

Fizikai geodézia és gravimetria / 14.

GEOID MEGHATÁROZÁSÁNAK KOMBINÁLT MÓDSZEREI.

Az utóbbi évtizedekben új lehetőségekkel gazdagodott a geodézia eszköztára. A Föld mesterséges holdjai és a rájuk vonatkozó geodéziai megfigyelések (észlelések) több geodéziai feladat megoldásához nyitottak új utakat. Így, a geoid meghatározása is lehetségessé vált a mesterséges holdakra végzett mérések geodéziai felhasználásával. Ennek több megoldása is kialakult az eltelt viszonylag rövid idő alatt.

A szatellitageodézia geometriai alkalmazása

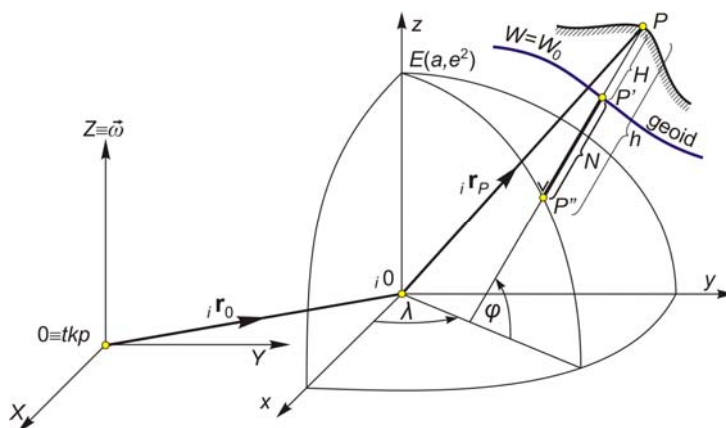
A szatellita-geodézia eredményeinek geometriai alkalmazásaként a geoid meghatározására azt az eljárást tekinthetjük, amely esetben a geoidot a földfelszíni pontok (megfelelő állomások) tetszőleges szatellita-geodéziai módszerrel meghatározott

$${}_i \mathbf{r}_P = \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \\ z_P \end{bmatrix}_i \stackrel{E(a, e^2)}{\Rightarrow} (\varphi, \lambda, h)_i \quad (1)$$

ellipszoidi földrajzi koordinátáiból úgy határozzuk meg, hogy a pontoknak a h ellipszoid feletti magasságából pl. szintezéssel meghatározott tengerszint feletti H magasságát levonjuk, azaz

$$N = h - H. \quad (2)$$

Így igen egyszerűen megkapjuk a (φ, λ, h) ellipszoidi földrajzi koordinátákkal adott ellipszoidi felületi normálison a geoidnak az ellipszoid feletti magasságát (1. ábra).



1. ábra. Geoidmeghatározás a szatellitageodéziai mérések felhasználásával

Az ily módon nyert geoid-ellipszoid távolság alapfelülete megegyezik az állomáskoordináták kiszámításának alapfelületével, ami a koordináta-meghatározás módja szerint általában önkényes vagy simuló elhelyezésű, ennek megfelelően az így meghatározott geoidmagasságok az i -edik helyzetű, $i0$ középpontú helyi ellipszoidra vonatkozó *relatív* értékek.

Dinamikai szatellitagedéziai módszerek alkalmazása

A Föld közelében mozgó égitestek pályáját a Föld nehézségi erőtere szabja meg, ezért az égitestek pályáját megfigyelve következtetni lehet a földi nehézségi erőter szerkezetére. Az égitestek mozgását a dinamika Newton-féle $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ alaptörvénye segítségével lehet leírni. Legegyszerűbb esetben az M tömegű, pontszerűnek tekinthető központi vonzó égitest körül (centrális erőterben) mozgó egységnyi (1 kg) tömegpont mozgására (ún. kéttest-problémára) alkalmazzuk ezt az alapösszefüggést, azzal a feltétellel, hogy a mozgás csak Newton-féle tömegvonzásból származó erőterben történik. Ez esetben a mozgó tömegpontra ható \mathbf{F} tömegvonzási erő hatásra fellépő gyorsulást az \mathbf{r} helyvektor időszerinti második deriváltjaként fejezhetjük ki, így a

$$\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial t^2} = \ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (3)$$

mozgásegyenletre jutunk. Ennek megoldásaként kapjuk az ismert eredményt, hogy az egységnyi tömegpont pályája kúpszelet, a Föld természetes és mesterséges holdjai esetében ellipszis, amelynek térbeli helyzetét, méretét és alakját a Kepler-féle pályaelemek: a felszálló csomópont Ω rektaszncenziója, a perigeum ω szöge, az i pályahajlás, a pályaelellipszis a_s, e_s paraméterei, és az égitest pillanatnyi helyzetét magadó v középanómália jellemzik.

A (3) másodrendű differenciálegyenletnek a kétszeri integrálása során adódó integrálási állandók, illetve ezekből levezetett állandó mennyiségekből következik, hogy centrális erőterben a tömegpont *térben és időben állandó méretű, alakú és helyzetű ellipszis* pályán mozog, más szóval a hat Kepler-féle pályaelem közül öt az időben állandó és csak az égitest pillanatnyi helyzetét magadó v középanómália változik.

Tudjuk azonban, hogy a Föld valóságos nehézségi erőtere az inhomogén sűrűségeloszlás miatt nem centrális erőter. Eltéréseit a centrális erőterétől a potenciál gömbfüggvény sorának zonális és tesszerális tagjai írják le. Ezt figyelembe véve a Föld valóságos nehézségi erőterében a (3) mozgásegyenlet az

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{kM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{grad} V(J_n, C_{nm}, S_{nm}, \mathbf{r}) \quad (4)$$

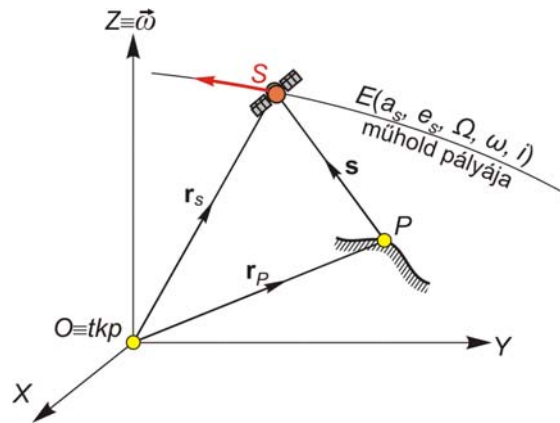
formában módosul. Ennek megoldása során már olyan Kepler-féle pályaelemeket kapunk, amelyek mindegyike az idő függvényeként változik. A Föld valóságos nehézségi erőterében mozgó tömegpont pályája tehát *bonyolult térgörbe, melynek elemi szakaszai időben változó méretű, alakú és helyzetű Kepler-féle ellipszis pályák elemi darabjainak tekinthetők*.

Tetszőleges Kepler-féle p_i pályaelem $\dot{p}_i = dp_i/dt$ időbeli változása tehát a földi nehézségi erőter nem centrális voltából következik. A p_i időbeli változása az erőternek a centrálistól való eltéréseit jellemző gömbfüggvény együtthatókkal hozható a

$$\dot{p}_i = \frac{dp_i}{dt} = \dot{p}_i(J_n, C_{nm}, S_{nm}) \quad (5)$$

alakú függvénykapcsolatba.

Ennek figyelembe vételével a mesterséges hold pillanatnyi pályaelemeit adott időpontra (pl. valamely észlelés időpontjára) úgy kapjuk meg, ha valamely korábbi időpontra megadott p_{i0} pályaelemekhez hozzáadjuk az eltelt időre eső megváltozásukat (ami viszont a nehézségi erőter szerkezetének függvénye). Az így kapott pillanatnyi pályaelemekből számíthatjuk az észlelés pillanatára a mesterséges hold \mathbf{r}_s geocentrikus helyvektorát.



2. ábra. Geoidmeghatározás satelit-geodézia dinamikai módszerével.

Valamely időpontban a mesterséges holdra végzett észlelések eredményeként kapott \mathbf{s} észlelési vektor nem más, mint a mesterséges hold \mathbf{r}_s , és az észlelési hely \mathbf{r}_p geocentrikus helyvektorának különbségvektora (2. ábra). Ennek megfelelően az \mathbf{s} észlelési vektor az előrejelzés időpontjára vonatkozó p_{i0} pályaelemek, a földi nehézségi erőter potenciálfüggvényének J_n, C_{nm}, S_{nm} együtthatói, az észlelés t időpontja és az $\mathbf{r}_p(X_p, Y_p, Z_p)$ állomáshelyzet

$$\mathbf{s} = \mathbf{r}_s - \mathbf{r}_p = \mathbf{s}(\Omega_0, \omega_0, i_0, a_{s0}, e_{s0}; J_n, C_{nm}, S_{nm}; t, \mathbf{r}_p) \quad (6)$$

függvényeként fejezhető ki.

Több mesterséges holdra rendszeresen végzett nagyszámú megfigyelés mindegyikére felírható egy-egy (6) alakú egyenlet, amely így közvetítő egyenletként szolgálhat a jobb oldalán szereplő mennyiségeknek az észlelések alapján végzendő meghatározásához. A nagyszámú észlelés alapján felállítható javítási egyenleteknek a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldásával az egyenletek számánál minden esetre kevesebb számú ismeretlen mennyiség meghatározható.

A satelit-geodézia dinamikai módszerének legáltalánosabb alkalmazásakor az ismeretlenek mindhárom csoportjára kereshetünk megoldást. Gyakran azonban szétválasztjuk őket és egy-egy csoportra felvett értékekkel csak a fennmaradó

ismeretleneket határozzuk meg, majd cserélve és fokozatos közeledéssel finomítjuk a teljes megoldást. Így végül megkapjuk a

- Kepler-féle pályaelemeket,
- a nehézségi erőteret leíró véges számú J_n, C_{nm}, S_{nm} együtthatót,
- az álláspont $\mathbf{r}_p(X_p, Y_p, Z_p)$ geocentrikus helyvektorát.

Ilyen módszerrel különböző n fokig és m rendig terjedő gömbfüggvény együtthatók számértéke valamint a pontok geocentrikus helyvektora is meghatározható az egész Földet beborító állomásokból álló hálózatra. Az ilyen értéksorozatot gyakran *földmodellnek* (az angol nyelvben *Earth Model* vagy *Standard Earth*) nevezik. A meghatározott gömbfüggvény együtthatók ismeretében számszerűen felírhatóvá válik a földi nehézségi erőter potenciálfüggvénye gömbfüggvény sorának véges számú tagja.

A Dinamikai szatellitageodéziai módszerek alkalmazásával nyert fenti mérési adatok ismeretében két lehetőségünk is van a geoid meghatározására.

1. Az egyik lehetőség szerint az álláspont \mathbf{r}_p geocentrikus helyvektorának ismeretében a (1) mintájára:

$$\mathbf{r}_p = \begin{bmatrix} X_p \\ Y_p \\ Z_p \end{bmatrix} \stackrel{E(a, e^2)}{\Rightarrow} (\varphi, \lambda, h), \quad (7)$$

előállítható az ellipszoid feletti h magasság, amelyet a (2)-be helyettesítve a kapjuk az N értékét. Ez viszont most nem relatív, hanem geocentrikus elhelyezésű ellipszoidra számított abszolút N érték.

2. A másik lehetőséget az N meghatározására a potenciálfüggvény gömbfüggvény sorában szereplő J_n, C_{nm}, S_{nm} együtthatók dinamikai módszerrel előállított értékei adják. Ezek, valamint a normál nehézségi erőter gömbfüggvény sorában szereplő J_{2n}^* együtthatók különbségét képezve, véges tagszámig felírható a $T = W - U$ potenciálzavar gömbfüggvény sora a

$$T_{p'} = -\frac{kM}{R} \left[\sum_{n=2}^k \delta J_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=2}^k \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \quad (8)$$

alakban, ahol

$$\left. \begin{aligned} \delta J_2 &= J_2 - J_2^* \\ \delta J_3 &= J_3 \\ \delta J_4 &= J_4 - J_4^* \\ &\dots \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

A potenciálzavar ily módon számszerűen ismert (8) gömbfüggvény sorából kiszámított értéket a Bruns-féle összefüggésbe beírva és $\gamma_{p'}$ -vel osztva, kapjuk a φ, λ ellipszoidi koordinátájú P pontbeli $N = T_{p'} / \gamma_{p'}$ geoid-ellipszoid távolságot. A számítást megfelelően kiválasztott φ, λ földrajzi koordinátájú pontokban elvégezve,

megszerkeszthetjük és kirajzolhatjuk a geoid izovonalas ábráját a geocentrikus elhelyezésű alapfelülethez viszonyítva.

Az alapfelület méretét és alakját a normál nehézségi erőter felvételével határozzuk meg közvetve. Ezzel a módszerrel jó áttekinthető képet nyerhetünk az egész Földre vonatkozó geoidról.

Kombinált megoldások

A gyakorlatban a geoidmeghatározás különböző módszereit általában nem külön-külön, hanem együttesen alkalmazzuk annak érdekében, hogy a különböző utakon szerzett mérési eredményeket és információkat közös számítási eljárásba bevonva, egyetlen végeredményre jussunk, és így pontosabb megoldást kapjunk.

Csillagászati-gravimetriai szintezés

A csillagászati szintezés szerint a szomszédos P_i és P_{i+1} pontok között a geoid-ellipszoid távolság $\Delta N_{i,i+1}$ megváltozását (különbségét) a függővonal-elhajlás megfelelő ϑ vetületének a két pont közötti vonalintegrálja adja. Ennek számszerű meghatározásakor numerikus integrálást végzünk a véges $s_{i,i+1}$ szakaszra. Ekkor a függővonal-elhajlás $\vartheta = \vartheta(s)$ függvényét helyettesítjük a szakaszra vonatkozóan valamilyen predikcióval előállított $\tilde{\vartheta}_{i,i+1}$ állandó értékkel. Leggyakrabban az egyszerű, lineáris predikció alkalmazásával a végpontok függővonal-elhajlás értékének számtani közepeként állítjuk elő a $\tilde{\vartheta}_{i,i+1}$ átlagértéket. Ezt a szakasz $s_{i,i+1}$ hosszával szorozva kapjuk a két pont közötti vonalintegrálnak gyakorlati közelítő értékét:

$$\Delta N_{i,i+1} = \frac{1}{2}(\vartheta_i + \vartheta_{i+1})s_{i,i+1}. \quad (10)$$

Az így nyert eredmény a pontos értékkel akkor egyezik meg, ha a függővonal-elhajlásoknak az ívhossz szerinti $\vartheta = \vartheta(s)$ eloszlásfüggvénye a két pont között valóban lineáris. Erre azonban csak akkor van remény, ha a csillagászati-geodéziai pontokat igen nagy sűrűségben határozzuk meg (különösen erősen tagolt domborzat esetén). A földrajzi helymeghatározások már említett magas idő- és költségigénye miatt ilyen pontsűrűség általában nem biztosítható, ezért más megoldásokat keresünk.

Az egyik ilyen megoldásként ismertük meg a függővonal-elhajlások sűrítésének a módszereit.

Másik megoldás a csillagászati szintezésnek a kiegészítése gravimetriai mérési eredményekkel. Ez esetben az utóbbiak nyújtanak olyan kiegészítő információt, amiből a függővonal-elhajlásnak a két pont közötti valódi eloszlása és a feltételezett lineáris eloszlás közötti különbségre következtetni lehet.

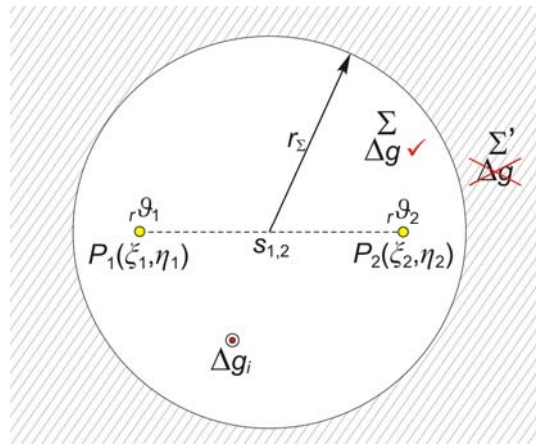
A 3. ábrán látható szomszédos P_1 és P_2 csillagászati-geodéziai pontok között a relatív függővonal-elhajlás ϑ értékét lehet gravimetriai adatok alapján meghatároz-

ni. Az ott megismert elvnek megfelelően ${}_r\vartheta$ előállítható a ${}_{gr}\vartheta$ gravimetriai függővonal-elhajlás továbbá a relatív és a gravimetriai függővonal-elhajlás ${}_r\vartheta - {}_{gr}\vartheta$ különbségének

$${}_r\vartheta = {}_{gr}\vartheta + (\vartheta_{\Sigma'} - \Delta\vartheta) \quad (11)$$

összegeként, ahol $\Delta\vartheta = {}_r\vartheta - {}_{gr}\vartheta = ({}_r\vartheta - \vartheta_{\Sigma'}) + (\vartheta_{\Sigma'} - {}_{gr}\vartheta)$. A (11) összefüggést a csillagászati szintezés alapösszefüggésébe beírva, az integrált két részre bontjuk:

$${}_r\Delta N_{1,2} = \int_1^2 {}_r\vartheta ds = \int_1^2 {}_{gr}\vartheta ds + \int_1^2 (\vartheta_{\Sigma'} + \Delta\vartheta) ds. \quad (12)$$



3. ábra. A gravimetriai szintezés alapelve

Az így kapott első integrál a gravimetriai függővonal-elhajlások vonalintegrálja a P_1P_2 szakaszon, ami a ${}_{gr}(\Delta N_{1,2}) = {}_{gr}(N_2 - N_1)$ eredményre vezet.

Ez számszerűen a Stokes-féle integrálképletnek a P_1 és a P_2 pontra az r_Σ sugarú területre végzett kiszámításával nyerhető.

A (12) második integráljában szereplő relatív és gravimetriai függővonal-elhajlás különbségről tudjuk, hogy az ívhossz függvényében lineárisan változnak tekinthető. Ezért ennek vonalintegrálját ki tudjuk számítani. Eredményül a két végpontbeli relatív és gravimetriai függővonal-elhajlások átlagértékével számított csillagászati szintezések különbségét nyerjük.

Összevonva az így nyert három tagot, kapjuk a P_1 és a P_2 pont geoid-ellipszoid távolság különbségére a

$$\Delta N_{1,2} = (N_2 - N_1) = -\frac{1}{2}({}_r\vartheta_1 + {}_r\vartheta_2)s_{1,2} + \underbrace{{}_{gr}\Delta N_{1,2} + \frac{1}{2}({}_{gr}\vartheta_1 + {}_{gr}\vartheta_2)s_{1,2}}_{GK} \quad (13)$$

eredményt, ahol az utolsó két tagot a GK jelű gravimetriai javításban szokás összefoglalni. Ez jelenti a relatív függővonal-elhajlások átlagértékével végzett csillagászati szintezés eredményének (a (13) jobb oldali első tagjának) a javítását a függővonal-elhajlás valóságos nem lineáris eloszlása miatt.

Felhívjuk a figyelmet, hogy az így kapott geoid-ellipszoid távolság különbségek arra az ellipszoidra vonatkoznak, amelyet a relatív függővonal-elhajlások kiszámításakor alapfelületként bevezettünk.

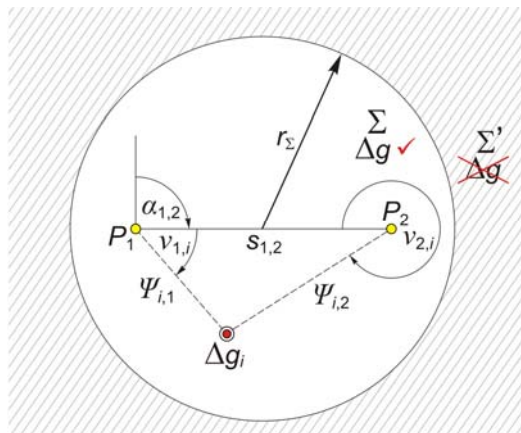
A GK gravimetriai javítás $_{gr}\Delta N_{1,2}$ első tagját Stokes integrállal számíthatjuk az r_Σ sugarú környezetre korlátozódva, a második tagjában szereplő gravimetriai függővonal-elhajlás értékeket a Vening Meinesz-féle képlettel számíthatjuk az integrálást szintén az r_Σ sugarú környezetre korlátozva. Ezekből a Mologyenszkij-féle elképzelés szerint a lehetséges összevonásokkal:

$$GK = \frac{R}{4\pi\tilde{\gamma}} \iint_{\Sigma} S'(\psi_i)_{1,2} \Delta g_i d\sigma, \quad (14)$$

ahol a 4. ábra jelöléseinek megfelelően:

$$S'(\psi_i)_{1,2} = \frac{2}{\psi_{i,2}} - \frac{2}{\psi_{i,1}} - \frac{s_{1,2}}{R} \left(\frac{\cos v_{1,i}}{\psi_{i,1}^2} + \frac{\cos v_{2,i}}{\psi_{i,2}^2} \right). \quad (15)$$

A (14)-ben összevontan szerepel a Stokes és a Vening Meinesz-féle függvénynek a szűk környezetre vonatkozó közelítő alakja, ($v_{1,i}$ és $v_{2,i}$ a P_1 és a P_2 pontból a Δg_i mérési eredmény helyére menő iránynak a P_1P_2 ívvel bezárt szöge.)



4. ábra. A GK gravimetriai javítás számítása

A gravimetriailag kiértékelt tartomány r_Σ sugarát a csillagászati-geodéziai pontok $s_{1,2}$ távolságának $2 \div 3$ -szorosában szokás felvenni.

A gravimetriai javítás abszolút értékének nagysága (a domborzat tagoltságától függően) elérheti, sőt meghaladhatja a csillagászati szintezésből kapott geoid-ellipszoid távolság mértékét, így az eredményt lényegesen befolyásolhatja.

A módszert előnyösen alkalmaztuk a magyarországi geoidkép meghatározásához is.

Szatellitageodéziai és a földi gravimetriai módszerek együttes alkalmazása.

Itt most két alapesetet tekintünk át: külön tárgyaljuk a teljes Földre vonatkozó globális geoidkép meghatározásának lehetőségét, és külön a geoid pontonkénti meghatározásának módszerét.

Ha *globális geoidkép* előállítása a célunk, akkor célszerűen a potenciálfüggvény gömbfüggvény-sorával nyert megoldást alkalmazzuk.

A mesterséges holdak geodéziai megfigyelése során nyert s észlelési vektor a (6) szerint a mesterséges hold előre jelzett simuló pályaelemeinek, az időnek, az állomáskoordinátáknak és a földi nehézségi erőter szerkezetét kifejező gömbfüggvény-együtthatóknak a függvényeként írható fel. Ha az előre jelzett simuló pályaelemeket, az időt, és az állomáskoordinátákat kellő pontossággal ismerjük, akkor ismeretlenként csak a gömbfüggvény együtthatók maradnak. Minden észlelt irány, vagy távolság értékkel egy-egy (6) alakú egyenlet írható fel az ismeretlen együtthatók meghatározására.

Minden mért és a geoidra átszámított nehézségi értékkel pedig egy-egy

$$\Delta g_{P'} = -\frac{kM}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \left[\delta J_n P_n(\cos \vartheta) - \sum_{m=1}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \quad (16)$$

alakú egyenlet írható fel, jobb oldalukon ugyancsak a gömbfüggvény-sor ismeretlen együtthatóival. (Megjegyezzük, hogy ez utóbbiakban a J_n zónális együtthatók a $\delta J_n = J_n - J_n^*$ alakban szerepelnek). A kétféle mérésből együttesen igen nagy számú egyenlet írható fel, amelyeknek a legkisebb négyzetek módszere szerinti megoldásával a gömbfüggvény-együtthatók meglehetősen nagy száma határozható meg:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\Omega} &= f_{\Omega}(kM, J_n, C_{nm}, S_{nm}) \\ \dot{\omega} &= f_{\omega}(kM, J_n, C_{nm}, S_{nm}) \\ &\vdots \\ \Delta g &= f_{\Delta g}(kM, J_n, C_{nm}, S_{nm}) \end{aligned} \right\} \Rightarrow kM, J_n, C_{nm}, S_{nm}. \quad (17)$$

Az együtthatók számszerű ismeretében felírható a T potenciálzavar gömbfüggvény-sorának véges számú tagja (a többi zérus értékűnek tekintjük), és ezzel a Bruns-féle összefüggésből számítható a geoid-ellipszoid távolság. A módszer előnyösen egyesíti magában a mesterséges holdak észlelésével nyert globális hatásokat, vagyis a nehézségi erőter és a geoid hosszú hullámhosszú változásait, ugyanakkor pedig a földfelszíni nehézségi mérésekből főként a helyi rövid hullámhosszú hatásokat. Ez ma a globális geoidkép előállítására a legjobb és a legmegbízhatóbb módszer.

A másik lehetőség az asztrogeodéziai és a földi gravimetriai módszerek együttes alkalmazása terén a *geoid-ellipszoid távolságok pontonkénti előállítása*. Ebben az esetben az N geoid-ellipszoid távolságot három részben határozzuk meg a kombinált eljárással, azaz:

$$N = N_1 + N_2 + N_3. \quad (18)$$

Feltételezzük, hogy rendelkezésünkre áll a potenciálfüggvény gömbfüggvény-együtthatóinak jól meghatározott kM, J_n, C_{nm}, S_{nm} értéksorozata és e mellett földfelszíni nehézségi mérések eredményei.

A geoid-ellipszoid távolság N_1 első összetevőjét úgy számítjuk, hogy az ismert együtthatókkal felírjuk a T potenciálzavar gömbfüggvény sorát és ezzel a Bruns-féle összefüggésből számítjuk az ennek megfelelő geoid-ellipszoid távolságot:

$$N_1 = \frac{T_{P'}}{\gamma_{P^n}} = -\frac{1}{\gamma} \frac{kM}{r} \left[\sum_{n=2}^k \left(\frac{a}{r}\right)^n \delta J_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=2}^k \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \quad (19)$$

Az N_2 összetevőt a Stokes-féle integrálképlettel számítjuk a $\Delta g - \Delta g_{sz}$ maradék nehézségi anomáliákból valamely szűkebb σ_1 tartományra (ahol részletes gravitációs felmérés áll rendelkezésünkre). A Δg_{sz} nehézségi rendellenességet a (16) összefüggés felhasználásával számítjuk az ismert gömbfüggvény-együtthatók segítségével. Így:

$$\begin{aligned} N_2 &= \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_1} \{\Delta g - \Delta g_{sz}\} S(\psi) d\sigma \\ &= \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma_1} \left\{ \Delta g - \frac{kM}{r^2} \left[\sum_{n=2}^k (n-1) \left(\frac{a}{r}\right)^n \delta J_n P_n(\cos \vartheta) + \sum_{n=2}^k \sum_{m=1}^n \left(\frac{a}{r}\right)^n (n-1) (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta) \right] \right\} S(\psi) d\sigma \end{aligned} \quad (20)$$

Végül az N_3 harmadik összetevőt az N_2 -höz hasonló módon, de a σ_1 környezeten kívüli $\sigma - \sigma_1$ távoli környezetre kiterjesztett integrálással számíthatjuk (ahol már gyérebb gravitációs felmérés van):

$$N_3 = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma - \sigma_1} (\Delta g - \Delta g_i) S(\Psi) d\sigma \approx 0. \quad (21)$$

Ez utóbbi N_3 összetevőt gyakran el is hanyagolják a távoli Δg_i adatok hiánya miatt. Így végül a teljes geoid-ellipszoid távolság az N_1, N_2, N_3 összetevők összegeként számítható.