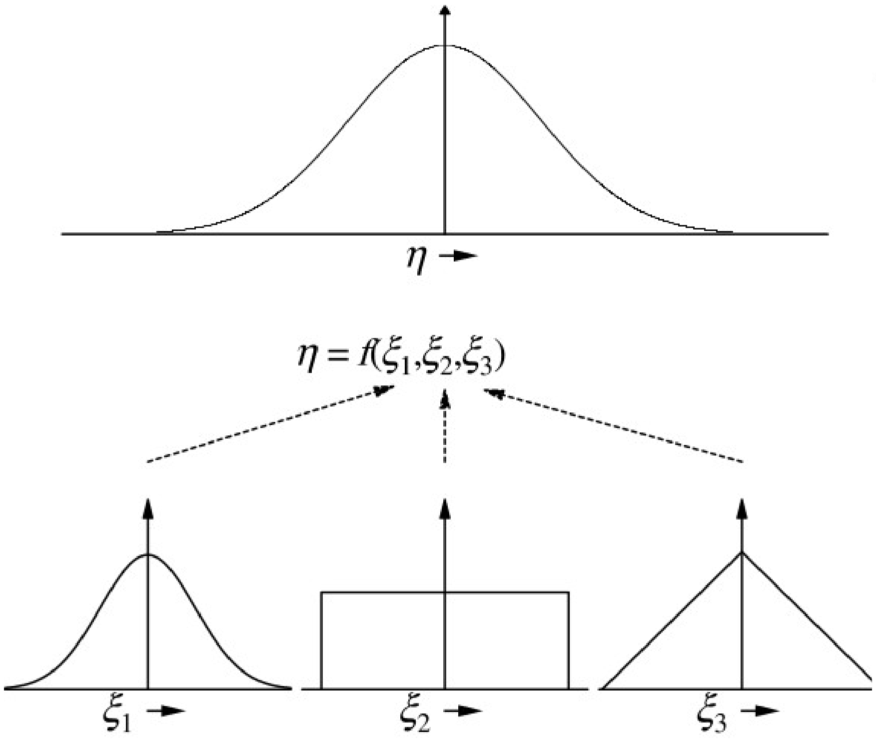
Az eloszlások terjedésének illusztrációja N = 3 független bemeneti mennyiségre

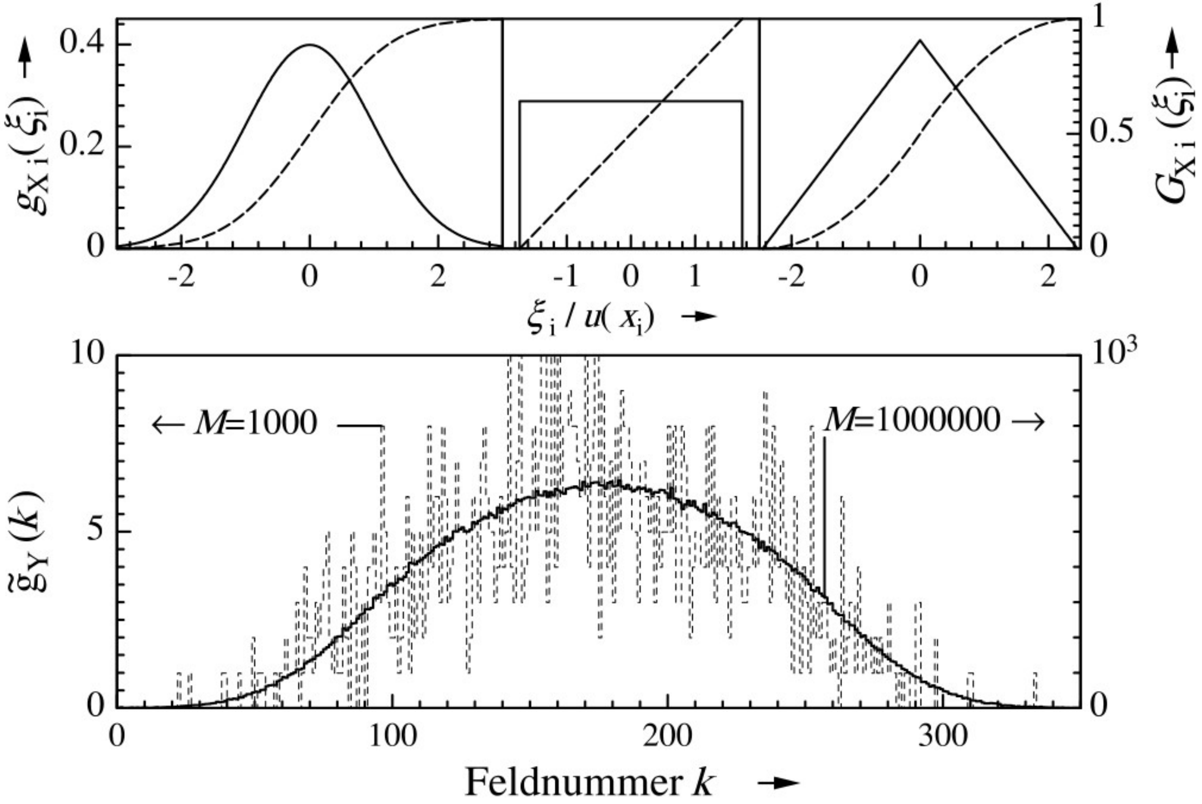
Monte Carlo számítás



MCM példa

$$\eta = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3$$





(Siebert – Sommer, 2004)

Irodalom

- Steiner F. (1990): 5.1.3 pont
- Barabás B. (2010): Extrémérték-elmélet BME TTK
- Brodin E. (2006): A Non-mathematical Introduction to Statistics of Extremes NFT 3/2006
- Friederichs P. (2007): An Introduction to Extreme Value Theory University of Bonn, COPS Summer School
- Burkov B.
  Intro to the Extreme Value Theory and Extreme Value Distribution