

## **A FÖLDI NEHÉZSÉGI ERŐTÉR MEGHATÁROZÁSA FÖLDFELSZÍNI MÉRÉSEK ALAPJÁN ÉS MESTERSÉGES HOLDAK FELHASZNÁLÁSÁVAL**

A nehézségi erőter mérésével kapcsolatos mérési módszerek és mérőműszerek három csoportba sorolhatók.

Az első csoportba a nehézségi gyorsulás abszolút értékének meghatározására szolgáló mérési módszereket soroljuk. Az erre szolgáló mérési eszközök általában a különféle ingák, vagy az ejtés és a hajítás alapelvein működő műszerek.

A második csoportba a nehézségi gyorsulás két pont közötti relatív különbségének méréseit soroljuk. Az erre alkalmas mérőműszerek a különböző elven működő graviméterek és a relatív ingák.

A mérési módszerek harmadik csoportjába a nehézségi erőter gradienseinek meghatározási módszereit soroljuk. Ezekből a mérésekből megkapjuk, hogy a különböző irányokban, egységnyi távolságon mennyivel változik meg a nehézségi gyorsulás értéke. A gradiensek meghatározására az Eötvös-ingák és az ún. gradiométerek szolgálnak.

### **A nehézségi gyorsulás abszolút mérése**

Míg az abszolút mérések célja az, hogy egyetlen pontban végzett mérések alapján határozzuk meg a nehézségi gyorsulás teljes értékét, addig a relatív mérésekkel két pont között a nehézségi gyorsulás különbségét határozzuk meg. Az utóbbi módszerrel abszolút érték csak akkor nyerhető, ha a mért pontok egyikén ismerjük a nehézségi gyorsulás abszolút értékét.

A nehézségi gyorsulás abszolút értékének meghatározására elvileg minden olyan fizikai jelenség alkalmas, amelyben a nehézségi gyorsulásnak szerepe van. Gyakorlatilag azonban csak azokat a jelenségeket használhatjuk fel, amelyek törvényszerűségeit leíró összefüggésekből a nehézségi gyorsulás olyan fizikai mennyiségekkel fejezhető ki, amelyek mindegyike nagy megbízhatósággal mérhető. Így pl. a matematikai inga (a fonálinga) esetében – légüres térben és végtelenül kicsi kitérések esetén – az inga lengésideje:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

amiből  $g$  a mérhető  $\ell$  ingahossz és a  $T$  lengéside ismeretében határozható meg. Mivel a matematikai inga nem valósítható meg kellő pontossággal, ezért az abszolút nehézségi gyorsulás mérésekre inkább a fizikai ingákat, illetve az ún. megfordítható (reverzibilis) ingákat alkalmazzák.

Régebben a nehézségi gyorsulás abszolút értékét kizárólag ingamérésekkel határozták meg, napjainkban azonban a mérési technika rohamos fejlődésével más módszereket

– elsősorban a szabadesés alapelvét felhasználó lézergravimétereket alkalmaznak (1. ábra). Ezekkel a korábbi ingamérések pontosságát kb. két nagyságrenddel sikerült megjavítani és így csaknem elérni a  $\mu Gal$  ( $10^{-8} m/s^2$ ) pontosságot. Ezeknek a műszereknek ma már van terepen használható változata is (2. ábra).

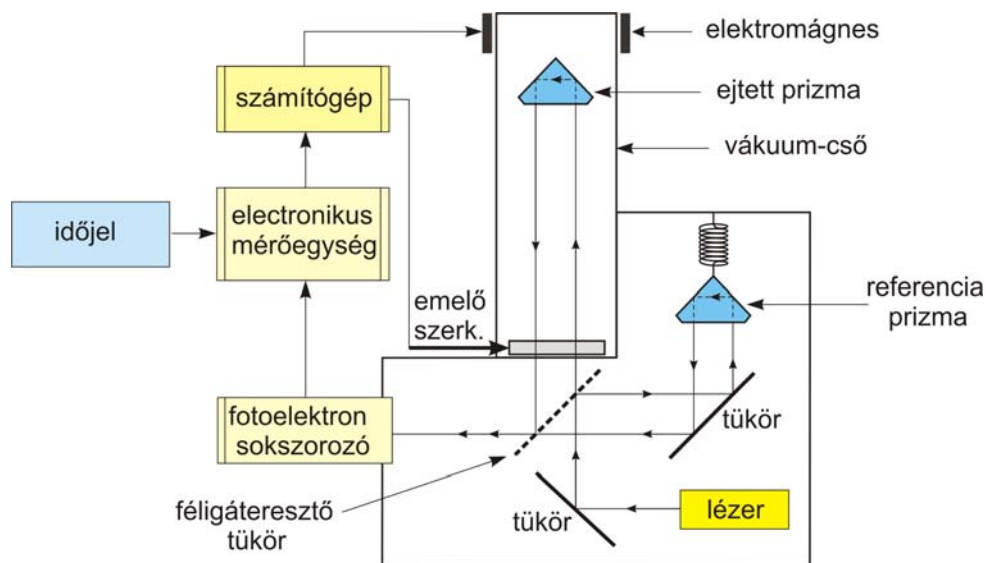


1. ábra. JILAg-6 abszolút graviméter a kenderesi mérésen 2005-ben



2. ábra. Az A3 terepi abszolút graviméter

A berendezés elvi felépítése a 3. ábrán látható. A mérés során erősen légritkított térben (vákuumban) speciális kvarcüvegből készített szögprizmának kiképzett tömeget ejtenek, amelyet a felső kiindulási helyzetben elektromágnes segítségével rögzítenek. A test ejtése, valamint a felső kiinduló helyzetébe történő visszaemelés és az újabb ejtés automatikusan történik, a berendezéshez tartozó számítógép vezérlésével. A szabadon eső optikai szögprizma része az ábrán látható Michelson-féle aszimmetrikus interferométernek. Az interferométer úgy működik, hogy a lézercsöből kilépő sugárnyalábot félig áteresztő tükörrre vetítik, amelyen a sugárnyaláb kettéválik: az egyik része irányváltoztatás nélkül halad tovább és az eső szögprizmán  $180^\circ$ -os törést szenvedve visszajut a félig áteresztő tükörrre; míg a másik, ún. referencia-sugárnyaláb megtörik, továbbhalad egy vertikális szeizmográf tömegeként rögzített referencia-prizmán és többszörös törés illetve visszaverődés után a félig áteresztő tükrön találkozik az eső prizmaról visszavert sugárral. Az ily módon újra egyesített két sugárnyaláb interferencia jelenséget okoz. Az interferencia miatt "fényerőmodulált" sugárnyaláb fényelektromos (fotoelektron-) sokszorozóba jut, ahonnan erősítés után elektromos jelként átalakítva, elektromos impulzusok formájában lép ki. Az elektromos impulzusokat mérő egységbe (számláló egységbe) vezetik, ahová egyidejűleg rubídium kristály segítségével előállított igen pontos időjelek is kerülnek.



3 ábra. A ballisztikus lézergraviméter elvi felépítése

Ha valamely  $\Delta s_1$  és  $\Delta s_2$  útszakaszon eső test megfigyelése során az elektronikus számláló egységen  $\Delta t_1$  idő alatt  $n_1$  és  $\Delta t_2$  idő alatt  $n_2$  számú elektromos impulzus halad keresztül, akkor

$$\Delta s_1 = n_1 \frac{\lambda}{2} \quad \text{és} \quad \Delta s_2 = n_2 \frac{\lambda}{2}$$

ahol  $\lambda$  a lézersugarak hullámhossza. Az elektronikus számláló egység egyidejűleg az időjeleket (a rubídium kristály rezgéseit) is számlálja: az  $n_1$  számú impulzust  $\Delta t_1$  idő

alatt, az  $n_2$  impulzust  $\Delta t_2$  idő alatt méri. Az eredmény egy illesztő egység (interface) közbeiktatásával elektronikus számítógépbe kerül, amely az adott ejtésből a

$$g = \left( \frac{\Delta s_2}{\Delta t_2} - \frac{\Delta s_1}{\Delta t_1} \right) \frac{2}{\Delta t_2 - \Delta t_1} + \delta g$$

összefüggés felhasználásával kiszámítja a nehézségi gyorsulás abszolút értékét ( $\delta g$  a különféle korrekciós tagok összege); valamint a korábbi ejtésekkel meghatározott  $g$  értékek felhasználásával folyamatos statisztikai feldolgozást is végez. A műveletek befejezése után a számítógép utasítást ad az újabb ejtésre. Egyetlen mérési ponton a  $g$  értéke 14-25 mérési sorozat eredményének súlyozott átlagaként adódik (egy sorozatban 120 ejtést végeznek – ami kb. 30 perc időt vesz igénybe).

## A nehézségi gyorsulás relatív mérése

Napjainkban még nem állrendelkezésre megfelelő számú abszolút műszer, ezért abszolút nehézségi gyorsulás méréseket csak ritkán, viszonylag kevés ponton végeznek. A többi pont nehézségi gyorsulását ezekhez a főalappontokhoz viszonyított relatív mérésekkel vezetik le.

A relatív mérésekhez olyan nehézségi alaphálózatra van szükségünk, amelyre támaszkodva relatív mérésekkel is meghatározhatjuk az egyes pontok abszolút  $g$  értékeit.

A geodéziai és a geofizikai célú (szintézisi vonalakhöz, nyersanyagkutatásokhoz stb. szükséges) *gravitációs részletméréseket* az országos nehézségi alapponthálózatra támaszkodva relatív mérésekkel végezzük. A nehézségi gyorsulás mérések pontsűrűsége Magyarországon kb.  $0.5 - 4 \text{ km}$ . Kisebb területeken szerkezeti-, illetve nyersanyagkutató céljára  $100-500 \text{ m}$  pontsűrűségű részletméréseket, sőt  $1.0 - 100 \text{ m}$  sűrűségű ún. mikroméréseket is végeztek. Ezzel a pontsűrűséggel hazánk az igen jól felmért területek közé tartozik. Más, többnyire a nagyobb kiterjedésű országokban a gravitációs mérések többnyire csak az alapponthálózat létesítésére korlátozódnak és csak egyes helyeken végeznek részletméréseket, ahol ezt geofizikai, vagy geodéziai cél szükségessé teszi. Különösen kevés mérés történt eddig a tengereken, ahol a nehézségi gyorsulás mérése különleges feladatot jelent.

Ma már a relatív nehézségi gyorsulás méréseket szinte kizárólag graviméterekkel végzik, ezért a következőkben kissé részletesebben foglalkozunk a graviméteres mérésekkel.

## A graviméterek

A graviméterek a fizikából ismert rugós erőmérők elve alapján működnek. A 4. ábra szerint az  $mg_1$  súly hatására megfeszült rugó  $s_1$  skálaértéket mutat. Ha a szerkezetet olyan másik helyre visszük, ahol  $g_2$  a nehézségi gyorsulás értéke, akkor a mutató  $s_2$  skálaértéket fog jelezni. A Hooke-törvény szerint az elmozdulás arányos az erővel, ezért:

$$mg_2 - mg_1 = D(s_2 - s_1)$$

ahol  $D$  a rugóállandó.

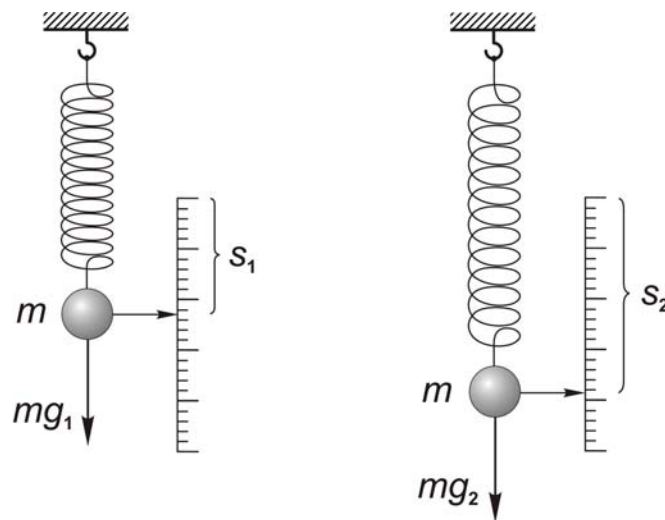
Így a két hely között a nehézségi gyorsulás különbsége:

$$g_2 - g_1 = \frac{D}{m}(s_2 - s_1)$$

vagy egyszerűbben:

$$\Delta g = c \Delta s \tag{1}$$

azaz két mérési pont között a  $\Delta s$  skálaleolvasási különbség egyenesen arányos a  $\Delta g$  nehézségi gyorsulás különbséggel; a  $c$  arányossági tényező a graviméter szorzója.

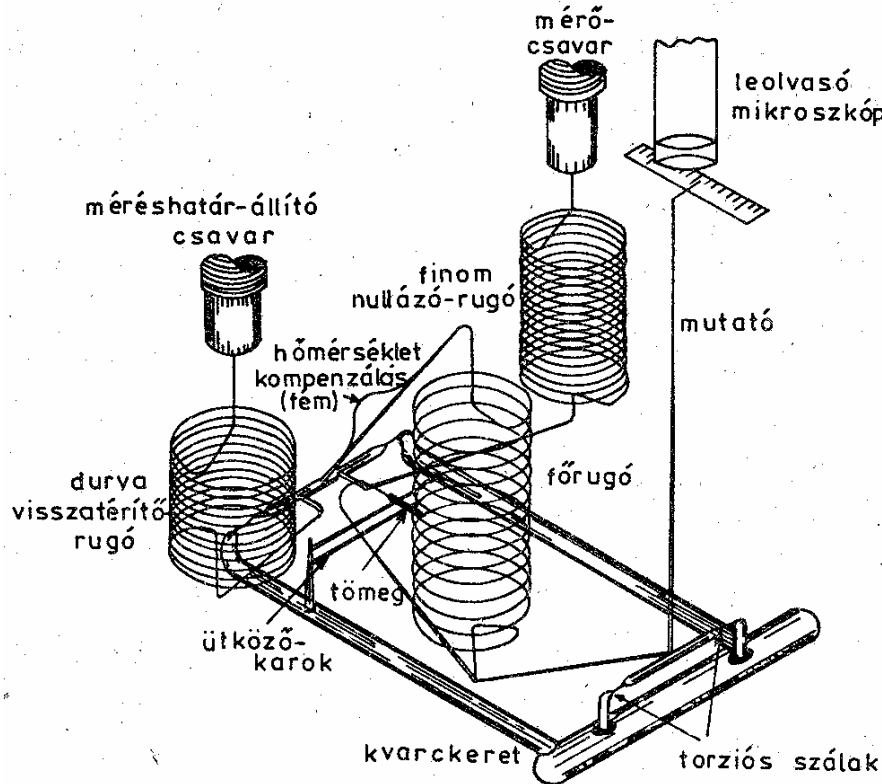


4. ábra. A graviméterek működésének alapelve

A graviméterek konkrét megvalósítási formái azonban lényegesen eltérnek a fent vázolt elvi felépítéstől. Ennek fő oka a rendkívül nagy pontossági igény, ugyanis a műszerektől elvárjuk, hogy a nehézségi gyorsulás  $10^{-6} - 10^{-9}$  nagyságrendű megváltozását is érzékelni tudják.

A korszerű rugós graviméterek érzékenységét elsősorban asztatizációval fokozzák. Viszonylag nagy pontosságú és egyszerű kezelhetőségük miatt ma legelterjedtebbek a kvarcgraviméterek) pl. Worden, Sharpe, Scintrex, GAG stb.). A kvarcgraviméterek vázlatos belső felépítését az 5. ábra mutatja. Az ábrán feltüntetett kvarckerethez torziós szárlakon két olyan kvarcrúd van kifeszítve, amelyek vízszintes tengelyük körül elfordulhatnak. Az egyik kvarcrúdhhoz csatlakozó szerkezet tulajdonképpen a Galicin-féle szeizmométer, a másik kvarcrúdhhoz pedig különböző emelőkarokon keresztül a lengőtartó főrugó, valamint a nullázó és a méréshatárt beállító rugó kapcsolódik. A nullázó és a méréshatárt beállító rugókkal a főrugó felső részéhez csatlakozó kart lehet emelni vagy süllyeszteni. A lengőrész forgástengelyéhez mutató kapcsolódik, amelyet a leolvasó-

mikroszkópon keresztül figyelhetünk meg. Az egész szerkezet légüres térben és hőszigetelt edényben van, ráadásul a lengőt és a rugótartó karokat úgy készítik, hogy a kisebb hőmérsékletváltozások által okozott hatásokat automatikusan kompenzálják. A kvarcalkatrészek igen könnyűek és az ütköző karok lehetővé teszik, hogy mérésen kívül, szállításkor a műszert nem kell "arretálni" – azaz a lengőrészt rögzíteni.



5. ábra. A kvarcgraviméterek szerkezete

A kvarcgraviméter működése igen egyszerű: a nehézségi erő a lengő tengelyéremeghatározott forgatónyomatékkal hat, amely forgatónyomatékkal a főrugó által kifejtett ellenkező irányú forgatónyomaték tart egyensúlyt. Ha a  $g$  megnő vagy lecsökken, akkor a lengő egyensúlyi helyzete annyival lejjebb vagy feljebb kerül, hogy a nehézségi erő és a rugóerő által okozott forgatónyomaték egyenlő legyen.

A mérés ún. nullpont módszerrel történik: a mérőrugót addig feszítjük vagy lazítjuk a mérőcsavar elforgatásával, amíg a lengő mutatója a leolvasó mikroszkópban látható beosztás nullpontjára nem mutat. Az elcsavarás mértéke a mérőcsavar melletti skálán olvasható le. Végül két mérési hely  $\Delta g$  különbsége az (1) szerint egyenesen arányos a mutató nullpont állásaihoz tartozó  $\Delta s$  leolvasás-különbséggel.

A mérőrugó feszítő csavarjának két szélső helyzete bizonyos  $\Delta g$  nehézségi gyorsulás tartománynak felel meg. Ha a mérendő nehézségi gyorsulás változása ezen a tartományon kívül esik, akkor az 5. ábrán látható mérési határt állító, vagy "reset" csavarral tudjuk a mérési tartományt a kisebb vagy a nagyobb  $g$  értékek felé eltolni. Egyes műszereken az eltolás mértéke a csavar beosztásáról leolvasható, de csak a mérésnél kisebb megbízhatósággal.

Említettük, hogy az egyes műszerek mérőszervét általában a hőmérsékletváltozásokra kevésbé érzékeny anyagokból (pl. kvarcból) készítik és az egészet jól hőszigetelt edénybe, ún. termosztátba helyezik. Sajnos a gondos hőszigetelés ellenére is többé-kevésbé minden graviméter érzékeny a hőmérsékletváltozásokra, ezért a mérések közben óvni kell a műszert minden nagyobb hőmérsékletváltozástól. Ezt a továbbiakban feltételnek tekintjük.

Ennek ellenére, ha az ugyanazon helyen felállított graviméterrel hosszabb időn keresztül méréseket végzünk, akkor azt tapasztaljuk, hogy a leolvasások az idővel többé-kevésbé folyamatosan változnak. Ennek oka egyrészt a nehézségi erőter rövidperiódusú időbeli változása (a luniszoláris hatás), másrészt a műszer mérőszerkezetében bekövetkező lassú lefolyású parányi változások. Ezek lehetnek pl. egészen csekély hőmérsékleti, légnyomás stb. hatások, de leginkább az anyag szerkezetében lefolyó molekuláris változások, a rugók parányi maradandó alakváltozásai. Ezek hatására a graviméter leolvasása akkor is folytonosan (sőt esetleg ugrásszerűen is) változna, ha a nehézségi erő az időben teljesen állandó lenne. Az ennek megfelelő változás az ún. *műszerjárás*, vagy *drift*.

A műszerjárás minden nagyérzékenységű graviméternek egyelőre elkerülhetetlen velejárója. A műszergyárak igyekeznek ezt a lehető legkisebb mértékre szorítani és a lehető legegyszerűsebbé tenni. Jó műszereknél a drift értéke naponta nem több néhány-szor  $10^{-6} m/s^2$  értéknél. A műszerjárás mértékét és egyenletességét a graviméteres mérések során állandóan figyelemmel kell kísérni. Terepi méréseknél ezt a pontok ismételt többszöri mérésével határozzuk meg. A műszerjárás szabályosságát gondos kezeléssel lehet elősegíteni.

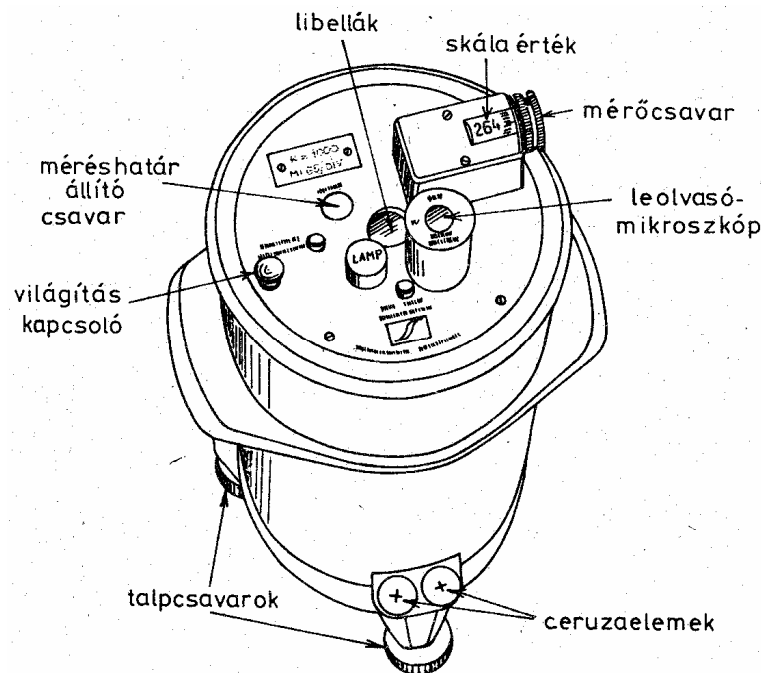
## A graviméteres mérések

A graviméteres mérés *tervezéssel* kezdődik. Ekkor a mérés célja szerint meghatározzuk az észlelési pontok átlagos távolságát. Ennek megfelelően végezhetünk felderítő-, átnézetes-, részlet- és ún. mikroméréseket. A különböző mérések között a mérések kivitelezése szempontjából csak az a különbség, hogy a mérési pontok távolsága – vagy más néven a mintavételi távolság – nem azonos. A jövő graviméteres mérései hazánkban részlet- és mikromérések lesznek, mivel Magyarország területét *felderítő- és átnézetes-mérések* szempontjából felmértnek tekinthetjük (*km*-enként legalább 1 mérési pont található). A *részletmérések* pontsűrűsége kb.  $4 - 16$  mérési pont  $km^2$ -enként, *mikroméréseknél* pedig kb.  $100 - 1600$  mérési pont/ $km^2$ . A terepi graviméteres méréseket az országos gravitációs alaphálózatnak a mérési területhez legközelebb eső pontjához, vagy pontjaihoz kapcsoljuk.

A tényleges mérést a geodéta csoport kezdi. A geodéták feladata a mérési pontok helyszíni kijelölése, bemérése, térképi ábrázolása, pontleírás készítése; a pont tengerszint feletti magasságának meghatározása, továbbá szükség esetén a környező terep topográfiajának felmérése. A mérési pontok magasságát és földrajzi koordinátáit a graviméteres mérések megbízhatóságának megfelelő pontossággal kell meghatározni.  $3\text{ cm}$  magasságkülönbség, illetve a földrajzi szélességben kb.  $10\text{ m}$  távolságkülönbség a nehézségi gyorsulásban egyaránt mintegy  $10^{-7} m/s^2$  változást okoz, márpedig a modern műszerek közel ekkora pontosságú nehézségi gyorsulás méréseket tesznek lehetővé. A megfelelő mi-

nőségű geodéziai előkészítettség a nehézségi gyorsulás mérések számára nélkülözhetetlen.

Az adott terület graviméteres felméréseinek megkezdése előtt – amennyiben szükséges – a méréshatárt állító "reset" csavarral át kell állítani a graviméter mérési tartományát a várható legkisebb és legnagyobb nehézségi gyorsulás értékének megfelelően. A beállításakor figyelembe kell venni a földrajzi szélesség változást (a felméréendő terület  $E-D$  irányú kiterjedését), valamint az adott területen előforduló magasságkülönbségeket. A mérések megkezdése előtt el kell végezni még bizonyos műszerellenőrző méréseket is, amelyeket az adott graviméter mérési utasítása ír elő. Időnként ellenőrizni kell a graviméterek  $c$  szorzójának értékét is.



6. ábra. Sharpe graviméter kezelőszervei

A korszerű terepi műszerekkel (Sharpe, Worden stb.) az észlelés igen egyszerű. A gravimétert leállítjuk vagy a talajra, - vagy ha van, akkor feltesszük a mérőállványra. Ezt követően a libella- és a skálavilágítás bekapcsolása után a műszert a talpcsavarok segítségével gondosan függőlegessé tesszük; először az ún. keresztlibellát, majd a hosszlibellát állítjuk be. (Megjegyezzük, hogy ha a gravimétert a lengő tengelyére merőleges síkban  $\alpha$  szöggel megdöntjük, akkor a teljes  $g$  érték helyett ennek csak  $g \cos \alpha$  részét mérjük!) A függőlegessé tétel után rövid idővel kellőképpen lecsillapodik a műszer lengő szerkezete. Ekkor betekintve az 6. ábrán látható leolvasó-mikroszkópba, a mérőcsavart addig forgatjuk, amíg a mikroszkópban látható világos szál rá nem áll a skálabeosztás nulla vonására. Ezt követően kell leolvasni a mérőcsavar állásához tartozó beosztás értékét. A fénymutató nullázását és a mérőcsavar-beosztások értékének leolvasását néhányszor megismételjük és a leolvasások átlagát fogadjuk el a mérés eredményének. A mérési jegyzőkönyvbe a műszerleolvasásokon kívül a mérés időpontját is rögzíteni kell.



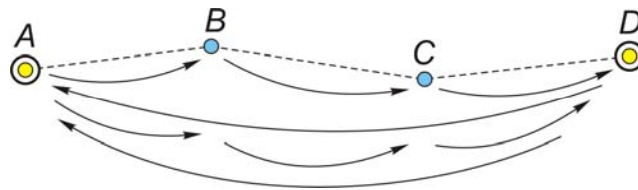
A graviméteres méréseket általában ismert alappontból kiindulva, vagy ismert alappontok között végezzük. A mérési elrendezés és a mérési sorrend mindig az adott feladat jellegétől függ, azonban a méréseket mindig úgy kell kialakítani, hogy ezek feldolgozhatók legyenek. Ennek megfelelően a mérések során minden esetben célszerű visszamérni a kiindulási állomásra, hogy a műszerjárást (a drift-javítást) a mérés idejére ki tudjuk számítani. Mindezt egy klasszikus feladat megoldásán próbáljuk szemléltetni.

Vizsgáljuk meg pl. a 7. ábrán látható mérési kapcsolatot, ahol két ismert nehézségi gyorsulás értékű  $A$  és  $D$  alaphálózati pont között akarjuk meghatározni a  $g$  értékét a  $B$  és a  $C$  jelű pontban. Ekkor a legcélszerűbb mérési sorrend az:

$$A - B - C - D - A - B - C - D - A ,$$

de a pontokat egyenként is összemérhetjük; ekkor a mérési sorrend:

$$\begin{aligned} &A - B - A - B - A , \\ &B - C - B - C - B , \\ &C - D - C - D - C . \end{aligned}$$



7. ábra. Graviméteres mérési sorrend



8. ábra. Graviméteres mérések az ELGI-BME makádi mérésein 2007-ben LCR graviméterekkel.

Célszerű tehát olyan mérési rendszer szerint dolgozni, hogy legalább egyszer sorra végigmérjük valamennyi pontot, majd visszamegyünk a kiindulási pontra és a mérési sorozatot itt zárjuk. A soron következő hálózatrésznél vagy mérési vonalnál a munkarend ugyanez. A különböző vizsgálatok szerint a korszerű graviméterek esetében a műszerek járásgörbéje legfeljebb 1.5 órában időközben tekinthető lineárisnak, ezért kb. másfél órán belül mindig célszerű visszamérni a kiindulási pontra. Ez szabja meg az ugyanazon mérési kapcsolatba bevonható állomások számának felső határát.

Fokozott pontossági igények esetén az adott mérési kapcsolatot egyszerre több műszerrel szokták mérni (8. ábra).

Tengeri és légi nehézségi gyorsulás mérésekre a hagyományos terepi graviméterek nem alkalmasak. Erre a célra különleges műszereket fejlesztettek ki.

## A graviméteres mérések feldolgozása

A graviméteres mérések feldolgozása két lépésben történik. Először a mérések alapján kiszámítjuk a  $g$  értékét az egyes földfelszíni pontokban, majd ezt követően meghatározzuk a különféle nehézségi rendellenességeket és megszerkesztjük a szükséges anomália-térképeket.

Egyelőre csak az első lépéssel foglalkozunk, a nehézségi rendellenességek meghatározásáról a későbbiekben lesz szó.

A földfelszíni nehézségi gyorsulás értékek kiszámításához először képezzük az azonos mérési pontokon ugyanazon műszerállásban feljegyzett a műszerleolvasások  $\bar{s}$  középértékét.

Ezt követően valamennyi  $\bar{s}$  értéket megszorozzuk az adott műszer  $c$  szorzójával, azaz meghatározzuk a  $mGal$ -ra (vagy a  $m/s^2$ -re) átszámított műszerleolvasásokat.

A következő lépésben minden egyes mérés helyére és időpontjára ki kell számítani a  $\delta g_A$  árapály javítás értékét és ezt le kell vonni a  $c\bar{s}$  átszámított műszerleolvasásokból. Ekkor az ún. *nyers értékeket* kapjuk:

$$s' = c\bar{s} - \delta g_A$$

Az árapály javításokat kétféle úton számíthatjuk: vagy DOODSON módszerével, vagy a Hold és a Nap csillagászati koordinátáinak ismeretében. A Nap és a Hold helyzetétől függő luniszoláris hatás durva közelítéssel:

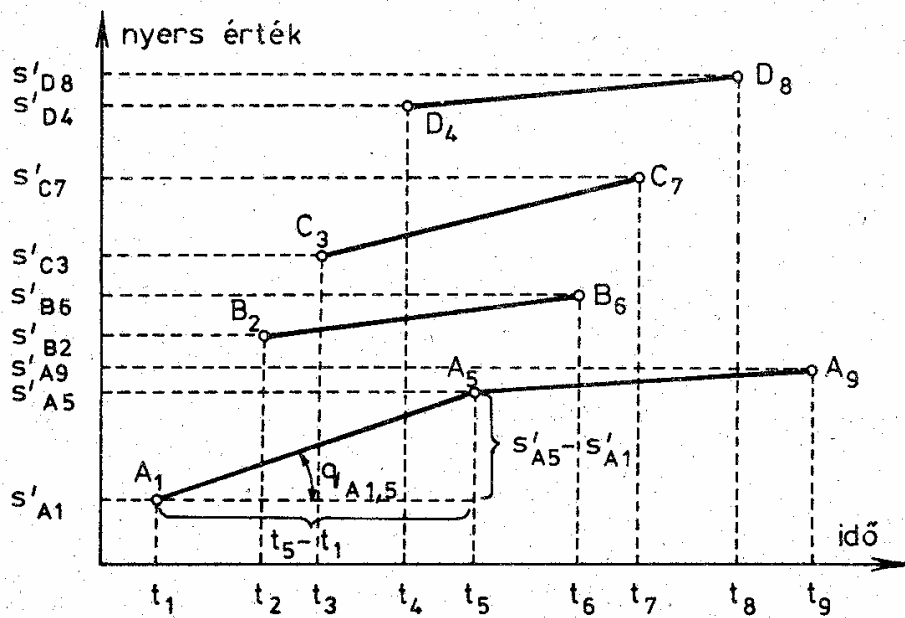
$$\delta g_A = -kM_H \frac{R}{r_H^3} (3 \cos^2 \zeta_H - 1) - kM_N \frac{R}{r_N^3} (3 \cos^2 \zeta_N - 1)$$

ahol  $k$  a gravitációs állandó,  $R$  a merevnek tekintett Föld sugara,  $M_H$  és  $M_N$  a Hold, illetve a Nap tömege,  $r_H$  és  $r_N$  a Hold, illetve a Nap Földtől mért távolsága, a  $\zeta_H$  és  $\zeta_N$  szögek pedig a Föld forgásával, illetve a Hold-Föld és a Nap-Föld relatív helyzetének változásával együtt változnak. Behelyettesítve az égitestek ismert adatait:

$$\delta g_A = -0.550(3 \cos^2 \zeta_H - 1) - 0.253(3 \cos^2 \zeta_N - 1) \quad [10^{-6} m/s^2]$$

Az ugyanazon mérési pontra számított  $s'$  nyers értékek már csak a mérési hibák és a műszerjárás miatt különböznek egymástól. A mérési hibákból származó ellentmondásokat kiegyenlítéssel lehet feloldani; előtte azonban célszerű a *műszerjárást* külön számítással meghatározni.

Feltételezzük, hogy a műszer járása a  $t$  idő függvényében folytonos görbével ábrázolható, amit *járásgörbének* nevezünk. A járásgörbe legegyszerűbben az ún. *iránytangens módszerrel* határozható meg. Ehhez először megszerkesztjük az adott graviméterrel végigmért pontkapcsolat ún. *menetgörbéit*, ami abból áll, hogy az idő függvényében felrakjuk az  $s'$  nyers értékeket és az azonos mérési állomásokhoz tartozó pontokat egyenes vonalakkal összekötjük. Mindezt a korábbi példánkon szemléltetjük: a 7. ábrán bemutatott mérési pontkapcsolat lehetséges menetgörbéi a 9. ábrán láthatók.



9. ábra. Menetgörbe szerkesztése

Ezt követően meghatározzuk az egyes menetgörbe szakaszok meredekségét, a  $q$  iránytangensek értékét:

$$q_{A_1-5} = \frac{s'_{A_5} - s'_{A_1}}{t_5 - t_1}$$

$$q_{B_2-6} = \frac{s'_{B_6} - s'_{B_2}}{t_6 - t_2}$$

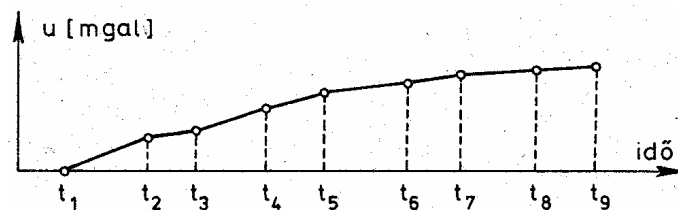
⋮

$$q_{A_5-9} = \frac{s'_{A_9} - s'_{A_5}}{t_9 - t_5}$$

majd az egyes  $t_i$  mérési időpontokhoz kiszámítjuk a járásgörbe  $u_i$  pontjait. A mérés kezdetén, vagyis a  $t_1$  időpontban a járásgörbe értékét nullának választjuk ( $u_1 = 0$ ); majd sorra a többi időpontban mindig a járásgörbe megelőző pontjának értékéhez hozzáadjuk a következő időintervallum hosszának és az ehhez tartozó iránytangensek középértékének szorzatát:

$$\begin{aligned}
 \text{a } t_1 \text{ időpontban:} & \quad u_1 = 0 , \\
 \text{a } t_2 \text{ időpontban:} & \quad u_2 = u_1 + q_{A_{1-5}}(t_2 - t_1) , \\
 \text{a } t_3 \text{ időpontban:} & \quad u_3 = u_2 + \frac{q_{A_{1-5}} + q_{B_{2-6}}}{2}(t_3 - t_2) , \\
 \text{a } t_4 \text{ időpontban:} & \quad u_4 = u_3 + \frac{q_{A_{1-5}} + q_{B_{2-6}} + q_{C_{3-7}}}{3}(t_4 - t_3) , \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 & \quad \cdot \\
 \text{a } t_8 \text{ időpontban:} & \quad u_8 = u_7 + \frac{q_{A_{5-9}} + q_{D_{4-8}}}{2}(t_8 - t_7) , \\
 \text{a } t_9 \text{ időpontban:} & \quad u_9 = u_8 + q_{A_{5-9}}(t_9 - t_8) .
 \end{aligned}$$

Az  $u_1, u_2, \dots, u_n$  értékeket koordináta-rendszerben ábrázolva az adott graviméter járásgörbét kapjuk (amelyet a példánk esetében a 10. ábrán láthatunk).



10. ábra. Graviméter járásgörbéje

Ha az így kiszámított  $u_i$  műszerjárás értékeket sorra levonjuk a megfelelő  $s'$  nyers értékekből, akkor az ún. javított nyers értékeket kapjuk:

$$s''_i = s'_i - u_i$$

Az időben egymás után következő  $s''$  értékek különbségei az egyes mérési pontok közötti javított nyers nehézségi gyorsulás különbségeket adják:

$$\Delta g_{i-1,i} = s''_i - s''_{i-1}$$

A példánkban tehát:

$$\begin{aligned}\Delta g_{AB} &= s''_{B2} - s''_{A1} \\ \Delta g_{BC} &= s''_{C3} - s''_{B2} \\ &\vdots \\ \Delta g_{DA} &= s''_{D8} - s''_{A9} .\end{aligned}$$

Ezek után már csak az maradt hátra, hogy az alappontok ismert nehézségi gyorsulás értékei alapján, valamint a meghatározott  $\Delta g$  javított nyers nehézségi gyorsulás különbségek felhasználásával kiszámítsuk a meghatározandó pontok ismeretlen nehézségi gyorsulás értékeit. Mivel általában több mérést végzünk, mint ahány ismeretlen nehézségi gyorsulás értékünk van, az ismeretlenek legvalószínűbb értékét kiegyenlítéssel határozhatjuk meg.

A közvetítő-egyenletek általános alakja (pl. az A és a B pont között) :

$$\Delta g_{AB} = g_B - g_A .$$

Figyelembe véve azonban, hogy a  $\Delta g_{AB}$  mennyiségeket mérési hibák terhelik, ezekhez  $v_{AB}$  javítást rendelhetünk. Ha a  $g_A$  és a  $g_B$  nehézségi gyorsulásra  $g_{A_0}$  és  $g_{B_0}$  előzetes értéket veszünk fel, akkor a közvetítő-egyenletek alakja:

$$\Delta g_{AB} + v_{AB} = (g_{B_0} + \delta g_B) - (g_{A_0} + \delta g_A)$$

ahol  $\delta g_A$  és  $\delta g_B$  az előzetes  $g$  értékek kiegyenlítéssel meghatározandó változása.

Ha az ismert  $g$  értékű kezdőponthoz sorra hozzáadjuk a hálózatban mért  $\Delta g$  javított nyers értékeket, akkor az összeg általában nem fog megegyezni a másik végpont ismert  $g$  értékével. Ennek az a fő oka, hogy a graviméter  $c$  műszerszoróját (ennek előzetesen meghatározott értékét) is hiba terheli. Ez az egyes mérési eredményekben szabályos hiba formájában jelentkezik, ezért a graviméter műszerszorójához is rendelhetünk javítást. A  $c$  műszerszoró javítását *léptékegyűthetónak* nevezzük és  $Y$ -nal jelöljük. Ezzel a közvetítő-egyenletek:

$$(1 + Y)(\Delta g_{AB} + v_{AB}) = (g_{B_0} + \delta g_B) - (g_{A_0} + \delta g_A) .$$

Végül ezen közvetítő-egyenletek javításra kifejezett alakja:

$$v_{AB} = -\delta g_A + \delta g_B - \Delta g_{AB} Y + \ell_{AB}$$

ahol az  $\ell_{AB}$  tisztatag értéke:

$$\ell_{AB} = -g_{A_0} + g_{B_0} - \Delta g_{AB} .$$

A feladat kiegyenlítése az ismert eljárások szerint történik. Ha a kiegyenlítés során meghatároztuk a  $\delta g$  megváltozásokat, akkor az egyes mérési pontokon már egyszerűen kiszámíthatjuk a keresett nehézségi gyorsulás értékeket:

$$g_A = g_{A_0} + \delta g_A$$

$$g_B = g_{B_0} + \delta g_B$$

⋮

A graviméteres mérések feldolgozását nagy számítási igényessége miatt elektronikus számítógépekkel végezzük.

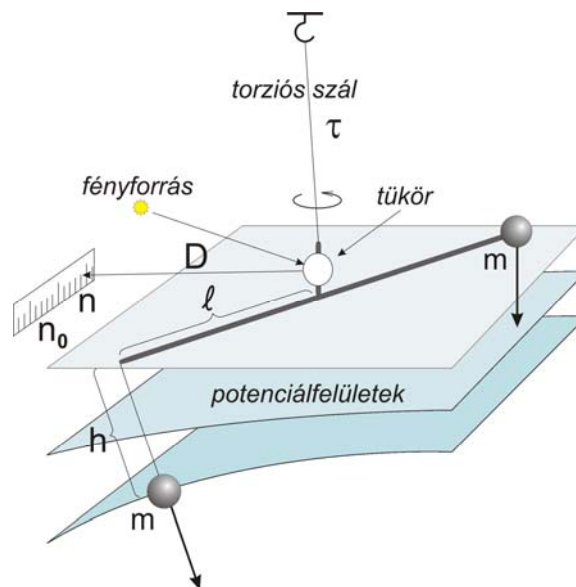
## A nehézségi erő gradienseinek mérése

A nehézségi erő gradiensei a nehézségi gyorsulás két pont közötti megváltozását jellemzik. A gradiensek mérésére elsőként EÖTVÖS Lóránd fejlesztett ki igen pontos műszert; és ezzel a terepi gravitációs méréseken keresztül megalapozta a jelenlegi geofizikát. Az Eötvös-ingával bizonyos irányokban  $1m$ -es távolságon  $10^{-9} m/s^2 = 1E$  ( $1E$ ötvös) nagyságú nehézségi gyorsulás-változást is ki lehet mutatni.

Napjainkban már a GOCE műholdon is működik gradiométer, ennek mérési pontossága:  $10^{-11} m/s^2 = 0.01E$  (Eötvös egység).

## Az Eötvös-inga

Az Eötvös-féle torziós inga, – vagy EÖTVÖS elnevezésével a nehézségi variométer lényeges része a  $0.04$ – $0.02$   $mm$  átmérőjű vékony rugalmas fémszálon függő vízszintes ingarúd, amelynek két végén egyenlő nagyságú tömegek vannak elhelyezve. Az egyik tömeg azonban nem közvetlenül a vízszintes ingarúdon van, hanem a *11. ábrán* látható módon ennek végén  $h$  mélységben vékony szálon függ.



11. ábra. Az Eötvös-inga működésének alapelve

Az Eötvös-inga rúdja egyrészt a nehézségi erőter térbeli változásából származó forgatónyomaték, másrészt ezzel ellentétes értelemben a felfüggesztő szál csavarási nyomatéka hat. Egyensúly esetében a két ellentétes irányú forgatónyomaték egyenlő egymással. Ez teszi lehetővé a nehézségi erőter forgatónyomatékának összehasonlítását a felfüggesztő szál csavarási nyomatékával és így a nehézségi erőter változását jellemző mennyiségek meghatározását.

Levezethető, hogy a forgatónyomatékok egyensúlya esetén:

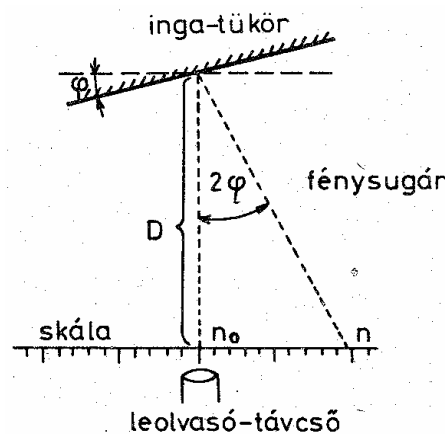
$$-\tau\varphi = K\left(W_{\Delta}\frac{\sin 2\alpha}{2} + 2W_{xy}\frac{\cos 2\alpha}{2}\right) + hlm(W_{zy}\cos\alpha - W_{zx}\sin\alpha),$$

ahol  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  a nívófelületi gradiens összetevői,  $W_{\Delta}$  és  $W_{xy}$  a görbületi mennyiségek,  $\alpha$  a műszer felállítási irányának azimutja,  $h$ ,  $l$  és  $m$  a 10. ábrán látható mennyiségek,  $K$  az inga tehetetlenségi nyomatéka,  $t$  a felfüggesztő szál csavarási állandója,  $\varphi$  pedig az ingarúd nyugalmi helyzetétől mért elfordulásának szöge. Az ingarúd  $\varphi$  elfordulási szöge helyett vizuális leolvasás esetén a 12. ábrán látható  $n$  beosztásértéket olvassuk le, így:

$$\varphi = \frac{n - n_0}{2D}$$

ahol  $n_0$  az inga nyugalmi helyzetének megfelelő beosztásérték,  $D$  pedig a skála és az ingarúddal rögzített tükör távolsága. Ezek figyelembevételével az Eötvös-inga egyenlete:

$$n - n_0 = \frac{DK}{\tau}(W_{\Delta}\sin 2\alpha + 2W_{xy}\cos 2\alpha) + \frac{2Dhlm}{\tau}(W_{zy}\cos\alpha - W_{zx}\sin\alpha). \quad (2)$$

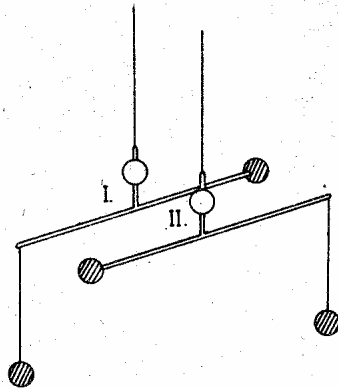


12. ábra. Az elfordulás és a skálaérték közötti kapcsolat

Amennyiben ismerjük a műszer  $D$ ,  $K$ ,  $t$ ,  $h$ ,  $l$  és  $m$  állandóit, akkor az ingarúd helyzetét jellemző  $n$  skálaleolvasás az  $n_0$ ,  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$ ,  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  öt ismeretlen mennyiség függvényeként fogható fel. Ahhoz tehát, hogy a torziós szál  $n_0$  csavarásmentes helyzete

tét, valamint az illető mérési pontban a nehézségi erőter megváltozását jellemző fenti potenciálderiváltakat egyértelműen meghatározhatjuk, 5 mérés szükséges; azaz ugyanazon mérési ponton legalább 5 különböző  $\alpha$  azimutban kell mérni az ingával. Ez az első ingák esetében valóban így is volt, azonban rövidesen olyan műszereket szerkesztettek, amelyekbe egyszerre két ingát építettek be, egymáshoz képest  $180^\circ$ -kal elfordítva (13. ábra). Ekkor természetesen újabb ismeretlen mennyiség lép fel: ez a másik inga  $n'_0$  csavarásmentes állapota. Ezzel a kettős ingával három különböző  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  azimutban mérve az  $n_1, n_2, n_3, n'_1, n'_2, n'_3$  leolvasások alapján a hat ismeretlen: az  $n_0, n'_0$ , valamint a keresett  $W_{zx}$  és  $W_{zy}$  gradiensek, és a  $W_{\Delta}, W_{xy}$  görbületi mennyiségek egyértelműen meghatározhatók.

A gyakorlatban az Eötvös-Rybár-féle torziós (Auterbal) és az E54 ingák terjedtek el, amelyek automatikusan fotoregisztrálással működnek, és így az észlelőnek nem kell a méréskor a műszer mellett tartózkodnia.



13. ábra. A kettős-inga elrendezése

## Terepmérések az Eötvös-ingával

Régebben az Eötvös-inga a kőolajkutató legfontosabb műszere volt. Jelenleg a korszerű graviméterek mellett az Eötvös-ingát ritkábban és csak különleges feladatok megoldására használják. Ilyen feladatok pl. a geodéziában a függővonal-elhajlás interpoláció, vagy a geoid finomszerkezetének meghatározása.

Az Eötvös-ingával mérendő pontokat vagy szelvény mentén, vagy pedig hálózatos formában háromszögek, esetleg négyszögek szerint telepítik. A mérési pontok távolsága a megoldandó feladattól függően néhány métertől néhány *km*-ig terjedhet. Az Eötvös-inga lényegesen érzékenyebb a felszíni sűrűségeloszlásra, mint a graviméterek, ezért elsősorban sík, vagy csak enyhén dombos területek alkalmasak ilyen mérésekre.

A méréseket ebben az esetben is a geodéta csoport és az Eötvös-ingával dolgozó csoport együttesen végzi.

A mérési pontok kijelölésekor arra kell ügyelni, hogy a közlekedési utaktól legalább 40-50 m távolságra legyenek, közvetlen környezetük lehetőleg vízszintes sík terep



legyen, továbbá különleges terepi egyenetlenségek (árkok, töltések, épületek stb.) ne legyenek a közelben.

A közvetlen környezetben levő tömegek hatása számításának céljára a mérési pont környezetében szintezést kell végezni. A szintezést szimmetrikusan 8 irányban, a mérési ponttól számítva a következő távolságokban szokás elvégezni:  $0.6m$ ,  $1m$ ,  $1.5m$ ,  $2m$ ,  $3m$ ,  $5m$ ,  $10m$ ,  $20m$ ,  $50m$ , esetleg nagyobb terepi egyenetlenségek esetében  $70m$ , és  $100m$ . Célszerű a mérési pont közvetlen környezetében, kb.  $3m$  átmérőjű körben a talajt el-egyengetni.

Az Eötvös-ingát kezelő csoport az előre kijelölt ponton ajtájával észak felé felállítja a műszert védő sátrat, vagy észlelő-házat (14. ábra), a műszert felteszi a műszerlábra és a talpcsavarok segítségével függőlegessé teszi, majd felhúzza az önműködő forgatószerkezetet és az ingát az északi kezdőállásba állítja. Ezután automatikus fotoregisztrálás esetén behelyezi a fényérzékeny fotólemezt, kioldja az ingát, majd megindítja az önműködő vezérlő szerkezetet és a műszert magára hagyja. Ezt követően a műszeres csoport átmehet a soron következő mérési pontokra és további ingákat helyezhet üzembe; majd visszatér az első mérési állomásra – ahol a műszer a mérést időközben már befejezte – és az ingát leszereli. Egyetlen pont mérése kb. 5-6 órát vesz igénybe.



14. ábra. E54 inga az ELGI-BME makádi mérésein 2007-ben.

### Az Eötvös-inga mérések feldolgozása

Az Eötvös-ingával meghatározott  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  gradiensek, és a  $W_{\Delta}$ ,  $W_{xy}$  görbületi adatok nyers értékek, amelyek a további felhasználás és értelmezés miatt különböző javításokra szorulnak; ugyanis még mindenféle zavaró hatást magukban foglalnak.

Elsősorban a mérési pont közvetlen (0-100m) környezetében látható felszíni tömegegyenletlenségek hatása, az ún. *térszínhatás* miatt kell javítást alkalmazni; de nem szabad figyelmen kívül hagyni a távolabbi felszíni tömegek hatását, az ún. *térképhatást* sem.

A térszínhatás, vagy más néven terephatás számítására olyan összefüggéseket vezettek le, amelyekbe a közvetlen környezet szintezésének adatait kell behelyettesíteni. A térképhatás ugyanezen összefüggések felhasználásával számítható, azonban a magasságokat topográfiai térkép szintvonalai alapján, a távolságokat pedig a térkép méretaránya szerint állapítjuk meg. A térszínhatás a  $W_{\Delta}$  és a  $W_{xy}$  görbületi adatokra lényegesen nagyobb, mint a  $W_{zx}$  és a  $W_{zy}$  gradiensekre.

Ha a szintezési adatokból számított térszínhatást kivonjuk az Eötvös-ingával mért teljes, nyers értékekből, akkor EÖTVÖS elnevezésével az ún. *topografikus értékeket* kapjuk.

Ha a topografikus értékekből kivonjuk a normális (szélességi) hatást, akkor viszont a *topografikus rendellenességek* adódnak. A *normális hatás* a nehézségi gyorsulás normálképletének megfelelő deriváltjaiból származtatható. A  $\sin^2 2\varphi$  tag elhagyásával a normális hatás:

$$\begin{aligned}U_{zx} &= 8.12 \sin 2\varphi [E] \\U_{\Delta} &= 10.26 \cos^2 \varphi [E] \\U_{zy} &= 0 \\U_{xy} &= 0\end{aligned}$$

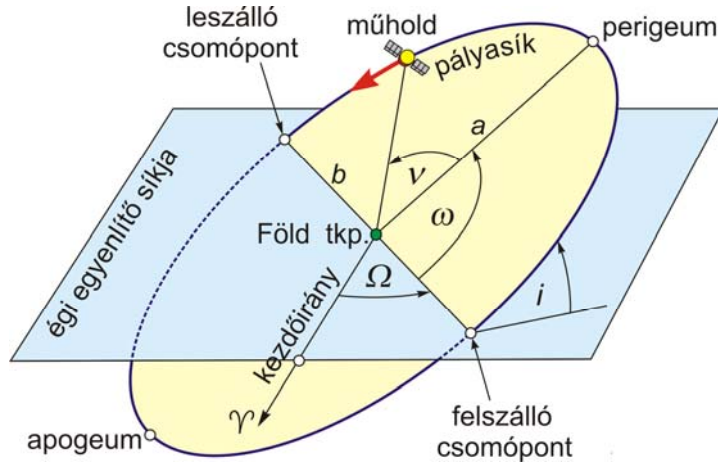
Ha a topografikus rendellenességet a térképhatással is megjavítjuk, akkor a *felszínalatti rendellenességet* (EÖTVÖS elnevezésével szubterrén rendellenességet) kapjuk.

A gradiensek és a görbületi adatok felszínalatti rendellenességei térképen is ábrázolhatók. Ezekből igen hasznos következtetések vonhatók le a kéreg szerkezeti viszonyaira. – Sok esetben azonban inkább izoanomália térképeket szerkesztenek, mivel ezek jobb áttekinthetést adnak egy-egy terület földtani viszonyairól.

Az elmúlt évtizedekben Magyarország síkvidéki területeinek igen nagy részét mérték fel Eötvös-ingával. A nyersanyagkutatás céljaira azonban elsősorban a  $W_{zx}$ ,  $W_{zy}$  gradiens-értékeket dolgozták fel; a  $W_{\Delta}$  és a  $W_{xy}$  görbületi adatok javarészből felhasználatlanul maradtak. A jövőben várhatóan sor kerül a görbületi adatok feldolgozására is, a függővonalelhajlás adatok sűrítése céljából.

## **A gravitációs anomáliák meghatározása mesterséges holdak segítségével**

A Föld közelében mozgó égitestek pályáját elsősorban a Föld gravitációs erőtere szabja meg, így az égitestek mozgását megfigyelve következtetni lehet a gravitációs erőter szerkezetére, azaz meghatározhatók a gravitációs rendellenességek.



15. ábra. Mesterséges holdak pályaelemei

Gömbszimmetrikus tömeg gravitációs erőterében mozgó mesterséges holdak pályája – mindennemű zavaró hatástól mentes esetben – térben állandó helyzetű ellipszis. Ez azt jelenti, hogy a 15. ábrán látható Kepler-féle hat pályaelem közül öt (az  $a$  fél nagytengely, az  $e^2$  első numerikus excentricitás négyzete, a felszálló csomópont  $\Omega$  rektaszcenziója, a perigeum  $\omega$  szöge és az  $i$  pályahajlás, vagy inklináció) időben állandó, és csak az égitest pillanatnyi helyzetét jellemző  $\nu$  szög, az ún. középanómália változik. Mivel a Föld erőtere nem gömbszimmetrikus, a körülötte keringő mesterséges holdak pályája a térben nem állandó helyzetű ellipszis, hanem bonyolult térgörbe lesz. A Föld erőterében azonban a gömbszimmetrikus rész az uralkodó, ezért a pálya jellemzésére megtarthatjuk a Kepler-féle pályaelemeket, megadva ezek adott időpontra (epochára) vonatkozó értékét és időbeli változásuk mértékét.

A Föld tömegvonzási erőterének nem gömbszimmetrikus részét a potenciálfüggvényből egyszerűen kiszámíthatjuk:

$$\begin{aligned}
 V' &= V - \frac{kM}{r} = \\
 &= -\frac{kM}{r} \left[ \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^n J_n P_n(\sin \psi) - \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \right] \quad (3)
 \end{aligned}$$

illetve ha a zonális és a tesszerális tagokat nem választjuk külön, akkor ez a

$$V' = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \quad (4)$$

alakban is írható. Ez tulajdonképpen az a "zavarfüggvény", ami hatására a térben és időben állandó helyzetű és méretű Kepler-féle pályaellipszis helyett a bonyolult, ún. perturbált pálya alakul ki. A zavarfüggvény hatására létrejövő pályaelem perturbációkat

(az egyes pályaelemek időbeli változását) a *planetáris Lagrange-egyenletek* írják le. A Lagrange-féle differenciálegyenletek megoldásával arra az eredményre jutunk, hogy az egyes pályaelem-változások kifejezhetők a  $C_{nm}$  és az  $S_{nm}$  együtthatók függvényeként:

$$\begin{aligned}\dot{\Omega} &= \frac{d\Omega}{dt} = f_{\Omega}(C_{nm}, S_{nm}) \\ \dot{\omega} &= \frac{d\omega}{dt} = f_{\omega}(C_{nm}, S_{nm}) \\ \dot{i} &= \frac{di}{dt} = f_i(C_{nm}, S_{nm}) \\ &\vdots\end{aligned}$$

Mivel a pályaelem változások empirikus úton meghatározhatók, ezekből a  $C_{nm}$  és az  $S_{nm}$  együtthatók kiszámíthatók. Ha sok égitest mozgását figyeljük meg a Föld különböző helyein, akkor a  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  értékek meghatározásakor kiegyenlítési lehetőségünk is van.

A  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  együtthatók ismeretében viszont nem csak az (3) illetve az (4) "zavarfüggvény" írható fel, hanem a potenciálzavar is:

$$T = W - U = \frac{kM}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n^*} \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \quad (5)$$

ahol a \* azt jelenti, hogy a szummázásból ki kell hagyni bizonyos tagokat, amelyek a valódi nehézségi erőter  $W$  potenciáljának gömbfüggvény sorában és az  $U$  normálpotenciál sorában egyaránt szerepelnek. Végül a potenciálzavar függvényének ismeretében a fizikai geodézia alap differenciálegyenletének felhasználásával:

$$\Delta g = -\left(\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{2T}{r}\right) \quad (6)$$

ahol a  $\Delta g$  a geoid és az ellipszoid egymásnak megfelelő pontjaiban levő valódi, illetve normál nehézségi gyorsulás értékek különbsége. Az (5) felhasználásával elvégezve az (6)-ban kijelölt műveleteket:

$$\Delta g = -\frac{kM}{r^2} \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n^*} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \quad (7)$$

vagy másképpen írva:

$$\Delta g = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^{n^*} (A_{nm} \cos m\lambda + B_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \psi) \quad (8)$$

Az (7) és az (8) összehasonlításával megkaphatjuk a potenciál gömbfüggvény sorában szereplő  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  harmonikus együtthatók és a gravitációs anomáliák (8) sorában szereplő  $A_{nm}$  és  $B_{nm}$  harmonikus együtthatók kapcsolatát:

$$\begin{bmatrix} A_{nm} \\ B_{nm} \end{bmatrix} = -\frac{km}{r^2} (n+1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \begin{bmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{bmatrix}.$$

A mesterséges holdakkal meghatározott  $C_{nm}$  és  $S_{nm}$  harmonikus együtthatók alapján tehát az (7) segítségével az egész Földre vonatkozólag kiszámíthatjuk a gravitációs anomáliákat. Mivel a gravitációs anomáliákon semmiféle javítást nem hajtunk végre, csupán azonos szintre, a geoidra redukáljuk, ezért az így nyert értékek *Faye-anomáliák*.