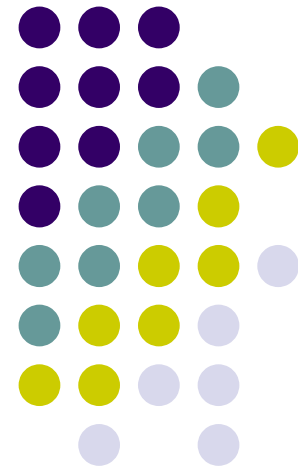


Spektrális módszerek a fizikai geodéziában

Fizikai geodézia és gravimetria

MSc

2023/24



Bevezetés



- Cél: nagy mennyiségű adat elemzése és felhasználása
- Eszköz: FFT-n alapuló **spektrális módszerek**
 - konvolúciós integrálok, gömbfüggvényysorok
 - folytonos (CFT), diszkrét (DFT), gyors (FFT) Fourier-transzformáció
- Alkalmazás: Stokes, Vening-Meinesz, Mologyenszkij integrálok



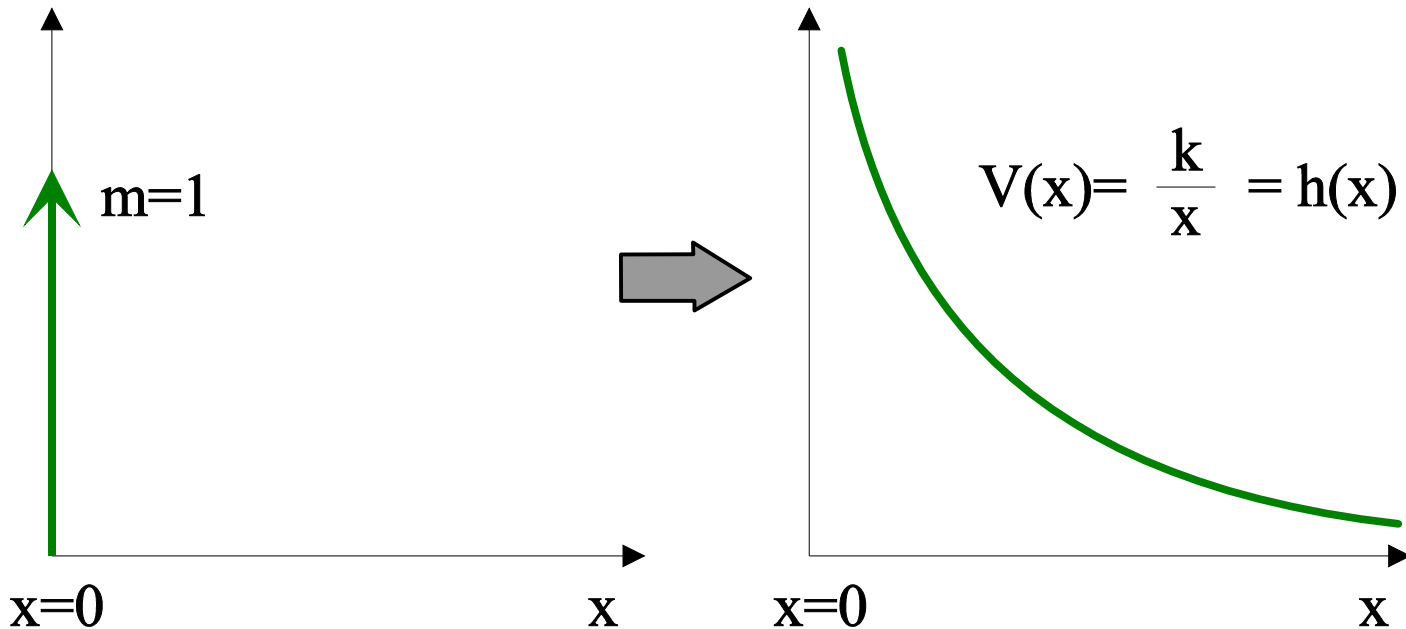
Matematikai eszközök

- konvolúció
- Fourier-sor
- potenciál gömbfüggvényysora
- folytonos (CFT) és diszkrét (DFT) Fourier transzformáció
- gyors Fourier transzformáció (FFT)

Konvolúciós integrálok



- $m=1$ tömegpont $V(x)$ potenciálja

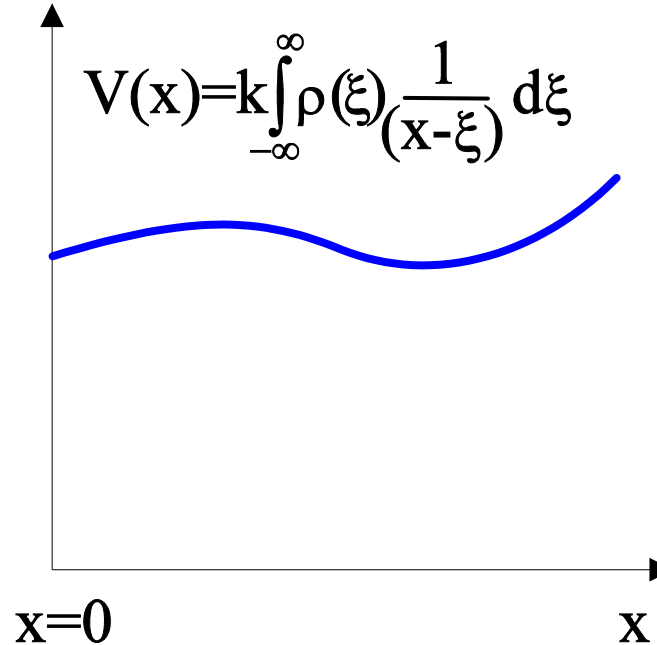
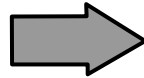
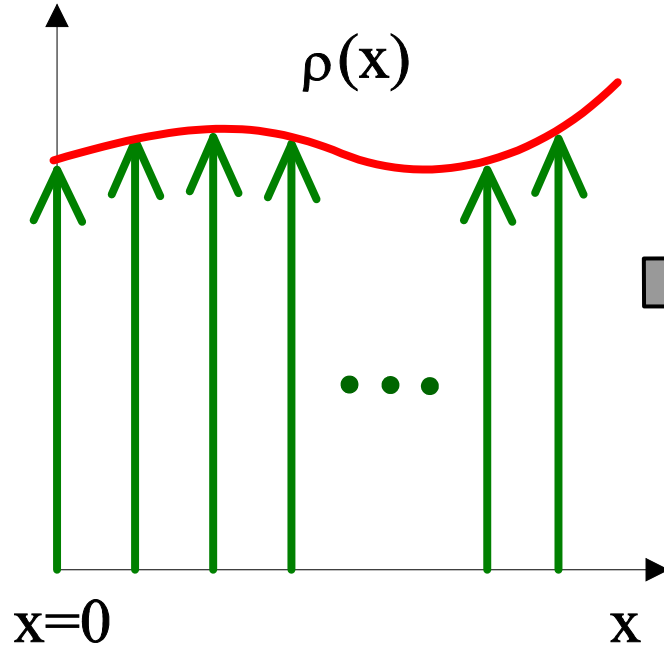


Szuperpozíció (összegzés)

elve



$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) h(x-\xi) d\xi$$



$$h(x) = \frac{k}{x}$$

a testet tömegpontok összegére bontjuk
a potenciál járulékokat összegezzük (integráljuk)



1D konvolúció

- sűrűségfüggvény és a $h(\mathbf{x})$ ún. **magfüggvény** szorzatintegrálja:

$$V(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\xi) h(x - \xi) d\xi$$

2D és 3D konvolúció



- *Stokes-integrál* (sík közelítés) geoidunduláció számítására:

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \iint \Delta g(x', y') \frac{1}{[(x-x')^2 + (y-y')^2]^{1/2}} dx' dy'$$

- *Newton integrál* tömegvonzási potenciál számítására:

$$V(\mathbf{r}) = k \iiint_{\text{Föld}} \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv \quad \mathbf{r} = (x, y, z), \quad \mathbf{r}' = (x', y', z')$$

Konvolúció általános esetben



- általános esetben az integrálás és a függvények 1, 2, 3, ... változósak

$$V(x) = u(x) * h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\xi) h(x - \xi) d\xi$$

- a $h(\xi)$ magfüggvényt **tükrözzük**: $h(-\xi)$ és **eltoljuk**: $h(x - \xi)$
- a konvolúció szokásos jele: $*$

1D Fourier-sor



- $f(t)$ -nek trigonometrikus alaprendszer szerinti felbontása (t idő vagy távolság)

$$f(t) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t)$$

- alap körfrekvencia (rad/s, rad/km)

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

A gömbfüggvényesor is Fourier-sor



- Gömbfelületen adott $f(\vartheta, \lambda)$ függvényre

$$f(\vartheta, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\cos \vartheta)$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A_m(\vartheta) \cos m\lambda + B_m(\vartheta) \sin m\lambda)$$

$$\begin{pmatrix} A_m(\vartheta) \\ B_m(\vartheta) \end{pmatrix} = \sum_{n=m}^{\infty} P_{nm}(\cos \vartheta) \begin{pmatrix} C_{nm} \\ S_{nm} \end{pmatrix}$$

1D Fourier-sor lesz belőle:

$$f_{\vartheta}(\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(A_m(\vartheta) \cos m\lambda + B_m(\vartheta) \sin m\lambda \right)$$



- Az $f(\vartheta, \lambda)$ függvényt általában egyenlő osztásközű rács pontjaiban szeretnénk előállítani
- $5' \times 5'$ -es osztásközű rács pontjainak száma a teljes földfelszínre: 9 331 200
- EGM2008-as modell: 4 802 666 együttható
- $4,5 \cdot 10^{13}$ szorzás és összeadás kell(ene) a gömbfüggvénysor kiszámításához FFT nélkül

Fourier-sor komplex alakban



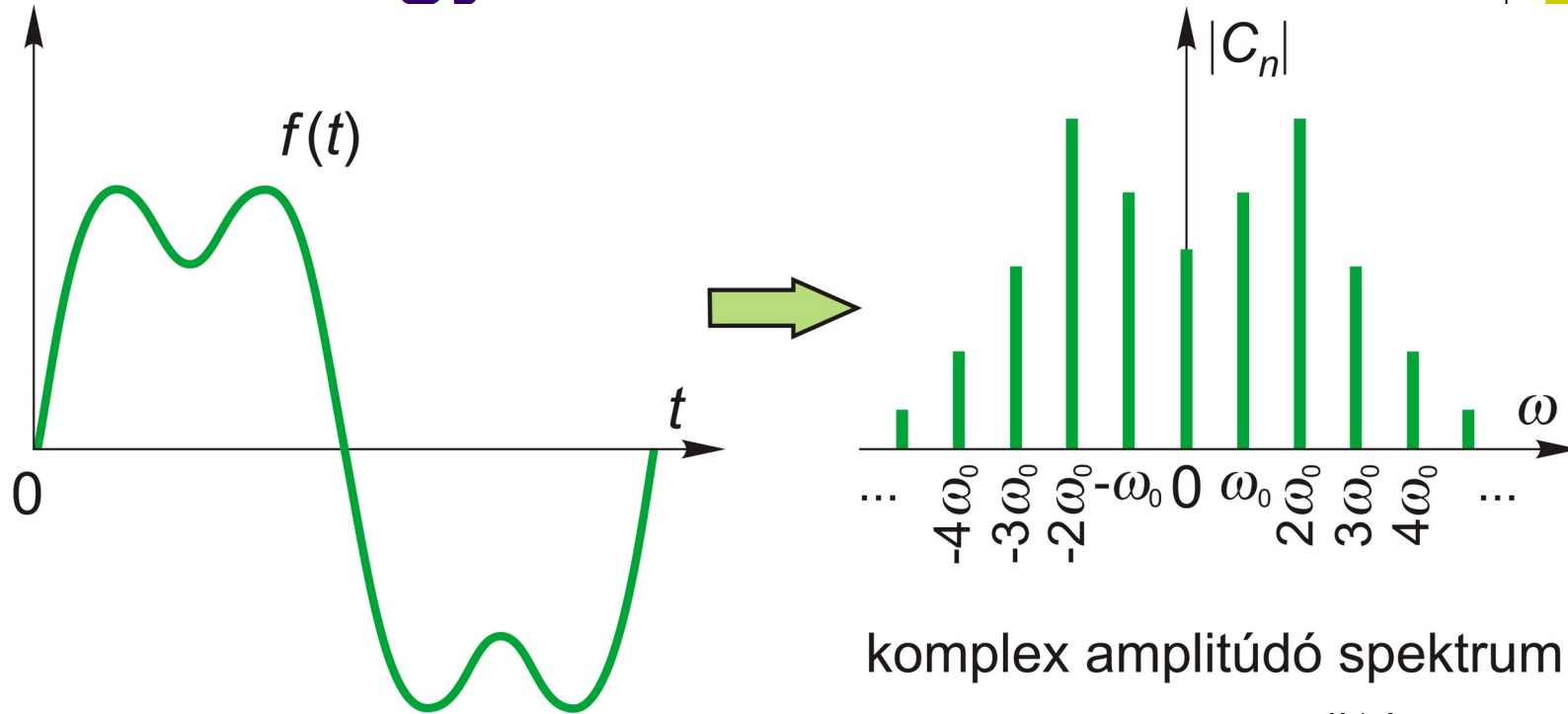
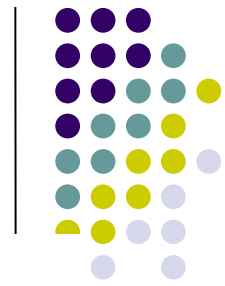
- Euler összefüggés: $e^{in\omega_0 t} = \cos n\omega_0 t + i \sin n\omega_0 t$
- komplex alak:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega_0 t}$$

- komplex együtthatók:

$$c_{\pm n} = \frac{1}{2} (a_n \mp ib_n)$$

Periódusos függvény leképezése diszkrét együtthatókra



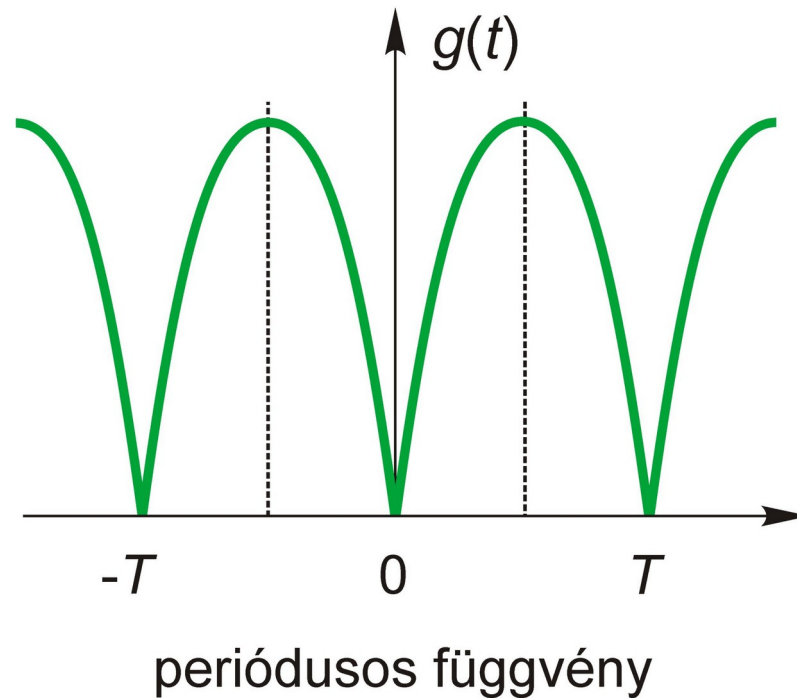
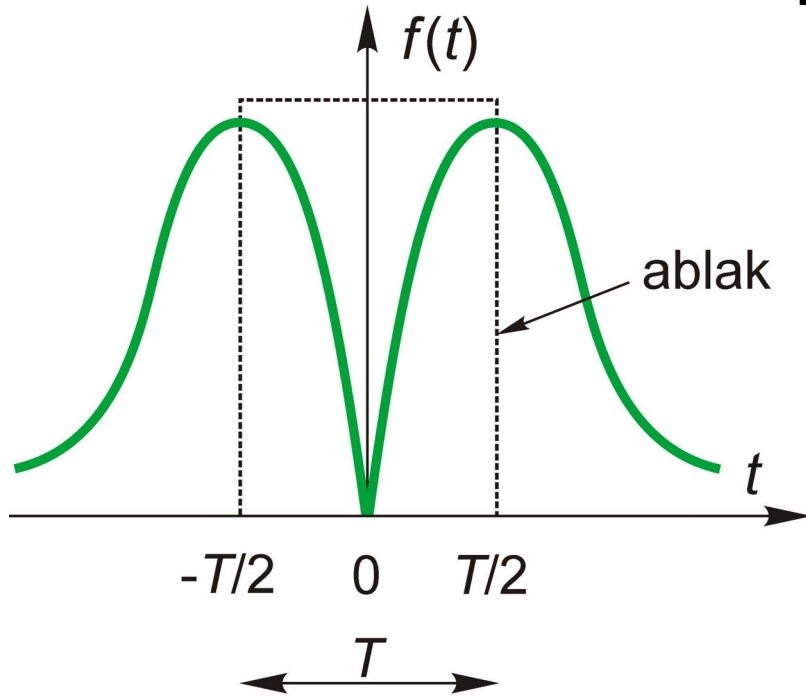
- az együtthatók kiszámítása (T periódus):
$$c_n = \frac{1}{T} \int_d^{u+1} f(t) e^{-in\omega_0 t} dt$$

Folytonos

Fourier-transzformáció (CFT)



- egy $g(t)$ periódusos függvény ($T \rightarrow \infty$)
határátmenetre nemperiódusossá válik:



Fourier-transzformáció (CFT)



- direkt és inverz transzformált pár:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = F\{f(t)\}$$

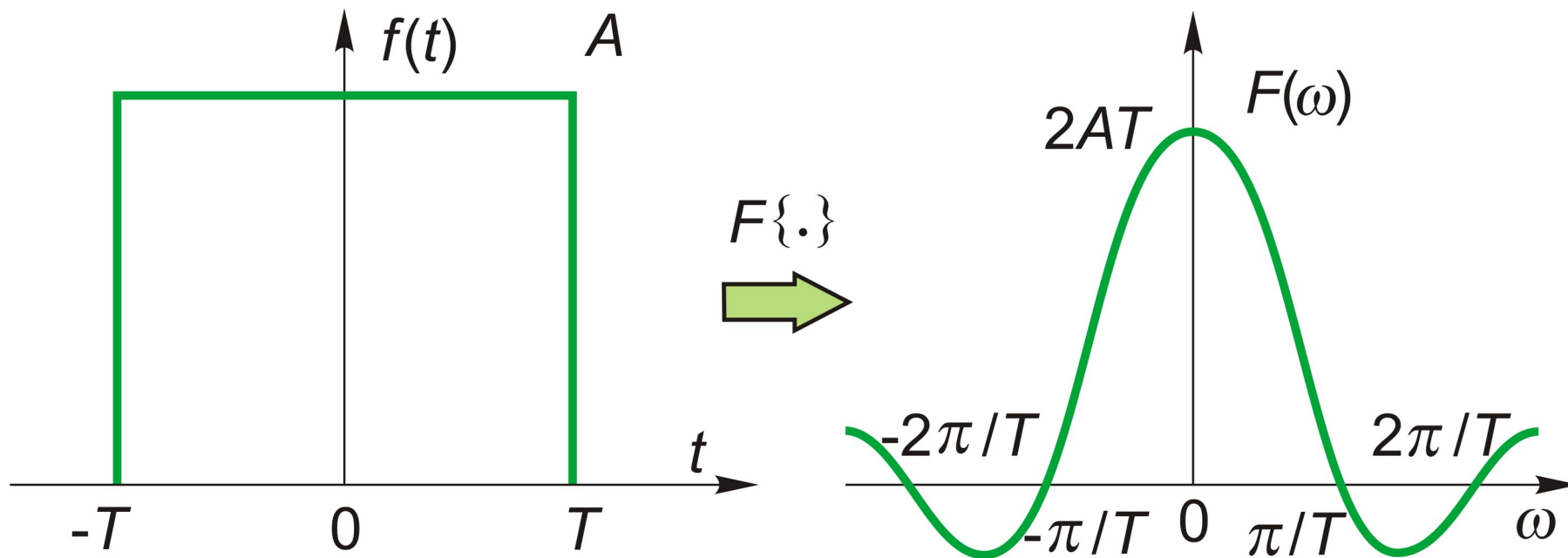
$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega = F^{-1}\{F(\omega)\}$$

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t \quad \text{periódusos függvény!}$$

A CFT tulajdonságai



- **páros** $f(t)$ függvény $F(\omega)$ transzformáltja **valós**



sinc(ω) függvény



- **linearitás**

$$F\{\alpha f(t) + \beta g(t)\} = \alpha F\{f(t)\} + \beta F\{g(t)\} = \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$$

- **eltolás (fázis változás)**

$$F\{f(t - t_0)\} = F\{f(t)\} e^{-i\omega t_0} = F(\omega) e^{-i\omega t_0}$$

- **konvolúciótétel**

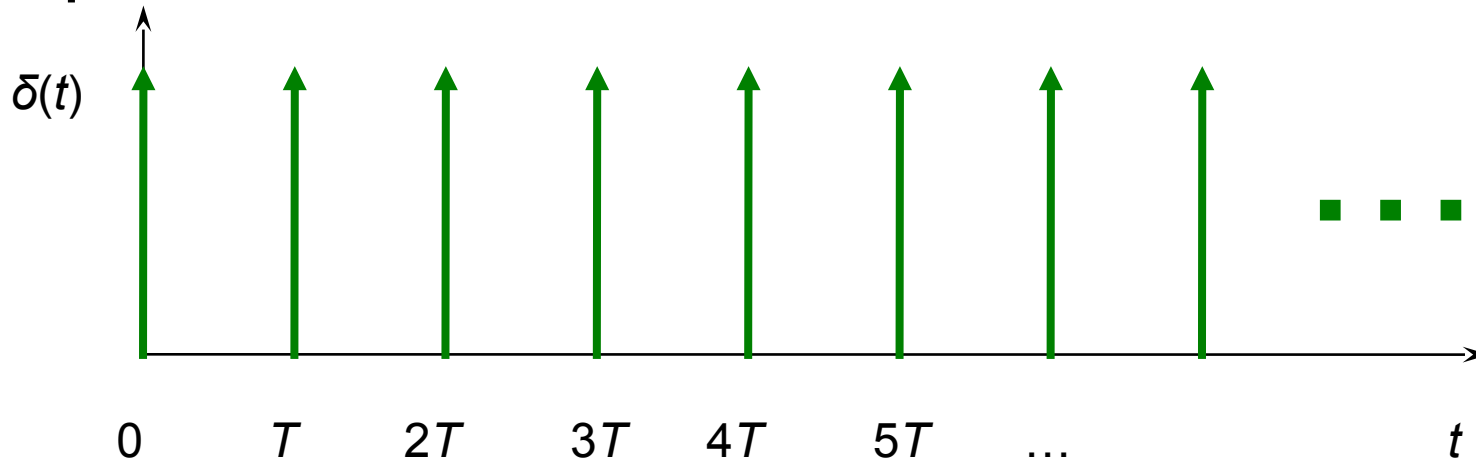
A konvolúció Fourier-transzformáltja
a tényező függvények Fourier-transzformáltjainak
szorzata.

$$F\{f(t) * h(t)\} = F(\omega) H(\omega)$$

Dirac-féle egységimpulzus



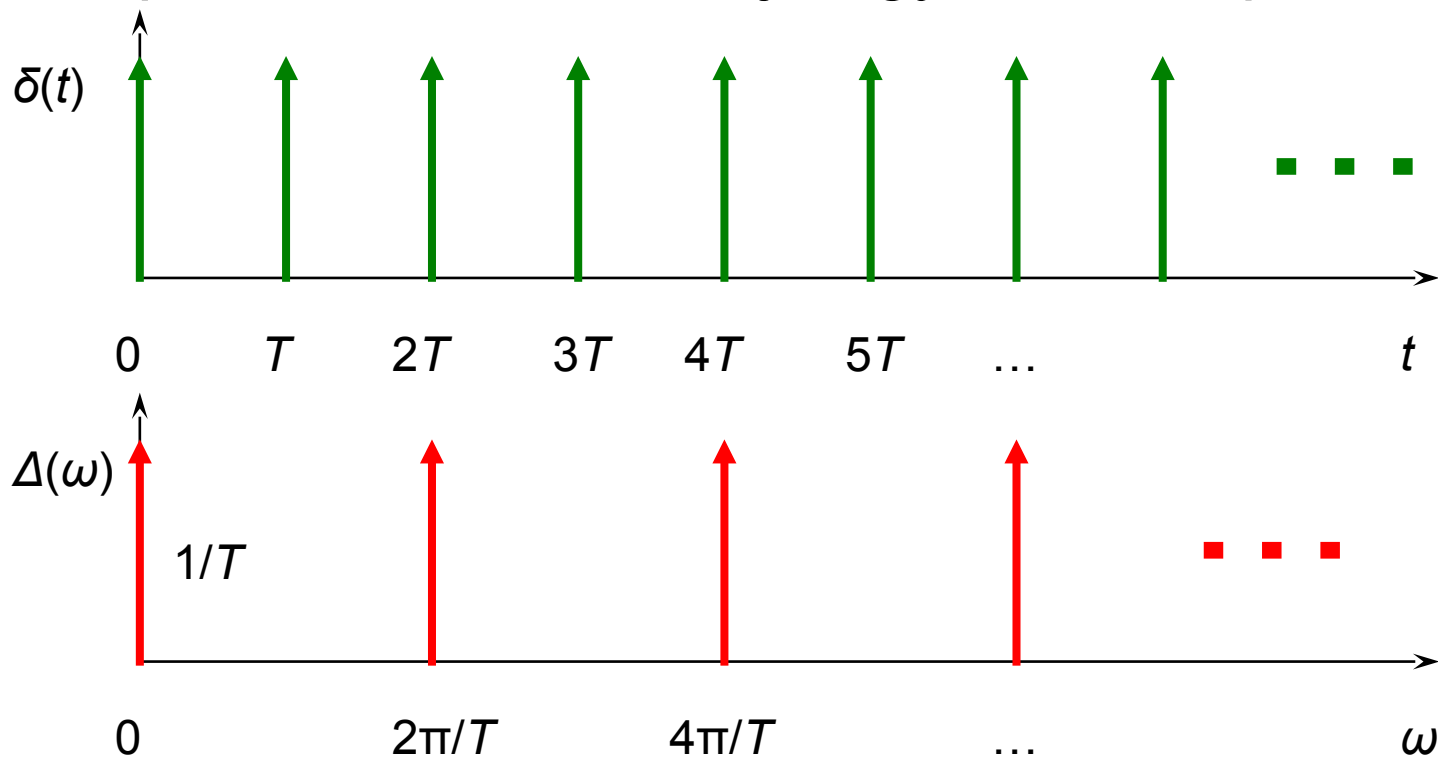
- Dirac-féle egységimpulzus „függvény” $\delta(t)$: mindenhol zérus, kivéve a t helyet, ahol végtelen nagy, de integrálja véges
- Hasznos absztrakció mint pl. a tömegpont
- Impulzus sorozat:



Impulzus sorozat Fourier-transzformáltja



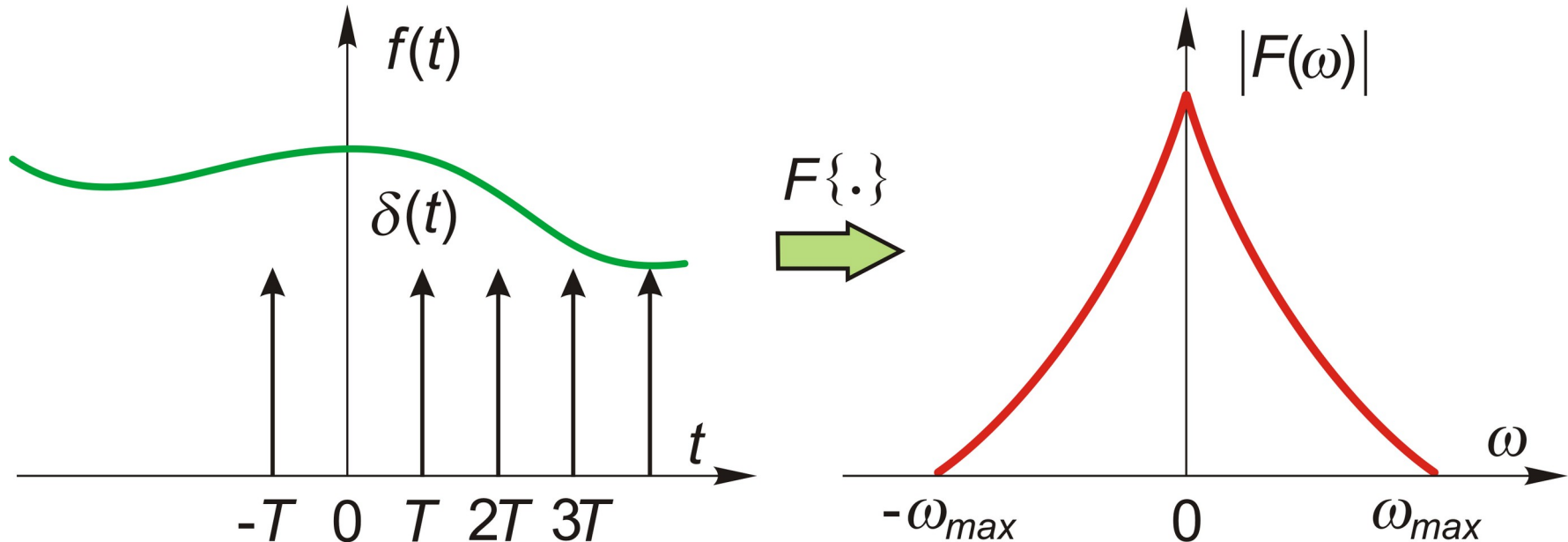
- Impulzus sorozat CFT-je egy másik impulzus sorozat:



Mintavételezés



- a mintavételezés $f(t)$ impulzussorozattal való **szorzását** jelenti:



Mintavételezett jel Fourier-transzformáltja (CFT-je)

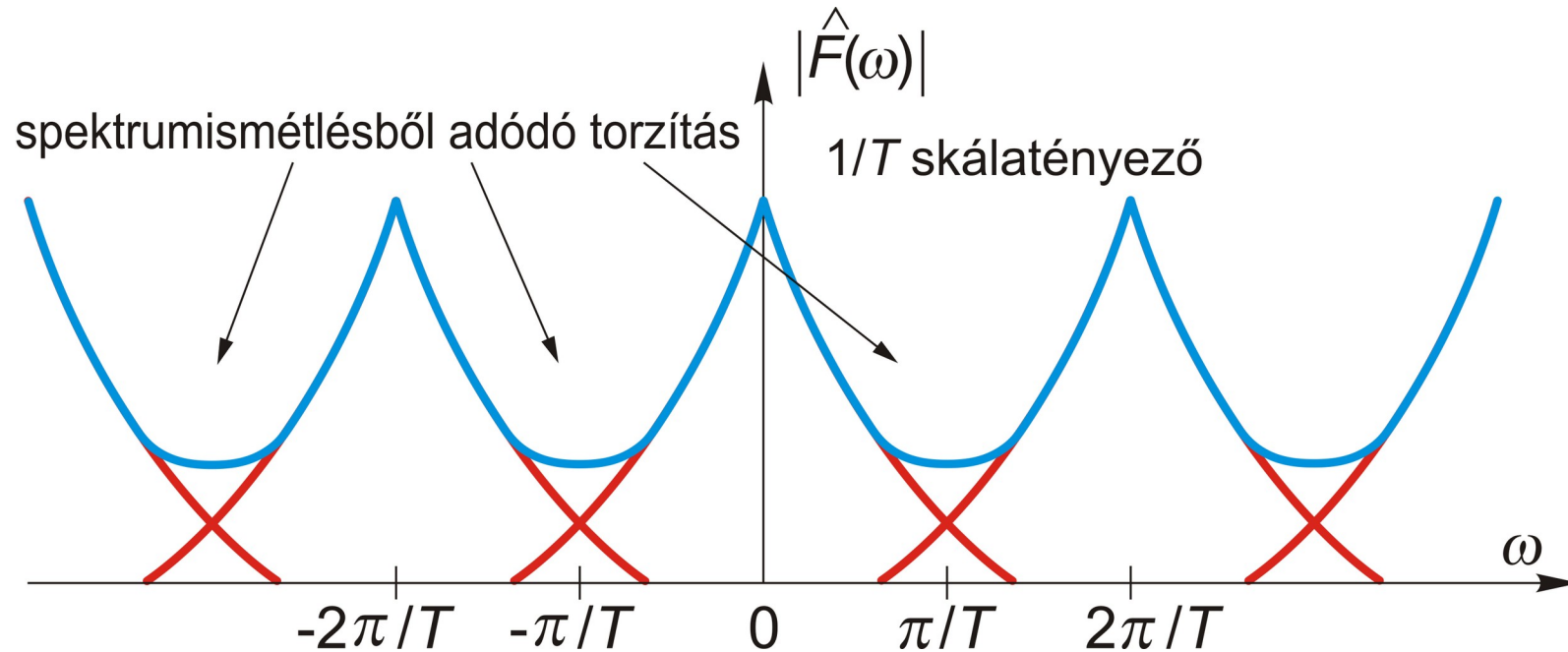


- a mintavételezett függvény CFT-je (az 'inverz' konvolúció tétel szerint) $f(t)$ -nek az impulzussorozat Fourier-transzformáltjával vett **konvolúciója** lesz
- $f(t)$ függvény $F(\omega)$ transzformáltjainak ($1/T$ -vel átskálázott) másolatait a mintavételezési $2\pi/T$ (kör)frekvenciának megfelelő közönként egymás mellé helyezzük és összeadjuk
- ez a diszkrét Fourier-transzformáció (**DFT**)

Diszkrét Fourier-transzformáció (DFT)



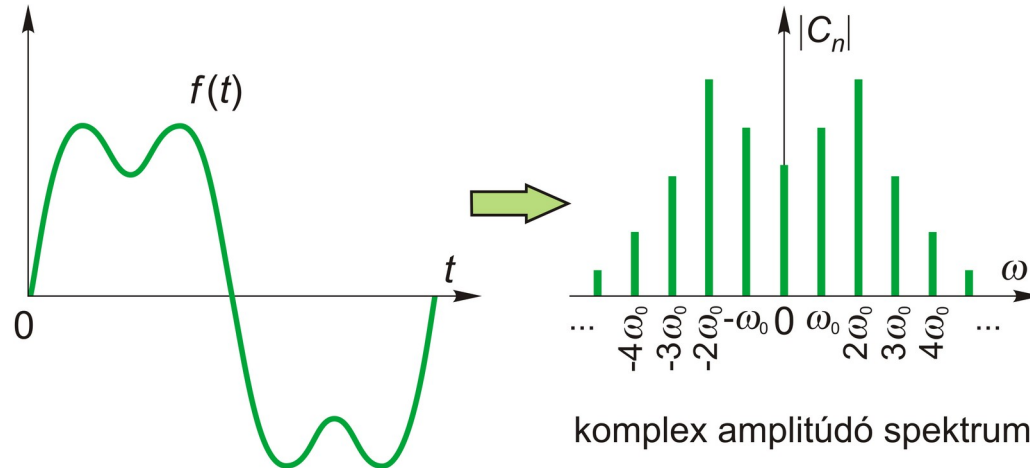
- a DFT $2\pi/T$ körfrekvenciával periódusos
- az egymás mellé tett másolatok átlapolódhatnak:



Diszkrét \leftrightarrow periódusos



- Elv: ami az egyik tartományban diszkrét, az a másokban periódusos ($t \leftrightarrow \omega$)



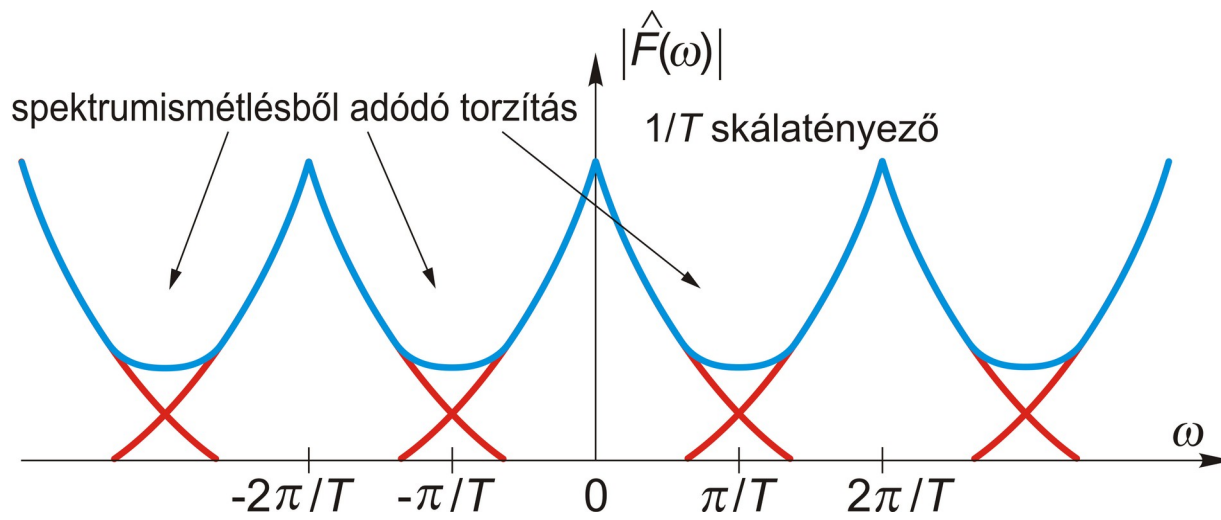
- Példa: a gömb **két** irányban is periódusos, ezért a gömbfüggvényysor **kétszeresen** diszkrét: $\sum \sum$

Mintavételezési tétel



- Akkor nincsen spektrumismétlésből adódó torzítás (átlapolódás, aliasing), ha

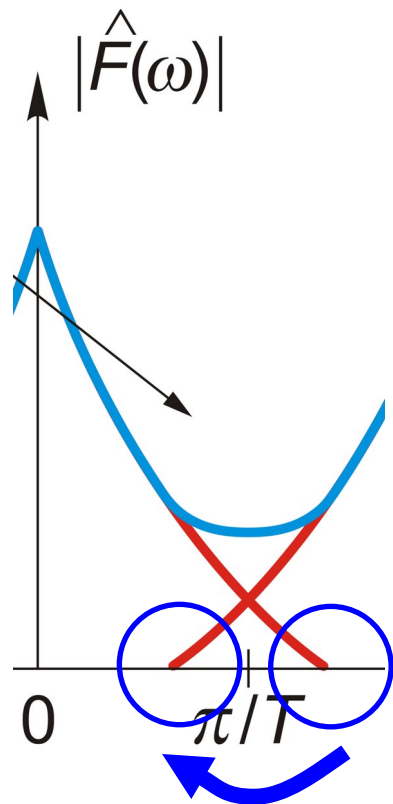
$$\omega_{\max} \leq \frac{\pi}{T}$$



Átlapolódás



- Az átlapolódott magas frekvenciájú összetevők **alacsony frekvenciájú torzítás**ként jelennek meg.



eredeti kép



hullám (Moiré) mintázat

Nyquist-Shannon tétel



- szükséges minimális mintavételezési (Nyquist) periódus:

$$T_{\min} = \frac{\pi}{\omega_{\max}}$$

- szükséges minimális mintavételezési (Nyquist) körfrekvencia:

$$\omega_{\text{Nyquist}} = \frac{2\pi}{T_{\min}} = 2\omega_{\max}$$

a jelben előforduló legmagasabb frekvencia legalább **kétszeresével** kell a jelet mintavételezni

Következmény (DFT)



- Ha a Nyquist-Shannon feltétel teljesül, vagyis a mintavételezési frekvencia legalább kétszerese a jelben előforduló legnagyobb frekvenciának, akkor $F(\omega)$ másolatai elkülönülnek. Nincs spektrumisméltésből adódó torzítás (aliasing), elég a másolatokból csak eggyel foglalkozni, és azt T -vel megszorozni.



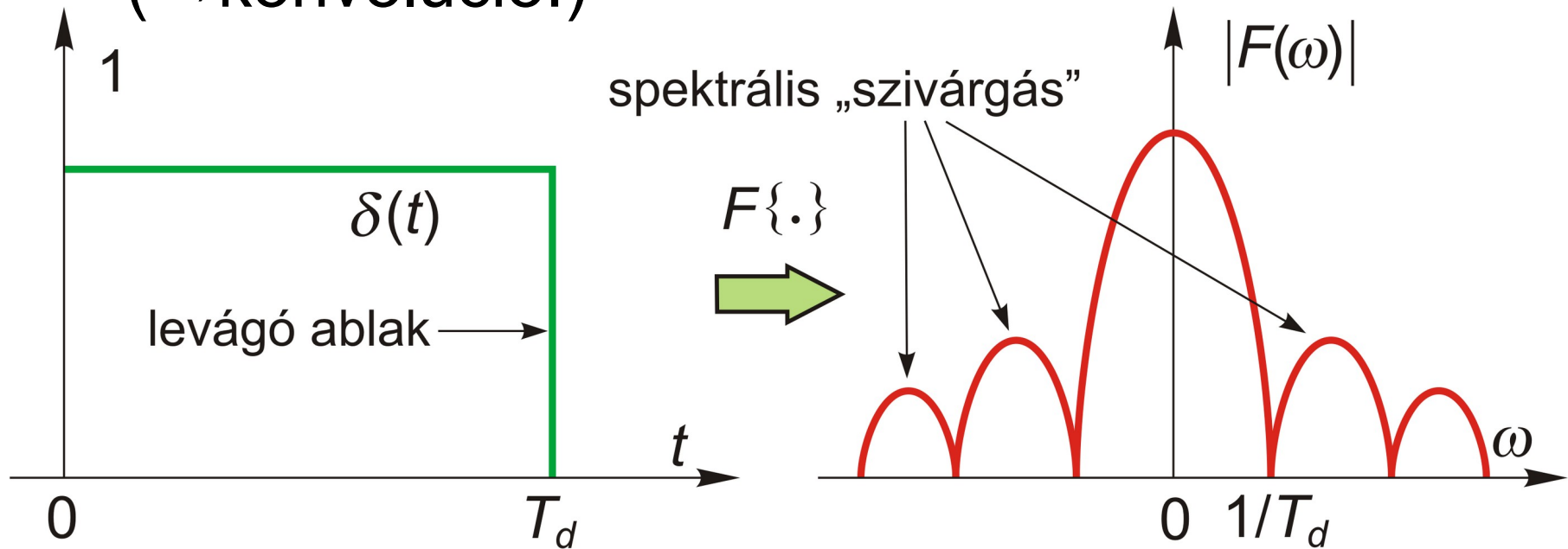
Csak véges sok minta van

- a mintavételezés eredményeként elvileg *végtelen* sok mintával kellene rendelkezünk
- a gyakorlatban csak egy *korlátozott* $t \in (t_{\min}, t_{\max})$ tartományból vannak adataink
- mi lesz ennek a hatása, ha az $f(t)$ jel folytonos?

Spektrális szivárgás (leakage)



- levágó ablakkal való szorzás
(\rightarrow konvolúció!)



- a jel energiája ‘átszivárog’ a környező frekvenciákra

DFT transzformált pár



$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-ink\Delta\omega T} \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_k e^{ink\Delta\omega T} \quad n = 0, \dots, N-1$$

- a DFT műveletigénye N^2 db komplex szorzás és $N(N-1)$ db. komplex összeadás

A gyors

Fourier-transzformáció (FFT)



- a DFT műveletigényét csökkenteni lehet
 - bináris ($N=2^k$) számú adatra a műveletigény N^2 -ről $N \log_2 N$ -re csökkenthető
- Cooley és Tukey (1965)
 - szeizmikus adatok idősoranalízise
- Danielson és Lánzos (1942)
- Gauss (1805)
 - aszteroida pályák interpolációja

Az FFT hatékonysága



- nem csak bináris számú (2^k) adatra működik (ez a **több törzstényezős FFT**, és akkor hatékony, ha az adatok száma kis törzsszámok, pl. 2, 3, 5 szorzatára bontható)
- A különbség a DFT és az FFT műveletigénye között óriási lehet!
 - $N=10^9$ adat, 1 GFLOPS processzor (1 ns)
 - FFT-vel 45 másodperc
 - DFT-vel 63 év

Fizikai geodéziai alkalmazások



- konvolúciós integrálok hatékony számítása
 - Stokes, Vening-Meinesz, Mologyenszkij integrál
 - sík, 2D gömbi és 1D gömbi FFT
 - terepi korrekciók számítása
- gyors gömbfüggvény analízis és szintézis számítása egyenközű rácsból vagy rácsra
- mérési eredmények szűrése konvolúciós szűrőkkel (pl. GOCE gradiensek), wavelet transzformáció, ...



specifikus

Stokes-integrál számítása FFT-vel

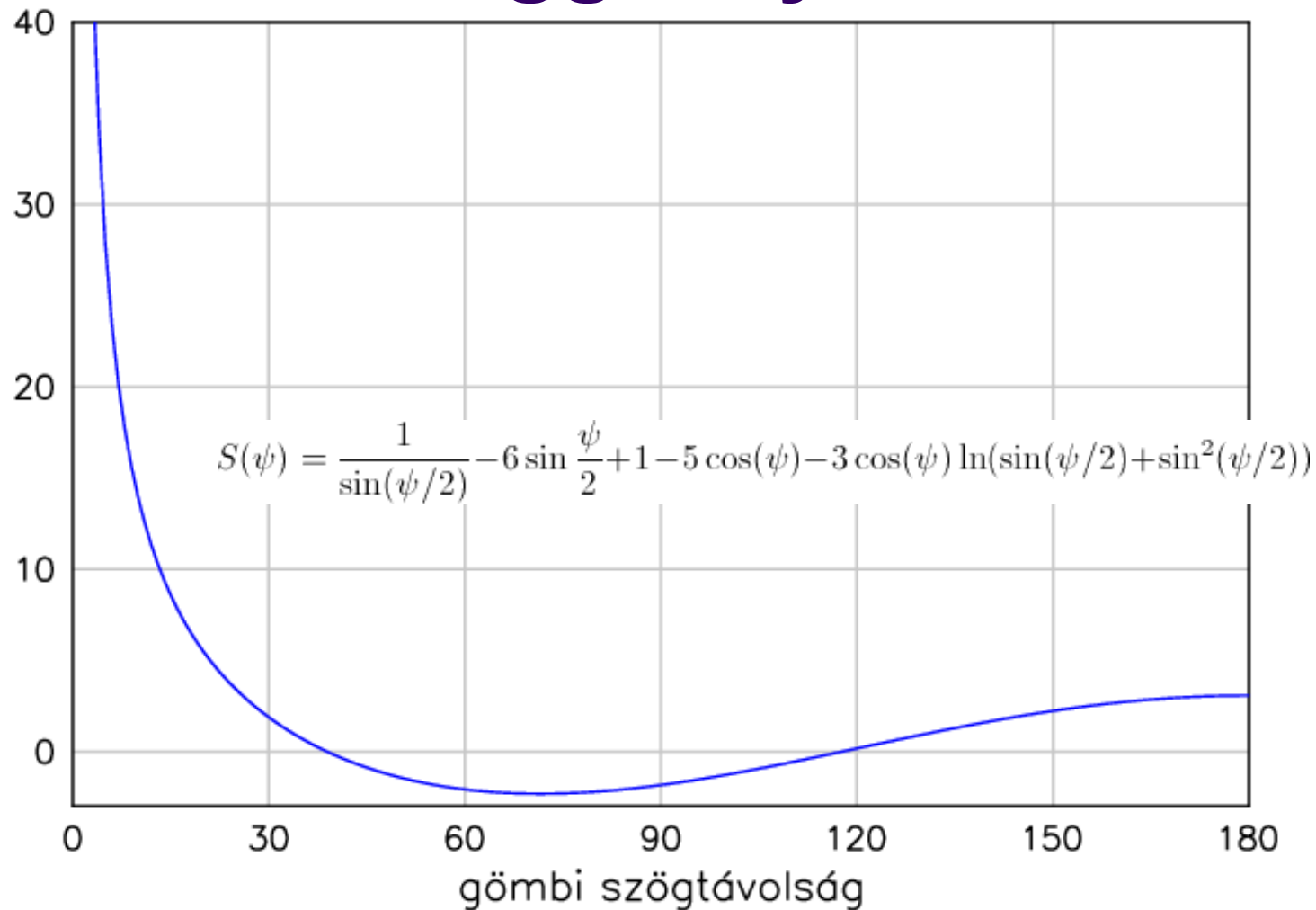


- σ egységgömb felszínére felírt Stokes-integrál:

$$N(P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(Q) S(\psi_{PQ}) d\sigma(Q)$$

- Hogyan lehet 1 vagy 2 dimenziós konvolúciós integrál alakjára hozni?

A Stokes függvény



Stokes integrál, sík közelítés



- 2D konvolúciós integrál (pl. *vetületi* koordinátákkal)

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} \Delta g(x, y) * l_N(x, y)$$

- magfüggvénye

$$l_N(x, y) = (x^2 + y^2)^{-1/2}$$

- kiszámítása FFT-vel

$$N(x, y) = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ \Delta G(u, v) L_N(u, v) \right\}$$

Geoidundulációk számítása FFT-vel (2D Stokes)



- $L_N(u, v)$ a magfüggvény Fourier transzformáltja
- $\Delta G(u, v)$ a nehézségi rendellenességek rácsának Fourier transzformáltja
- az origóban $L_N(u, v)$ szinguláris, ezért a

megfelelő unduláció járulékat külön kell kiszámolni:

$$\delta N_o(x, y) = \frac{\sqrt{\Delta x \Delta y}}{\gamma \sqrt{\pi}} \Delta g(x, y)$$

Gömbi Stokes-integrál



- gömbi koordinátákban

$$N(\varphi_P, \lambda_P) = \frac{R}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(\varphi, \lambda) S(\varphi_P, \lambda_P; \varphi, \lambda) \cos \varphi \, d\varphi d\lambda$$

- az \mathbf{S} Stokes-függvény nem csak a φ, λ koordináták különbségétől függ, ezért **nem** konvolúciós integrál
- ...de a Stokes-függvény megfelelő *közelítésével* azzá alakítható: **2D gömbi FFT**

Stokes-integrál megoldása 2D gömbi FFT-vel



- átalakítjuk a Stokes-függvényt úgy, hogy csak a földrajzi koordináták **különbségétől** függjön

$$S(\psi) = S(s) \approx S(\varphi_l - \varphi_j, \lambda_k - \lambda_i, \bar{\varphi})$$

$$s^2 = \sin^2 \frac{\psi}{2} = \sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cos \varphi_P \cos \varphi$$

$$\sin^2 \frac{\Delta\varphi}{2} + \sin^2 \frac{\Delta\lambda}{2} \cos^2 \bar{\varphi}$$

2D Stokes gömbi FFT



- a konvolúció most már a gömbön is számítható FFT-vel:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R}{4\pi\gamma} F^{-1} \left\{ F \left\{ \Delta g(\varphi_j, \lambda_i) \cos \varphi_j \right\} F \left\{ S(\varphi_l, \lambda_k, \bar{\varphi}) \right\} \right\}$$

- az alkalmazott közelítés annál jobb, minél kisebb a terület É-D irányú kiterjedése
- ... de azért mégis csak közelítés, nem igazán felel meg a nagy pontosságú geoid meghatározás számára

Szabatos 1D gömbi FFT



- Ha s -et nem közelítjük, a Stokes integrál $\Delta\lambda$ szerint akkor is 1D konvolúciós integrállá alakítható, mivel

$$S(\varphi_l, \lambda_k; \varphi_j, \lambda_i) = S(\varphi_l, \varphi_j, \Delta\lambda_{ki})$$

- Felhasználva a Fourier-transzformáció linearitását, N db. 1D FFT-t kell kiszámolni:

$$N(\varphi_l, \lambda_k) = \frac{R\Delta\varphi\Delta\lambda}{4\pi\gamma} F^{-1} \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} F\{\Delta g \cos \varphi_j\} F\{S(\varphi_j, \Delta\lambda)\} \right\}$$

Vening-Meinesz integrál számítása FFT-vel



- a számítás hasonló a Stokes-integrálhoz, mint pl. 2D sík FFT esetében

$$\begin{Bmatrix} \xi(P) \\ \eta(P) \end{Bmatrix} = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint_{\sigma} \Delta g(Q) V(\psi_{PQ}) \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix} d\sigma(Q)$$

$$\begin{Bmatrix} \xi(x,y) \\ \eta(x,y) \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi\gamma} F^{-1} \left\{ F \{ \Delta g \} F \begin{Bmatrix} \cos \alpha / r^2 \\ \sin \alpha / r^2 \end{Bmatrix} \right\}$$

Mologyenszkij-integrál számítása FFT-vel



- A Mologyenszkij integrál a Stokes integrál **inverze**
 - nehézségi rendellenességeket számít geoidundulációkból
 - pl. *altiméteres mérések* feldolgozásához hasznos

$$\Delta g(\varphi_P, \lambda_P) = -\frac{\gamma}{R} N(\varphi_P, \lambda_P) + \frac{\gamma}{4\pi R} \iint_{\sigma} [N(\varphi, \lambda) - N(\varphi_P, \lambda_P)] Z(\psi) d\sigma$$



A Mologyenszkij-függvény

- A Mologyenszkij-integrálnak a Stokes-függvényhez hasonlóan számítandó magfüggvénye :

$$Z(\psi) = \sum_{n=0}^{\infty} n(2n+1) P_n(\cos \psi) = -\frac{1}{4\sin^3(\psi/2)}$$

Mologyenszkij-integrál sík közelítéses megoldása FFT-vel



$$\Delta g(x, y) = -\frac{R}{\gamma} N(x, y)$$

$$-\frac{\gamma}{2\pi} \left[F^{-1} \left\{ F \{ N(x, y) \} F \{ d(x, y) \} \right\} - N(x, y) F^{-1} \left\{ F \{ 1 \} F \{ d(x, y) \} \right\} \right]$$

$$d(x, y) = \left[(x - x_P)^2 + (y - y_P)^2 \right]^{-3/2}$$

Gyors gömbfüggvény-sorfejtés számítás FFT-vel



- Láttuk, hogy paralelkörök mentén ilyen szummák kiszámítására van szükség

$$\sum_{m=0}^n \left(A_m \cos m\lambda + B_m \sin m\lambda \right) \Rightarrow \sum_{m=-N}^N c_m e^{im\lambda}$$

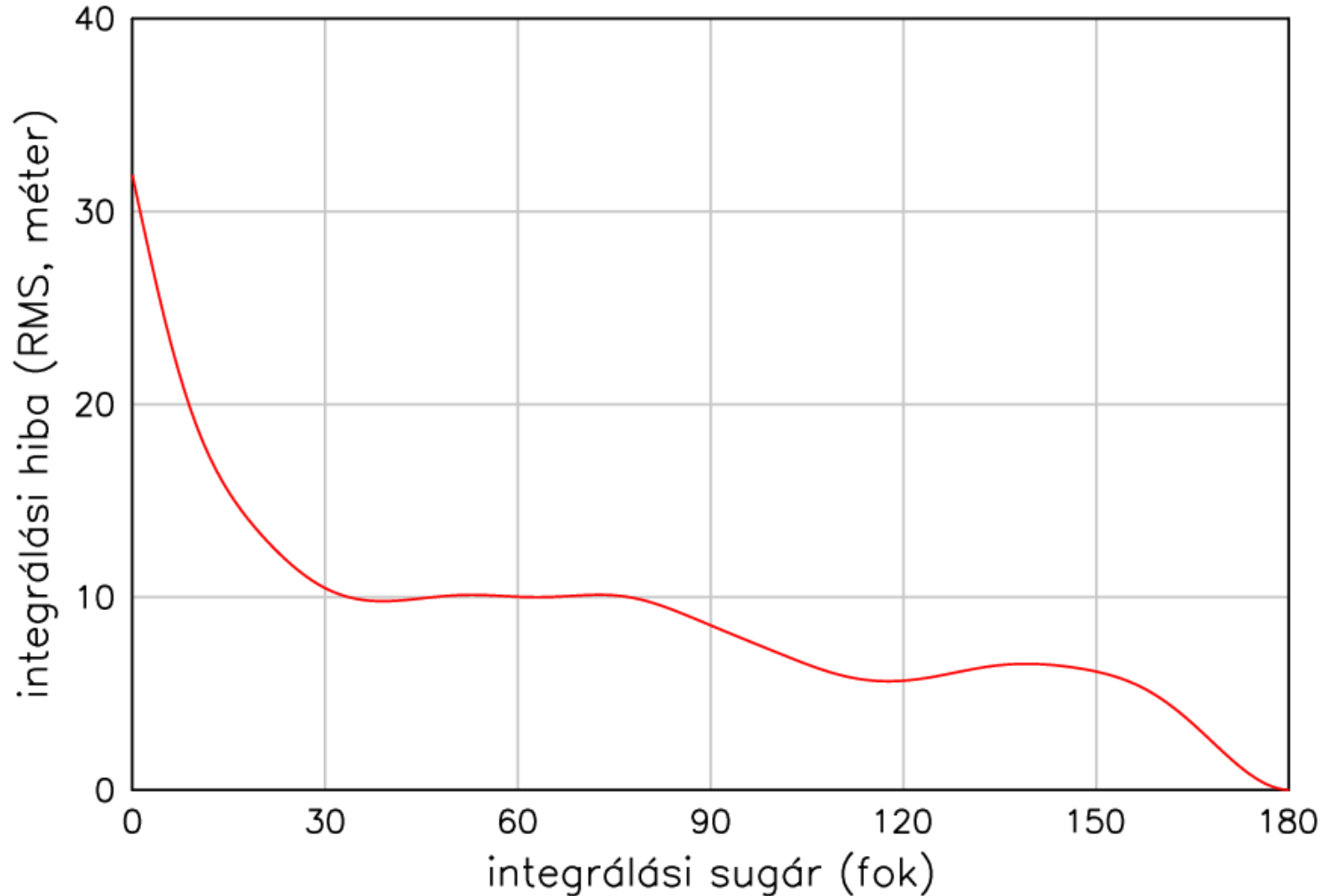
- Ha λ egyenközű rácson adott, akkor ez azonos a DFT számításával
- A DFT számítása FFT-vel felgyorsítható, így a sorfejtés számítása is (O. Colombo, 1980)



Nehézségek:

- az integrálokat a teljes földfelszínre kell(ene) számítani, de:
 - csak egy belső zónából vannak adataink
- eredmény: **csonkítási** (távoli területek elhanyagolásából eredő) **hiba**

Stokes integrál csonkítási hiba



Nehézségek:



- az integrálokat a teljes földfelszínre kell(ene) számítani, de:
 - csak egy belső zónából vannak adataink
 - az integrálást tehát a belső zónára végezzük
- a külső zónában levő adatok helyett:
 - geopotenciális modellt alkalmazunk,
 - amelyet elveszünk (**remove**) a belső zóna adataiból, majd
 - az integrálás után a modell hatását visszaállítjuk (**restore**): **remove-restore**

A Stokes-integrál számítása remove-restore eljárással



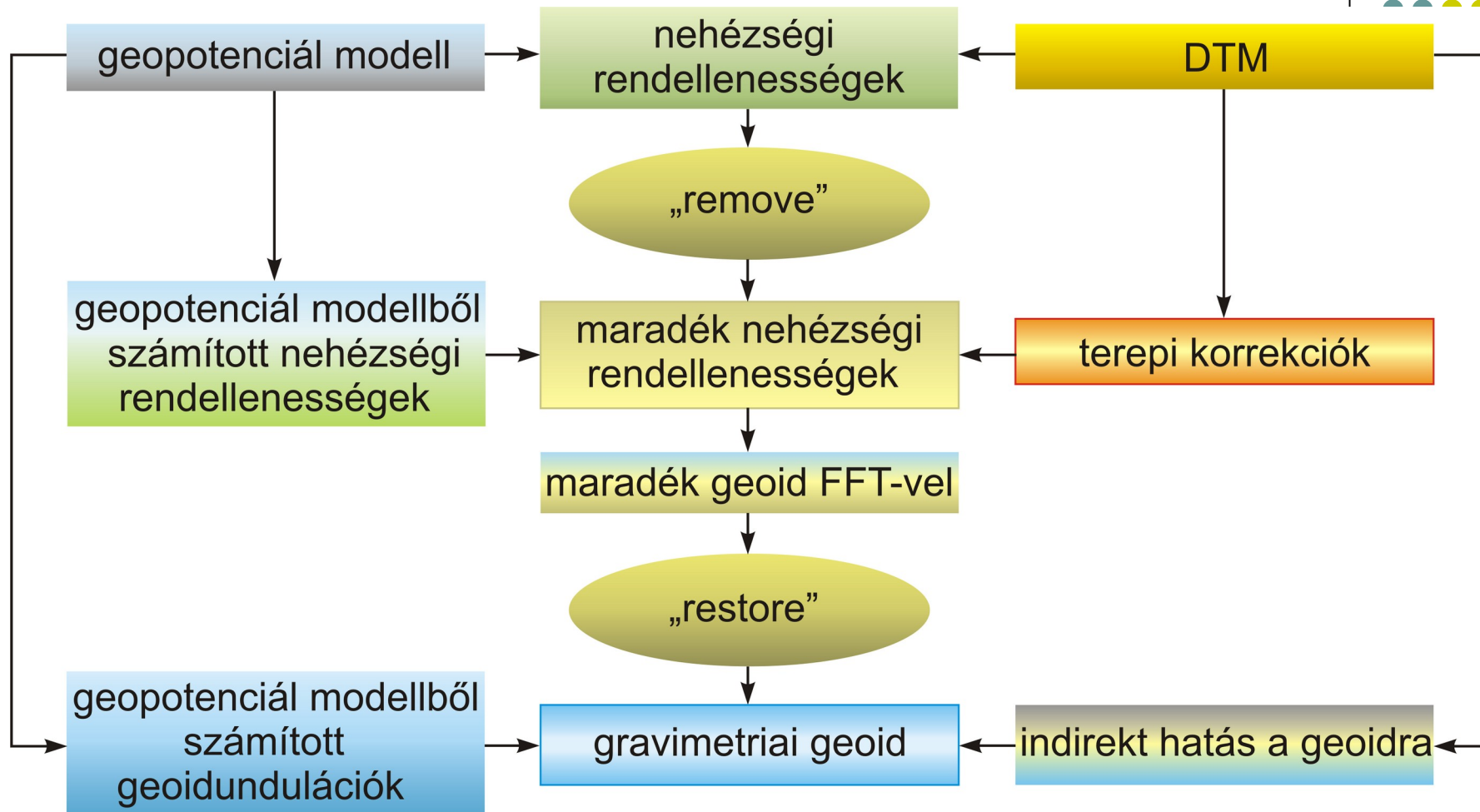
- eltávolítjuk a Δg^{FA} szabadlevegő nehézségi rendellenességekből a geopotenciális modell Δg^{GM} hatását és a c terepi korrekciót:

$$\Delta g = \Delta g^{FA} - \Delta g^{GM} + c$$

- hozzáadjuk a Stokes-integrállal számított $N^{\Delta g}$ maradék geoidundulációhoz az eltávolított hatásokat N -ben (N^h az ún. indirekt hatás):

$$N = N^{GM} + N^{\Delta g} + N^h$$

Remove-restore eljárás



Gyakorlati példák



- EGG97 európai gravimetriai geoid
- HGTUB98, HGTUB2000 magyarországi gravimetriai geoidmegoldások a BME-n

EGG97: European Gravimetric Geoid 1997



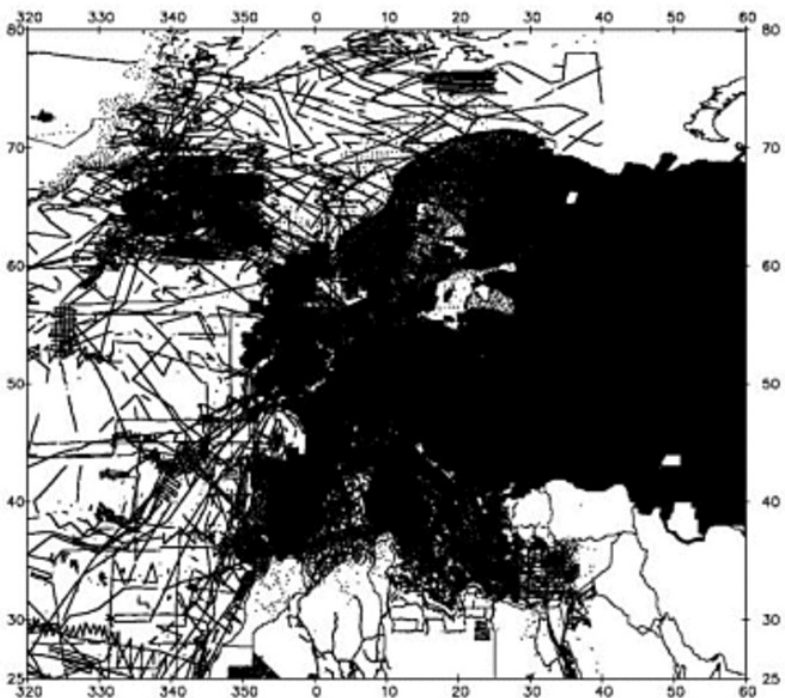
- IfE, Hannoveri Egyetem, Németország (Denker, Behrend, Torge)
- EGM 96 geopotenciál modell 360 fok- és rendszámig (130 682 együttható)
- 3120 sorból és 4120 oszlopból álló, 1' x 1,5' szögperc osztásközű földrajzi rácshálóra adott **nehézségi rendellenességek** (12 779 520 Δg adat)
- digitális domborzatmodell (DTM)
- számítási módszer: 1D gömbi (szabatos) FFT, spektrális kombináció

EGG97 megoldáshoz felhasznált adatok



nehézségi rendellenességek

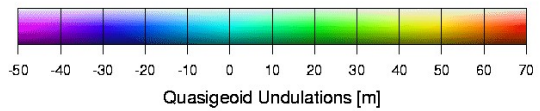
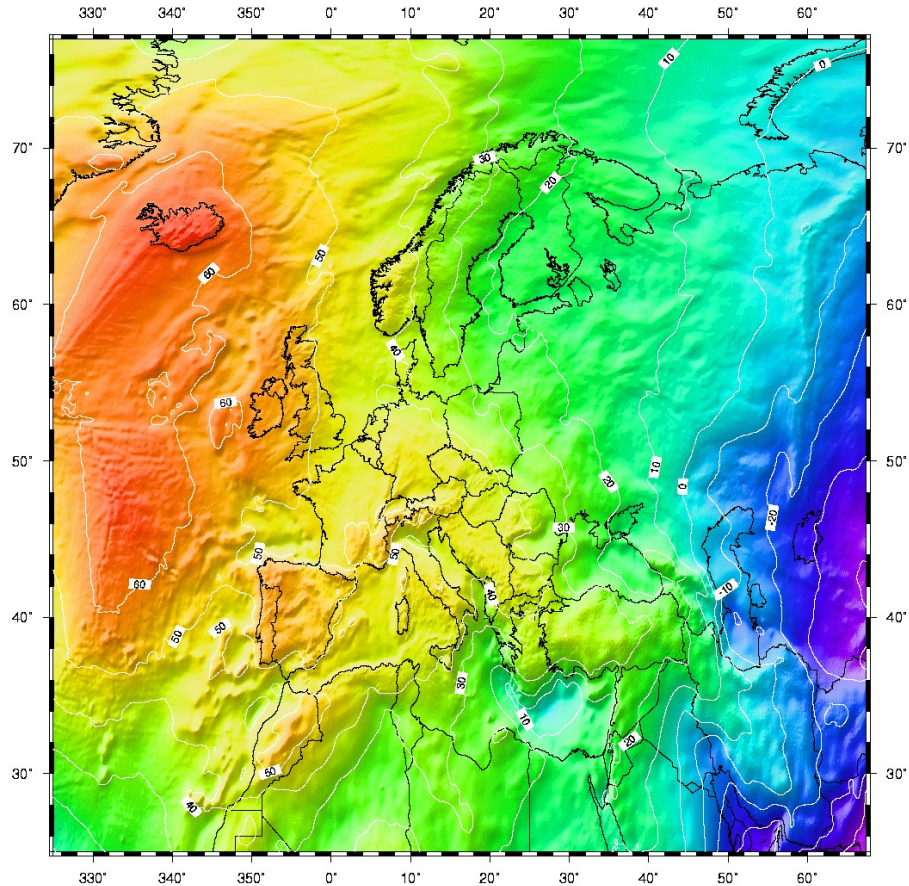
domborzatmodell (DTM)



Auflösung in m

	Über	5000
	2000 -	5000
	1000 -	2000
	500 -	1000
	100 -	500
	Unter	100

Quasigeoid Model EGG97



Institut für Erdmessung
Universität Hannover
Schneiderberg 50
D-30167 Hannover
Germany

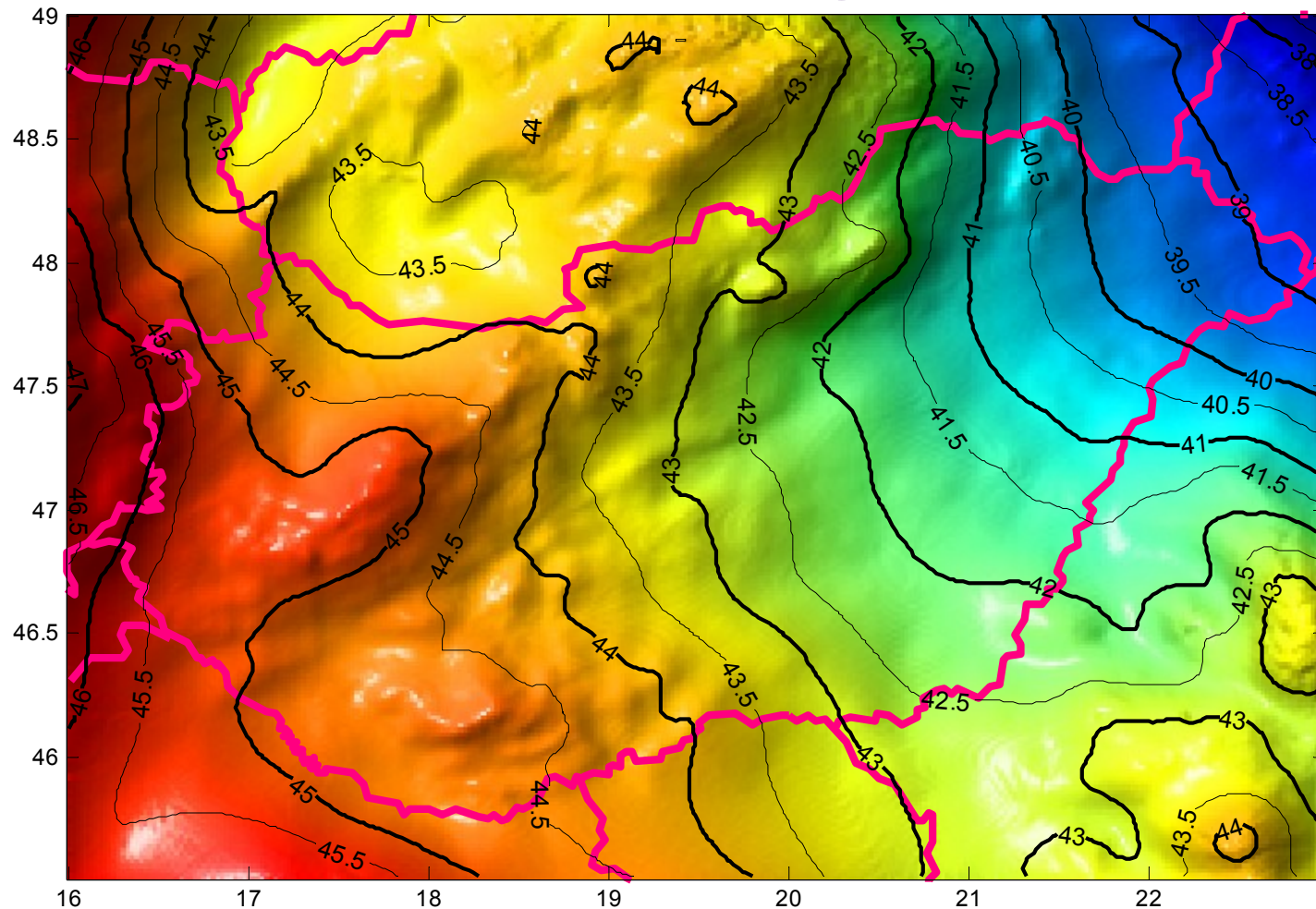
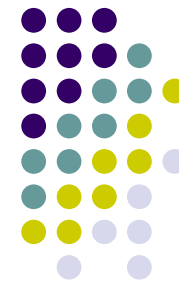


HGTUB98, HGTUB2000 magyarországi gravimetriai geoidmegoldások



- BME Általános és Felsőgeodéziai Tanszék (Tóth, Rózsa)
- **EGM 96** geopotenciális modell 360 fok- és rendszámig (130 682 együttható)
- 421 sorból és 505 oszlopból álló, 30" x 50" szögmásodperc osztásközű földrajzi rácshálóra adott nehézségi rendellenességek (212 605 Δg adat)
- számítási módszer: **1D gömbi** (szabatos) **FFT**, remove-restore, ill. spektrális kombináció
- nem csak a geoid, hanem a **függővonal elhajlás** összetevők számítása is megtörtént
- Az **OGPSH** 308 szintezett pontján ellenőrizve a geoidmegoldás **8,7 illetve 4,4 cm-es szórással** egyezik, de vannak kivágó értékek

A HGTUB98B megoldás



a folytatásban:



A nehézségi erőter meghatározása inverziós módszerekkel (kollokáció, radiális bázisfüggvények)