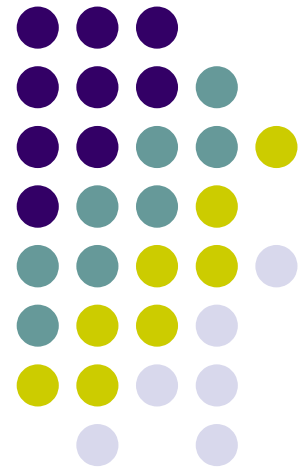


A nehézségi erőter meghatározása inverziós módszerekkel

Fizikai geodézia és gravimetria

MSc

2023/24



Miről lesz szó?



- inverziós módszerek
 - a nehézségi erőter paraméteres felbontása (bázisfüggvények, paraméterek)
 - LKN paraméterbecslés
 - az erőter paraméteres szintézise

Az inverziós módszerek alapgondolata



- A nehézségi erőter $W(x)$ potenciálfüggvényét alkalmas $B(x, x_k)$ bázisfüggvények segítségével a következő alakban írjuk fel:

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

a c_k -k egyelőre ismeretlen **együtthatók**, amelyeket **inverzióval** határozzunk meg

Az inverziós együtthatók meghatározása



- i -vel jelölt mérési pontokban ismerjük a $W(x_i)$ potenciál értékét. Az x_k pontok (bázispontok) helyzetét is ismerve (túlhatározott) lineáris egyenletrendszerrel állíthatunk fel a c_k együtthatók kiszámítására (inverzió) és optimális becslést végzünk ($e(x_i)$ eltérések normája minimális)

$$W(x_i) + e(x_i) = \sum_k c_k B(x_i, x_k)$$

$$W \approx \mathbf{Bc}$$

Az inverziós együttthatók meghatározása



- ismeretlenek vektora: $\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots]$
- a mérések vektora: $\mathbf{W} = [W(x_1), W(x_2), \dots]$
- a bázisfüggvények mátrixa:

$$B = \begin{bmatrix} B(x_1, x_1) & B(x_1, x_2) & \cdots \\ B(x_2, x_1) & B(x_2, x_2) & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \quad \|e\|^2 = \|\mathbf{Bc} - \mathbf{W}\|^2 = \min$$
$$c = (B^T B)^{-1} B^T W$$

Szintézis



- A nehézségi erőter $W(x)$ potenciálfüggvényét tetszőleges x helyen a $B(x, x_k)$ bázisfüggvények segítségével kiszámíthatjuk:

$$W(x) = \sum_k c_k B(x, x_k)$$

a c_k -k a meghatározott inverziós együtthatók

Az inverziós megoldások különböző szempontjai



- A bázisfüggvények megválasztása
 - gömbfüggvények (**gömbi koordináták**), speciálisan megválasztott függvények, pl. kovariancia függvény
 - két- ill. háromváltozós polinomok (**síkkoordináták**)
- Az együtthatók megválasztása
 - LKN kollokáció: pontbeli adatokhoz rendelt súlyok
 - gömbi radiális bázisfüggvények súlyai (SRBF)
- Az alappontok megválasztása
 - zérus helyzet (egy argumentum: $B(x)$)
 - speciális pontrendszer (pl. Reuter-rács), vagy adatpontok (LKN kollokáció), vagy maszkonok (tömegpontok)
 - optimális ponteloszlás becslése is az inverzió tárgya

Az inverziós megoldások különböző szempontjai



- A mérések megválasztása
 - potenciálkülönbségek (geopotenciális érték)
 - nehézségi rendellenességek
 - függővonal-elhajlás összetevők
 - Eötvös-tenzor elemei (második potenciál deriváltak)
- Az inverziós módszerek egyik nagy előnye, hogy **bármilyen típusú** mérést közvetlenül bevonhatunk a meghatározásba

Az inverziós módszerek előnyei



- Mindenfajta, nehézségi erőterre vonatkozó mérés felhasználható
- Szabatos LKN kiegyenlítést végezhetünk a paraméterekre (inverziós együtthatókra)
 - az adatok összes hibajellemzőjét figyelembe vehetjük
 - a megoldás (becslés) az összes hibajellemzőt szolgáltatja az inverziós együtthatókra
 - az együtthatókból levezetett bármilyen további mennyiség hibajellemzőit is meghatározhatjuk hibaterjedéssel

Az inverziós módszerek hátrányai



- Gyakran nagy méretű egyenletrendszer megoldásához vezet (főleg az LKN kollokáció)
- Sokszor szükséges a megoldás regularizálása, mivel a megoldandó egyenletrendszer rosszul kondicionált
 - a regularizációs paramétert gondosan kell választani (pl. α paraméter a Tyihonov-féle regularizáció esetén)
 - a paraméter helyes választásától függ a jó megoldás

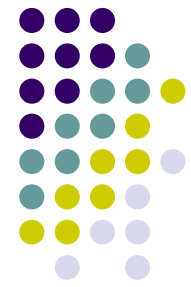
$$c = \left(B^T B + \alpha I \right)^{-1} B^T W$$

Legkisebb négyzetes (LKN) kollokáció



- bázisfüggvény = kovariancia függvény
 - a kovariancia függvény illeszkedik az erőter statisztikai szerkezetéhez (fokvarianciák)
- bázispontok = mérési pontok
 - a mérési pontok számával azonos számú ismeretlen együtthatót kell meghatározni (nagy a számításigény)
- nem mért pontokban becsüljük az erőter valamely jellemzőjét: ez a LKN *predikció*
- probléma: a predikált erőter kovariancia függvénye nem egyezik a felhasznált adatok kovariancia függvényével („megtagadja saját modelljét”)

Kovariancia függvény



- térben / felületen eloszló mennyiség (pl. Δg) statisztikai jellemzésére szolgál: $\Delta g(\varphi, \lambda)$
- Mi a Δg -k **átlagos nagysága** ? (σ egységgömb, $M\{\cdot\}$ az átlagolás)

$$M\{\Delta g\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \, d\sigma = 0$$

- ez a mérőszám nem jó
- a szórásnégyzet (**variancia**) már megfelelő:

$$\text{var}\{\Delta g\} = M\{\Delta g^2\} = \frac{1}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g^2 \, d\sigma$$

- variancia négyzetgyöke a **szórás**

$$\text{rms} \{ \Delta g \} = \sqrt{\text{var} \{ \Delta g \}} = \sqrt{M \{ \Delta g^2 \}}$$



- pl. a teljes földfelszínre a Δg -k szórása ± 35 mGal
- a variancia fogalmának általánosítása a **kovariancia (autokovariancia) függvény** :
 - a $\Delta g \cdot \Delta g'$ szorzat átlagos értéke a P és P' pontok r távolsága függvényében

$$C^{\Delta g}(r) = \text{cov}_r \{ \Delta g \} = M \{ \Delta g \cdot \Delta g' \}_{r=PP'}$$

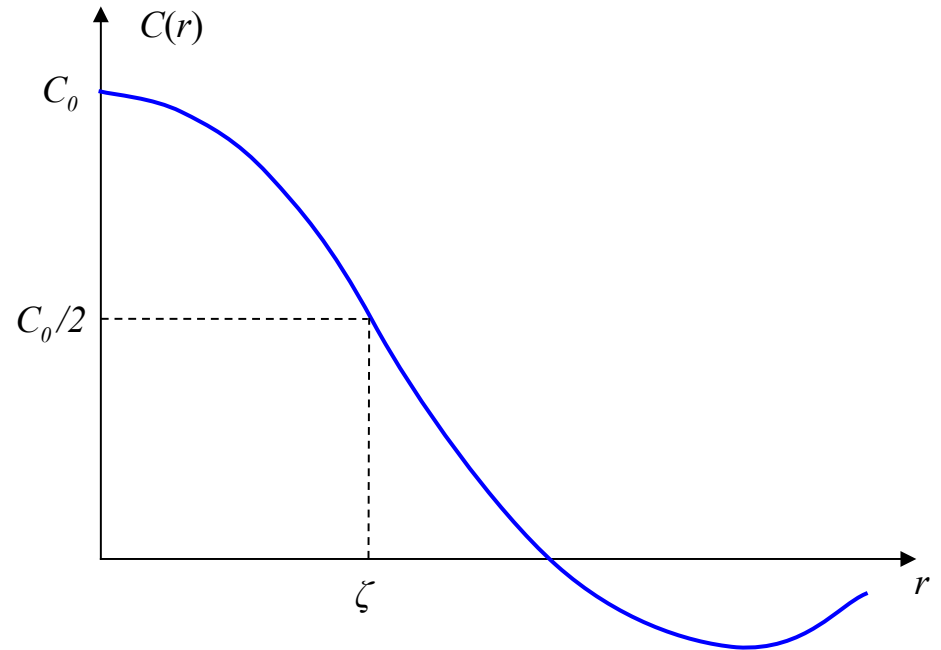
- az $r = 0$ értékű kovariancia a variancia:

$$C^{\Delta g}(0) = \text{var} \{ \Delta g \} = M \{ \Delta g^2 \}$$

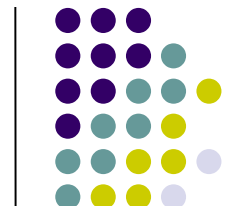
Mit mutat a kovariancia függvény?



- a kovariancia függvény Δg és $\Delta g'$ statisztikai korrelációját méri, vagyis azt, hogy mennyire azonos előjelűek és nagyságúak egy adott r távolságban levő Δg értékek

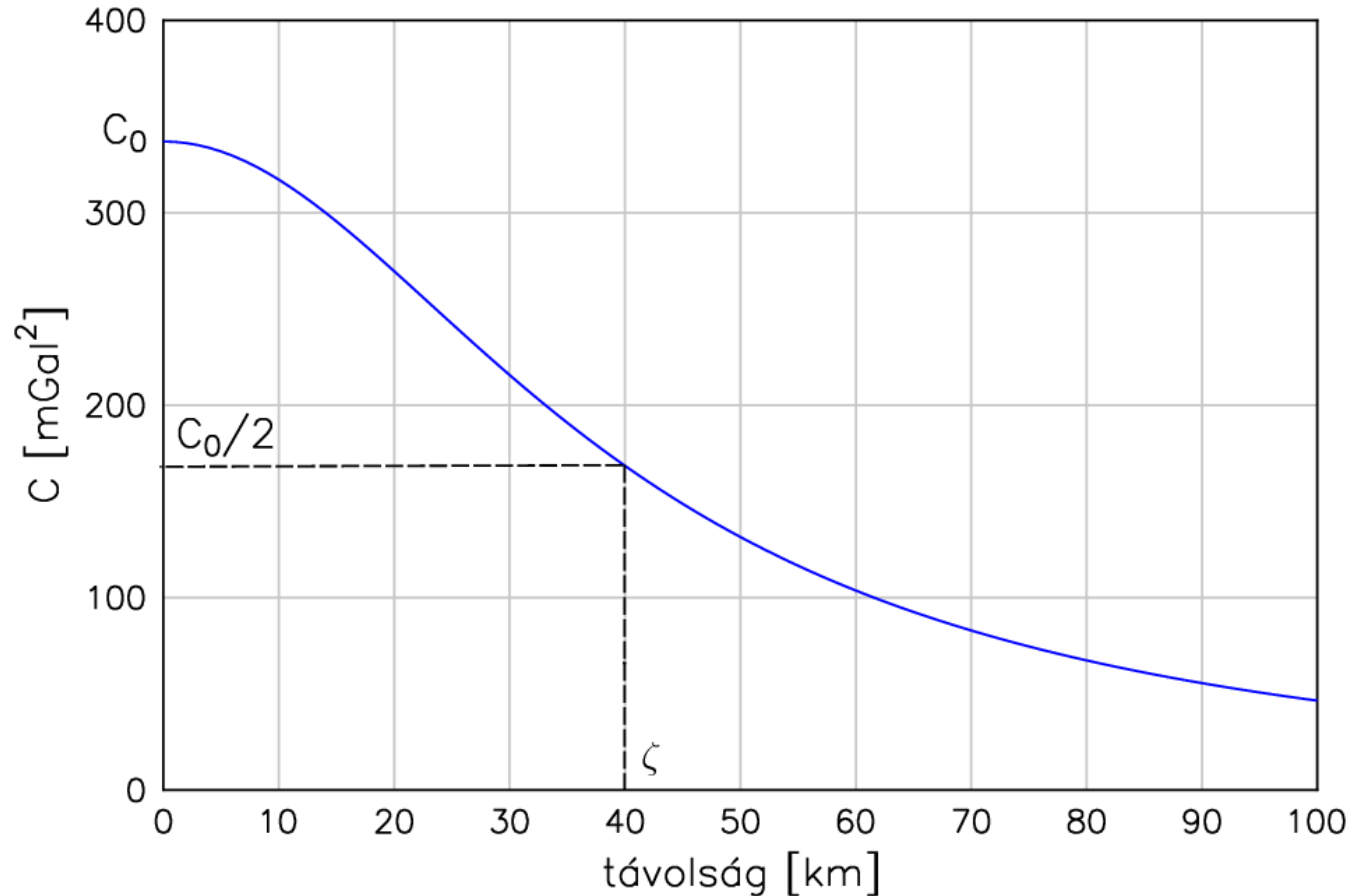


Hirvonen kovariancia függvénye



$$C(r) = \frac{C_0}{1 + (r/d)^2}$$

$$C_0 = 337 \text{ mGal}^2, d = 40 \text{ km}$$



Kovariancia függvény modellezése



- Az egyváltozós kovariancia függvényt általában bázisfüggvények rendszere (P_n Legendre polinomok) szerint haladó **végtelen sorba fejtjük**
 - e sorfejtés együtthatói a σ_n **fokvarianciák**

$$B(x, x_k) = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi R^2}} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \sigma_n P_n(x, x_k)$$

Más mérési típusok felhasználása



- a T potenciálzavarral ($T = W - U$) függvénykapcsolatban álló mennyiségeket vizsgálunk:
 - N geoidmagasság
 - Δg nehézségi rendellenességek
 - (ξ, η) függővonal-elhajlások

$$N = \frac{T}{\gamma} \quad \Delta g = -\frac{\partial T}{\partial r} - \frac{2}{r} T \quad \xi = \frac{1}{\gamma r} \frac{\partial T}{\partial \vartheta} \quad \eta = -\frac{1}{\gamma r \sin \vartheta} \frac{\partial T}{\partial \lambda}$$

Magyarországi példák



asztrogeodéziai geoidmegoldás számítása függővonal-elhajlás
adatokból

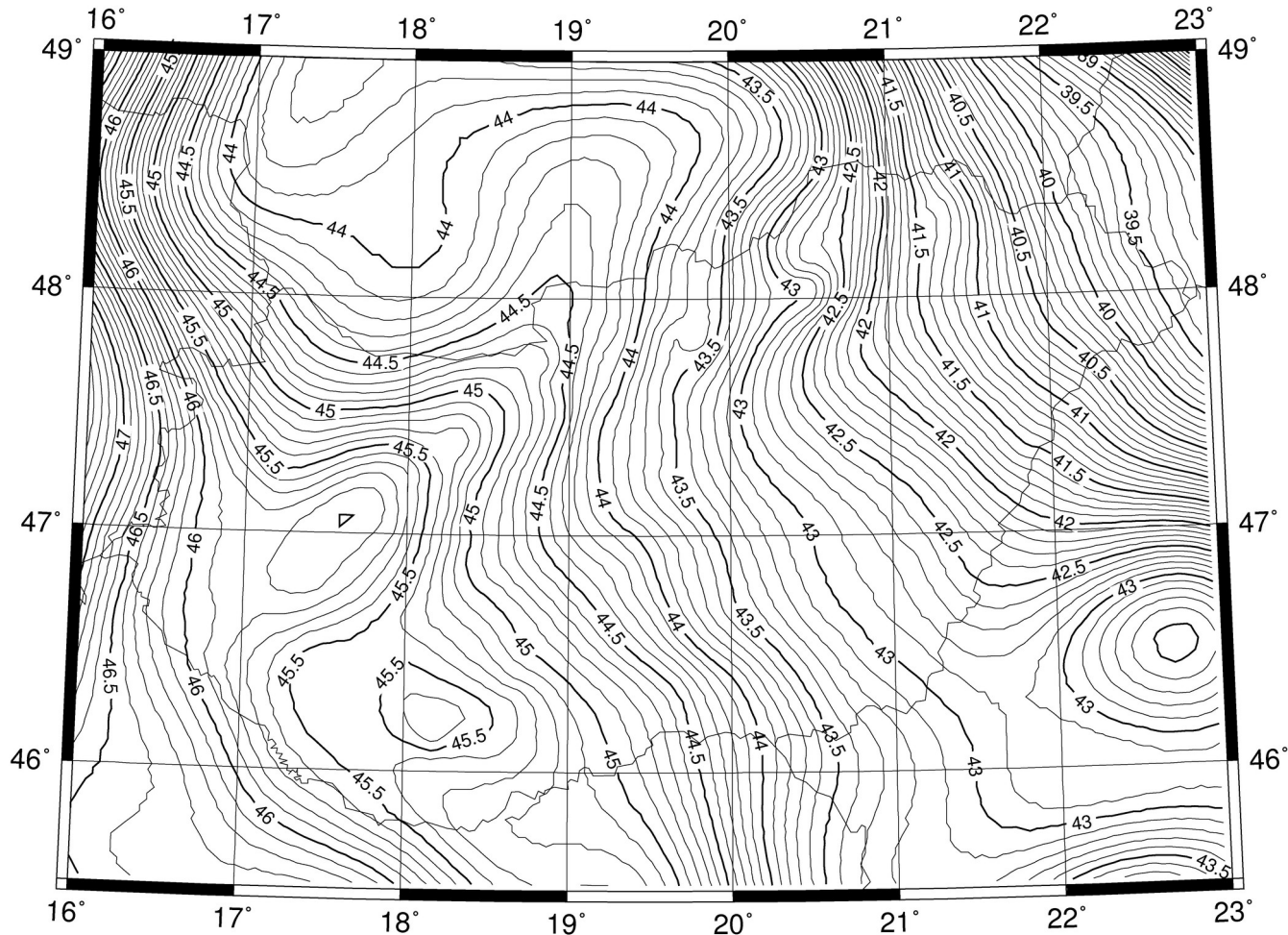
geoidszámítás gyors kollokációval nehézségi
rendellenességekből

nehézségi rendellenességek számítása Eötvös-inga
mérésekből

illesztett asztrogravimetriai, gradiometriai, GPS/szintezési
kvázigeoid megoldás

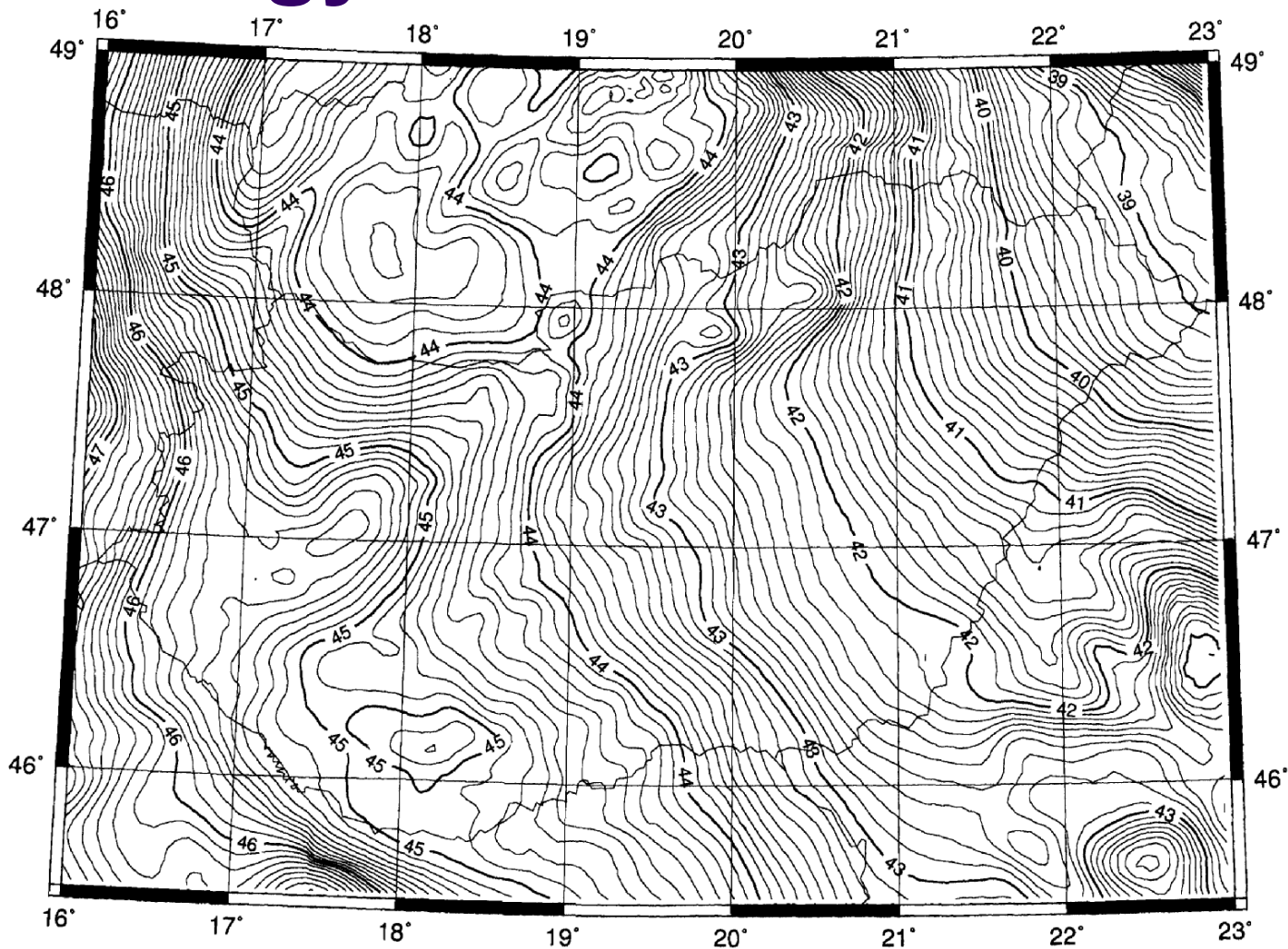
asztrogeodéziai és GPS/szintezési megoldás EGM2008-as
geopotenciál modellel

Asztrogeodéziai geoid

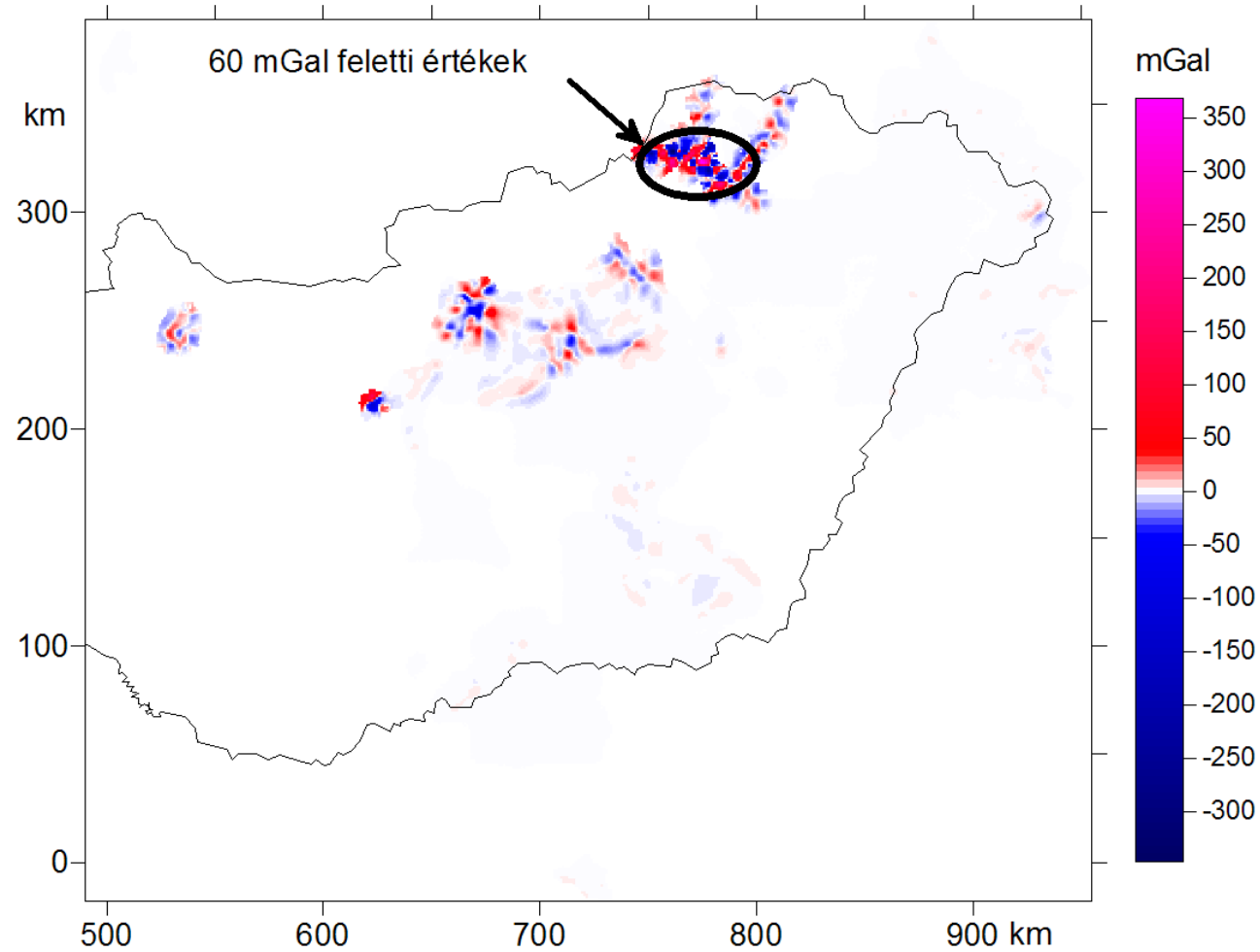


OGPS 340
szintezett pontján
az illeszkedés
 ± 14 cm-es
szórással

Geoid gyors kollokációval



Nehézségi rendellenességek

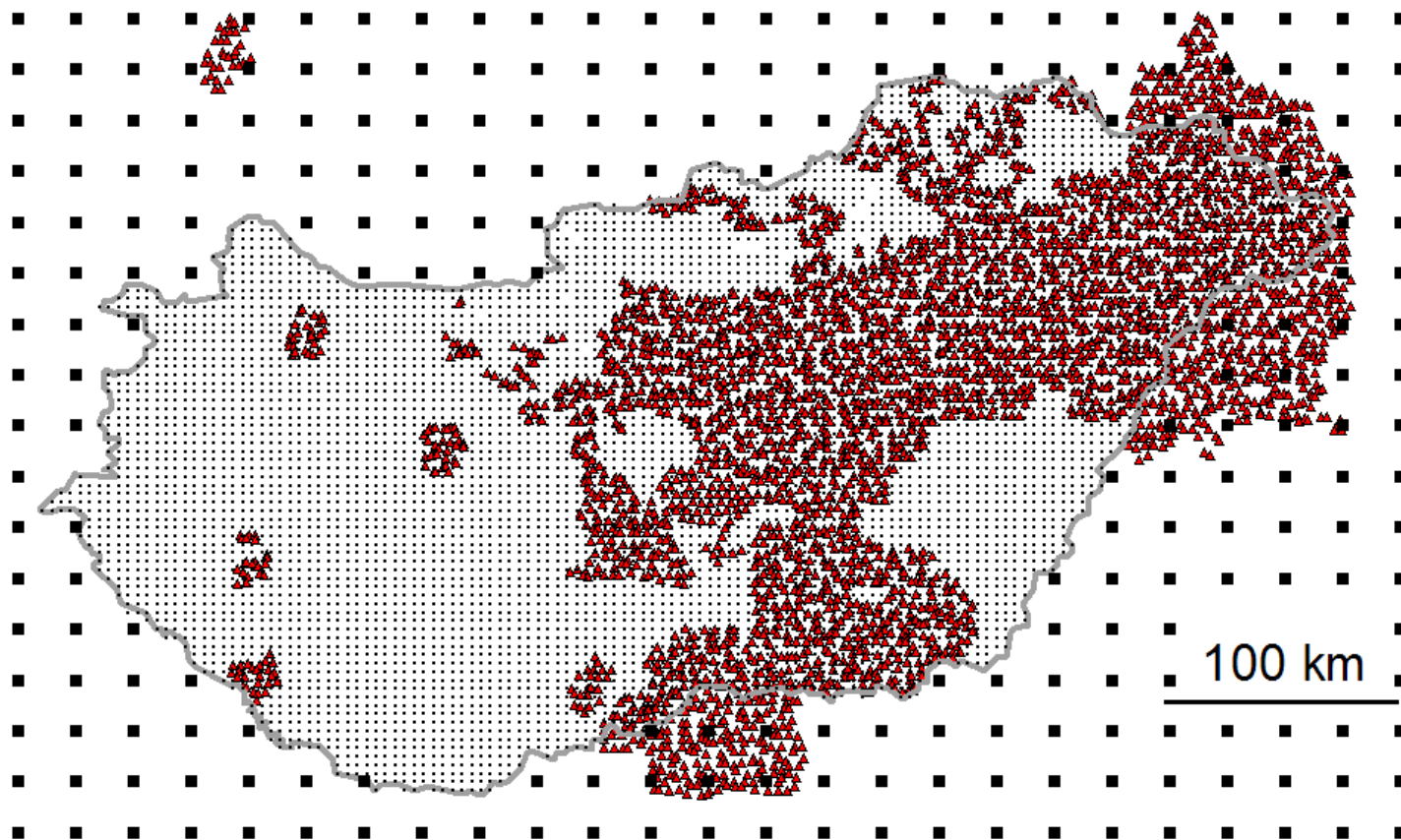
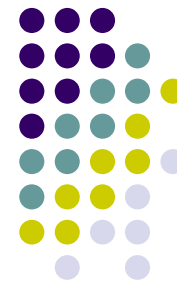


HGTUB2007 magyarországi kvázigeoid megoldás



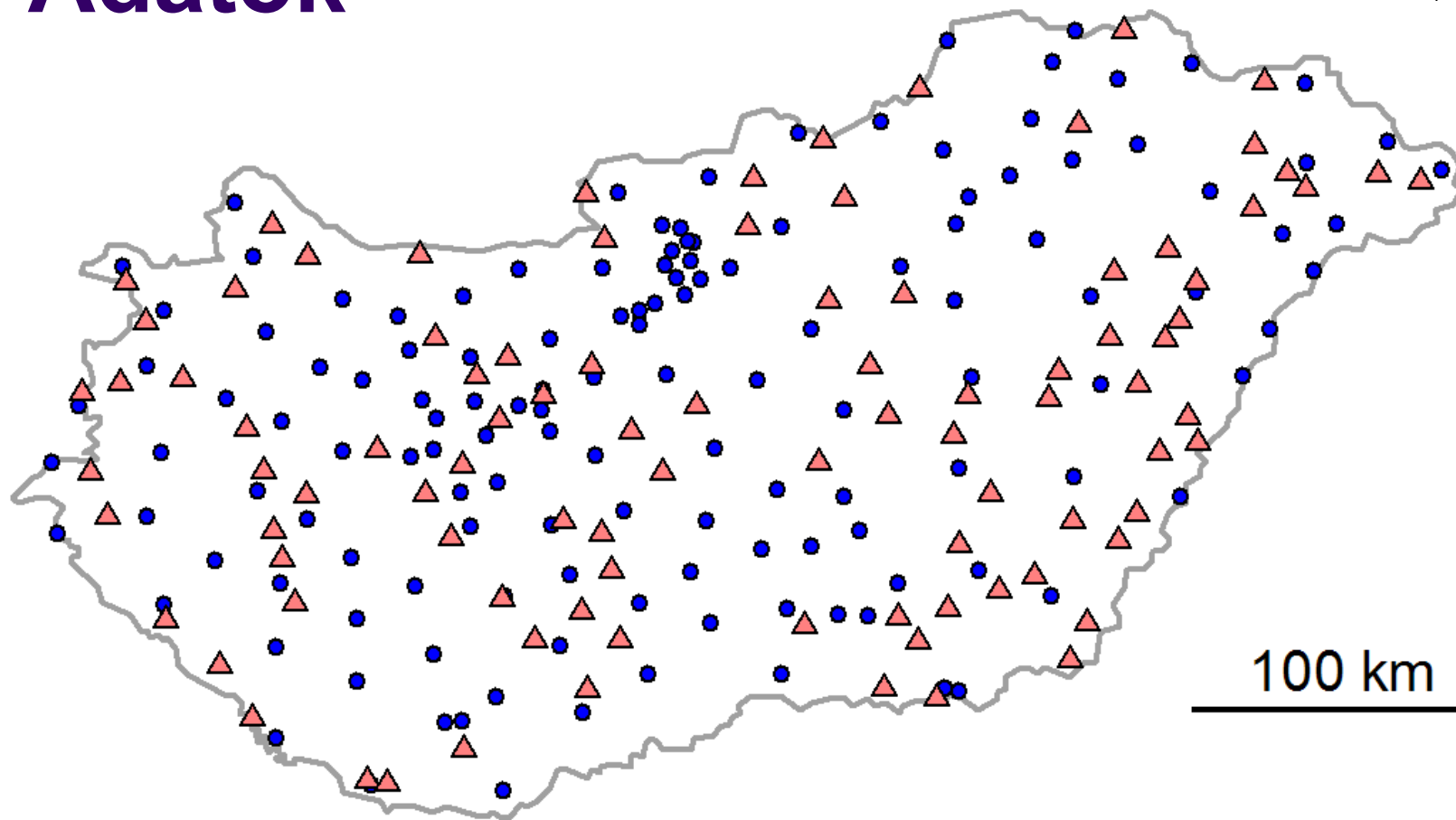
- illesztett asztrogravimetriai, gradiometriai, GPS/szintezési kvázigeoid megoldás
- GPM98CR / GGM02CB geopotenciális modell (720 fokig)
- felhasznált adatok:
 - 6678 átlag szabadlevegő nehézségi rendellenesség 2'×3' méretű blokkokra
 - 276 (2 × 138) asztrogeodéziai függővonal elhajlás
 - 7452 Eötvös-inga nehézségi gradiens összetevő
 - 95 GPS/szintezési pont
 - 267 EGG97 kvázigeoid magasság (az országon kívül)
 - DTM adatok: SRTM3

Adatok



- átlagos nehézségi rendellenesség
- EGG97 geoidmagasság
- ▲ Vízszintes gravitációs gradiens

Adatok



- függővonal elhajlás (ξ, η)
- ▲ GPS/szintezés

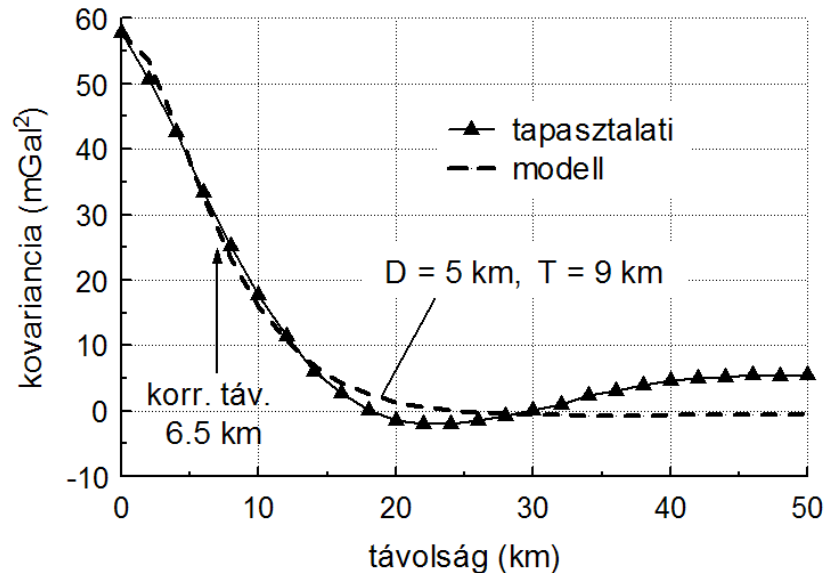
Kovariancia függvények



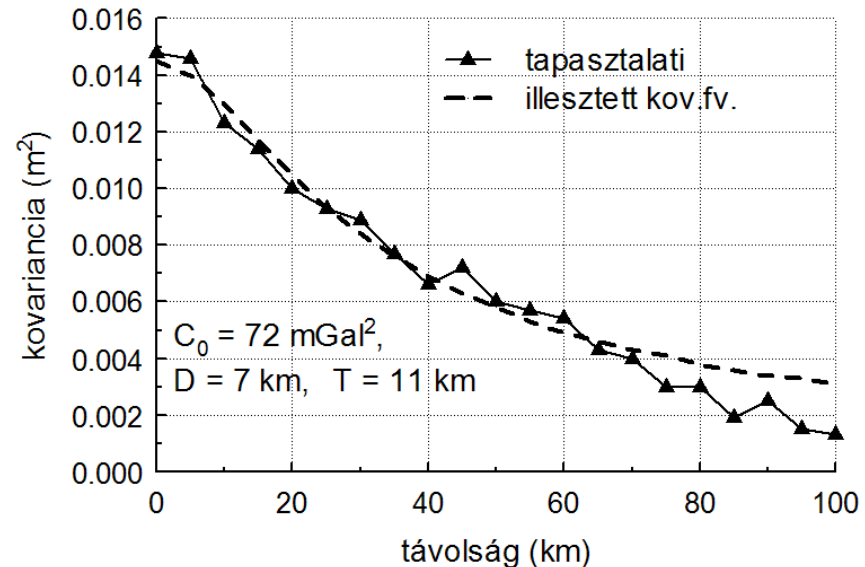
- Térbeli logaritmusos kovariancia modell (Forsberg, 1987)

$$C(\Delta g^{h_1}, \Delta g^{h_2}) = -C_0 \sum_{i=1}^4 \alpha_i \ln \left(D_i + h_1 + h_2 + \sqrt{s^2 + (D_i + h_1 + h_2)^2} \right)$$

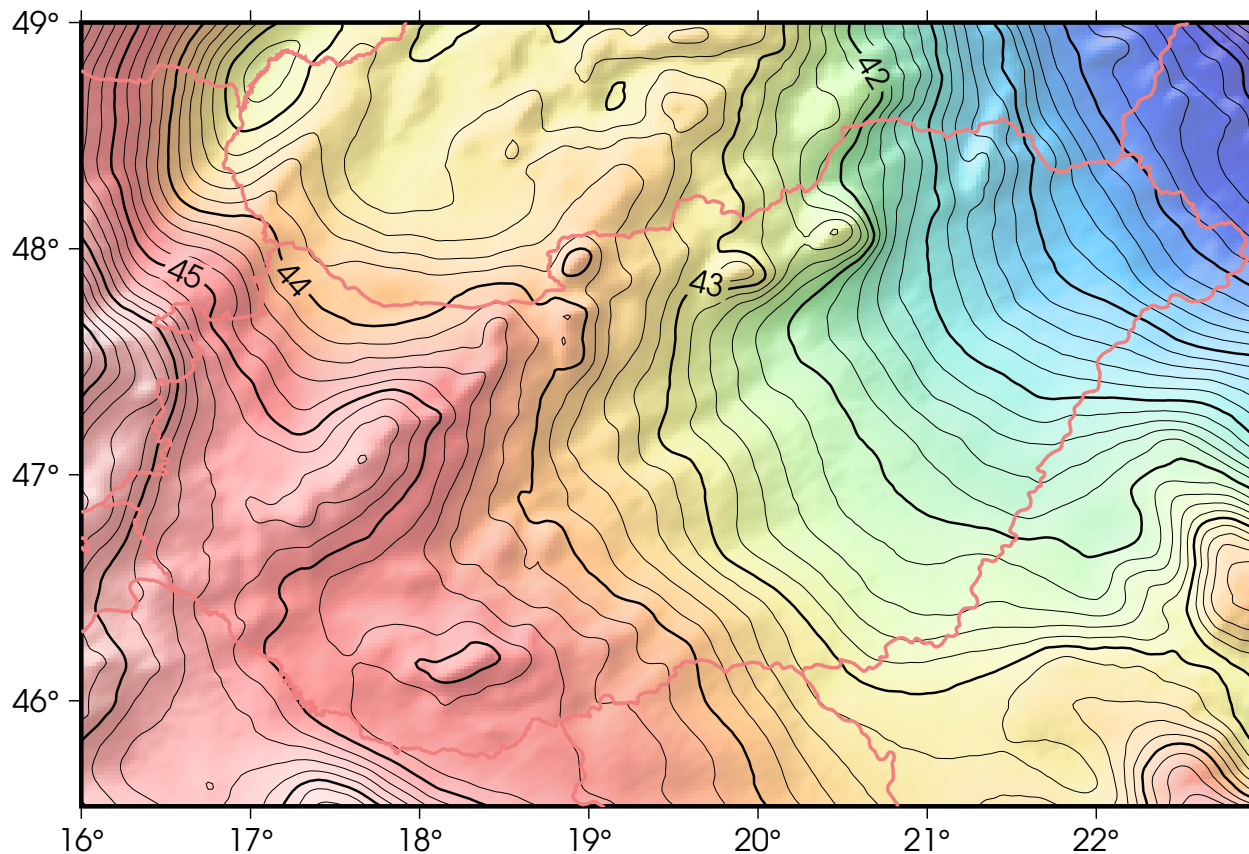
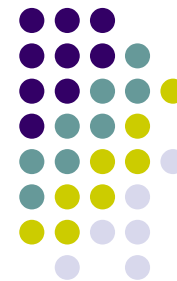
RTM nehézségi rendellenesség kovariancia



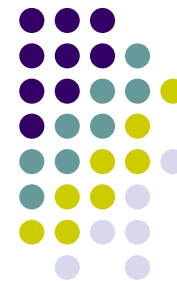
GPS/szintezés autokovariancia



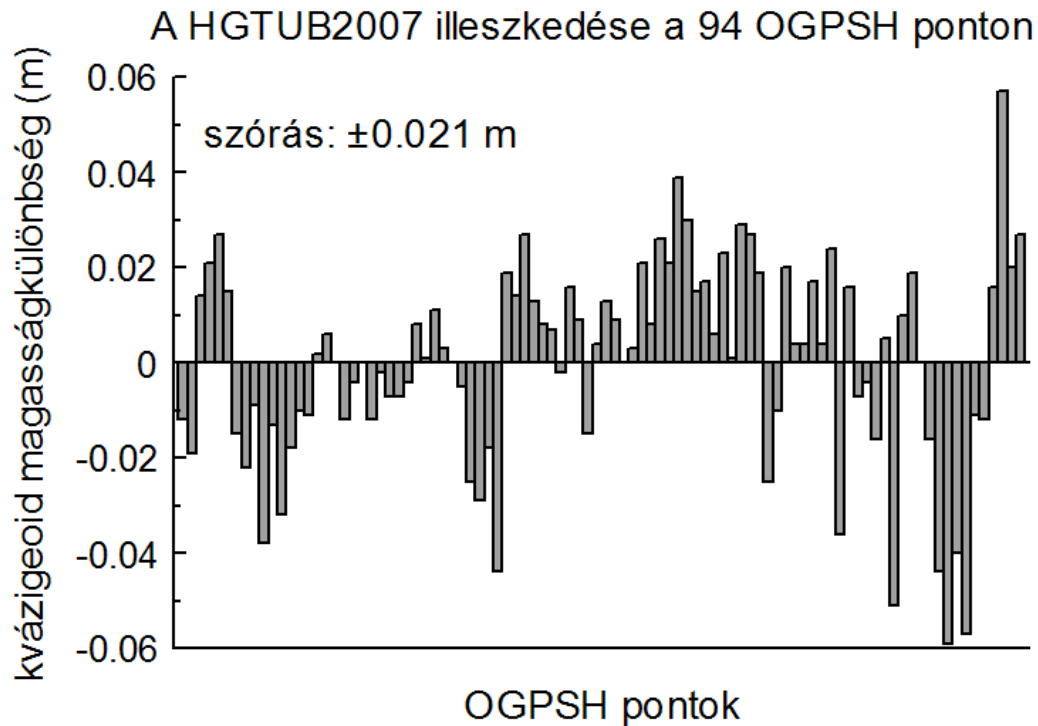
HGTUB2007 kvázigeoid undulációk



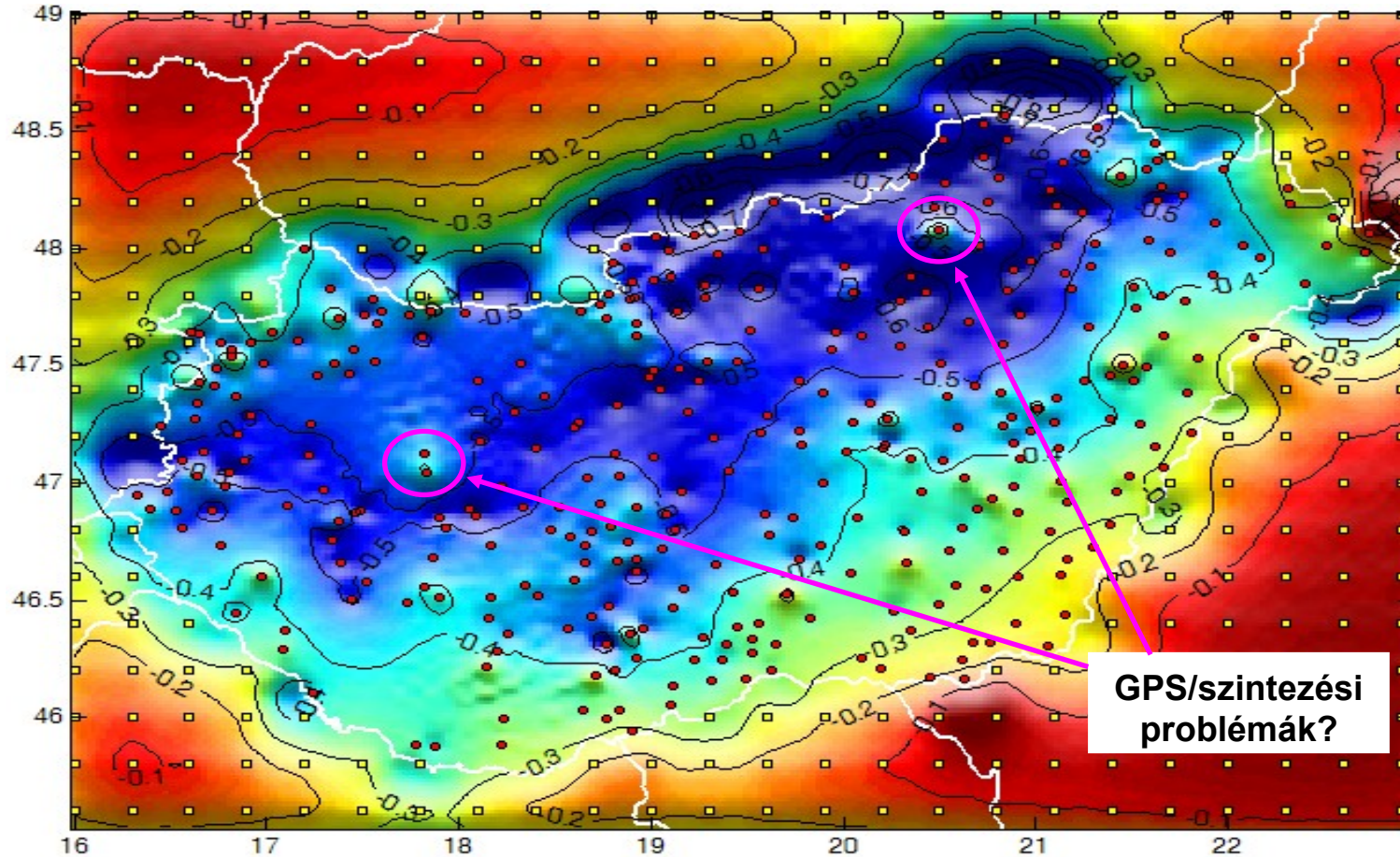
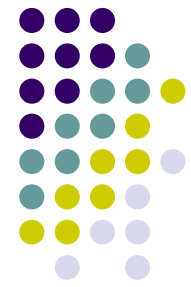
A kvázigeoid megoldás illeszkedése



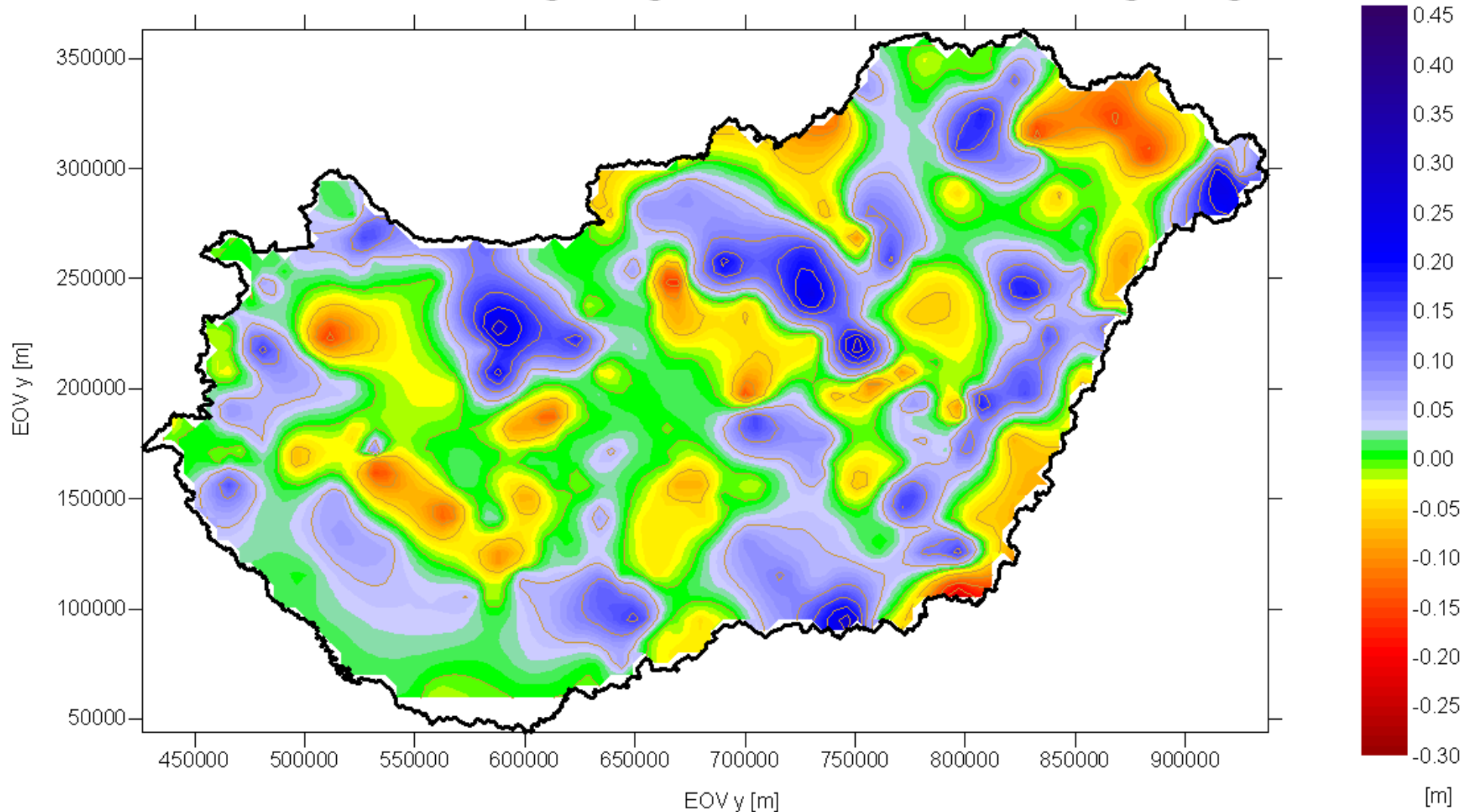
- az OGPSH pontjaira: ± 2.1 cm (eltérések szórása), ± 6 cm (max/min)
- az EUVN pontjaira (7 db): ± 4.2 cm (eltérések szórása)



Asztrogravimetriai és GPS/szintezésre „illesztett” megoldások eltérése



OGPSH szintezett magasság - hivatalos EOY HGPS magasság

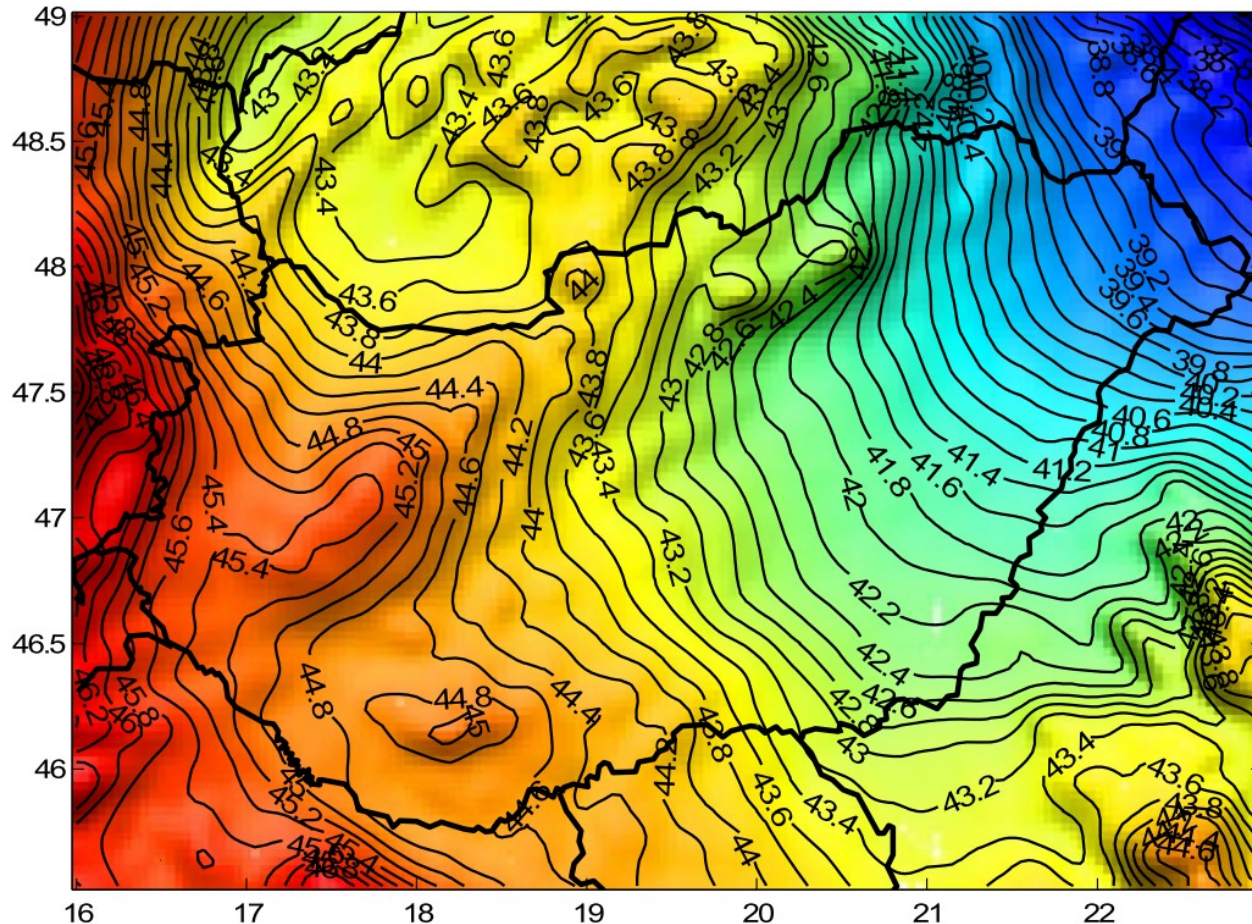


5. Asztrogeodéziai és GPS/szintezési megoldás EGM2008 modellel

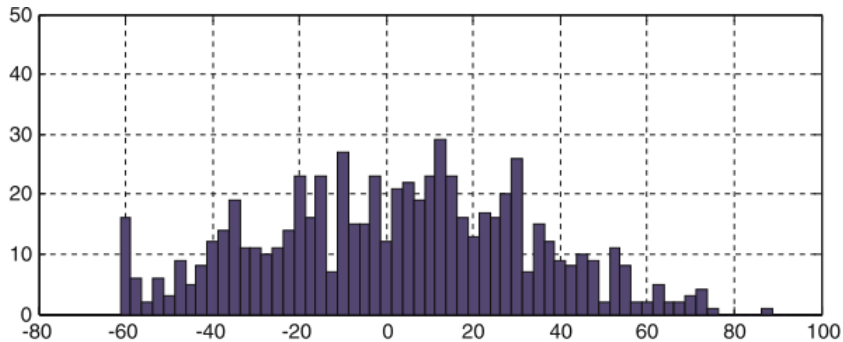
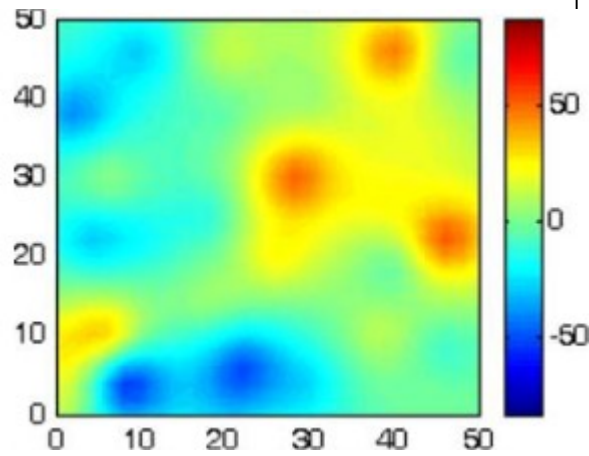
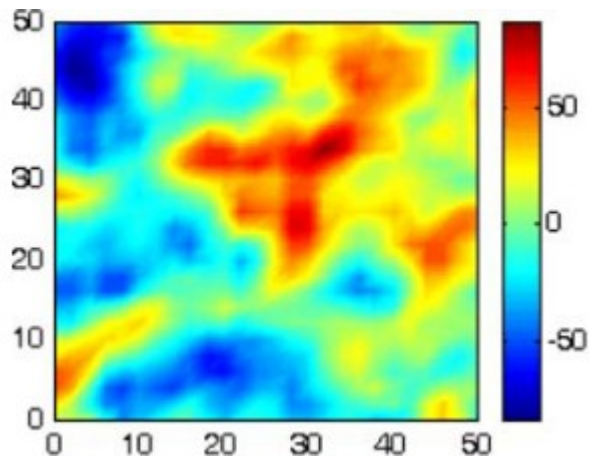


- Szűcs Eszter (2009) diplomamunkája
- felhasznált adatok:
 - 138 pontbeli (ξ, η)
 - 340 szintezett OGPSH pontbeli unduláció
 - EGM2008 geopotenciál modell (2160 fokig és rendig, 4 802 666 C_{nm} és S_{nm} együttható)
- N számítása $2' \times 3'$ felbontású rácsra

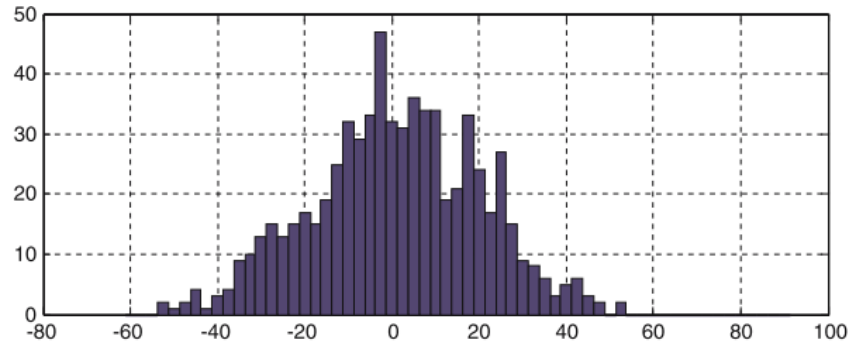
Az elkészült asztrogeodéziai megoldás



Probléma: LKN kollokáció túlzott simító hatása



eredeti jel



LKN kollokált jel

Erőtér modellezés gömbi radiális bázisfüggvényekkel



- Tetszőleges F erőter mennyiség becslésének funkcionális modellje

$$F(r_i) + e(r_i) = \sum_{k=1}^K x_k B(r_i, r_k)$$

- $F(r_i)$ mérés $e(r_i)$ mérési hibák (javítások) segítségével az x_k inverziós paraméterek becsülhetők – lineáris egyenletrendszer keletkezik
 - ez akkor igaz, ha az r_k bázisfüggvények helye adott
 - szabályos rácson vagy szabálytalan ponteloszlásban
 - ha az r_k bázisfüggvények helye is ismeretlen, nemlineáris az egyenletrendszer

Gömbi radiális bázisfüggvények (SRBF)

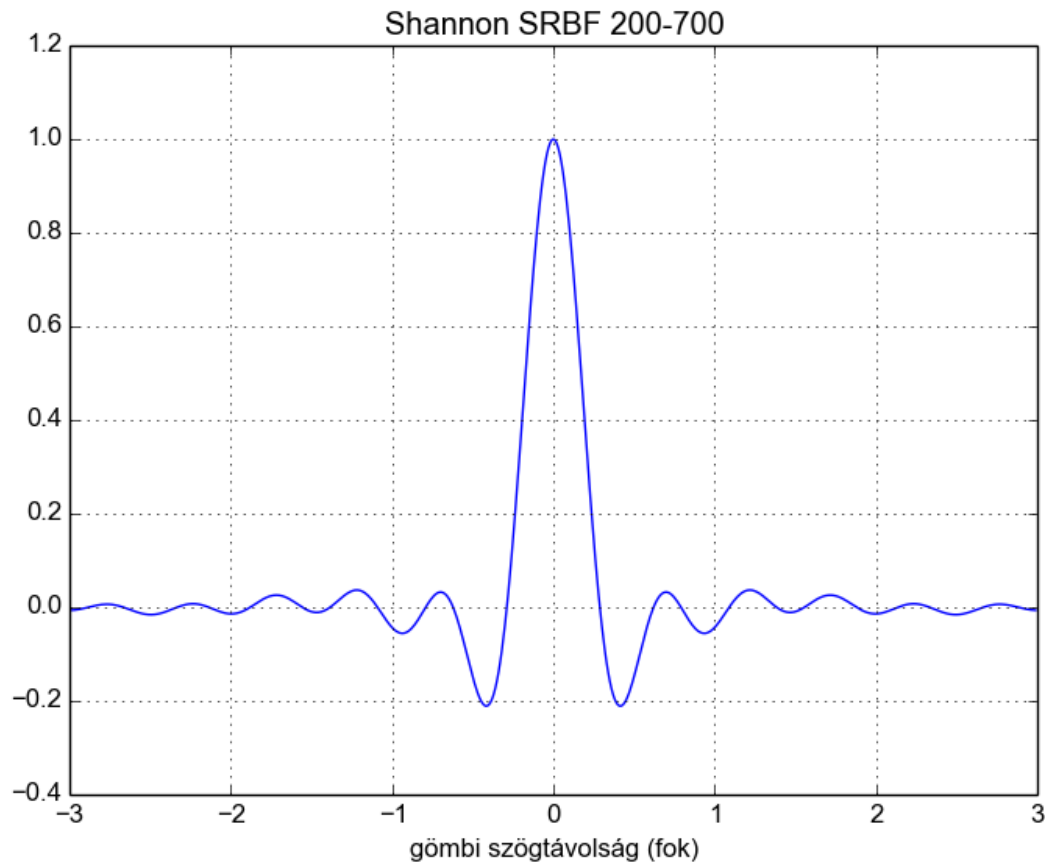
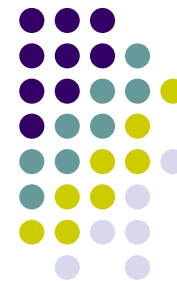


- A nehézségi erőter **regionális** modellezését teszik lehetővé
- lokalizált **harmonikus** függvények (Laplace-egyenlet megoldásai):

$$B(r_i, r_k) = \sum_{n=N_{min}}^{N_{max}} (2n+1) \left(\frac{r_k}{r_i} \right)^{n+1} b_n P_n(\hat{r}_i \cdot \hat{r}_k)$$

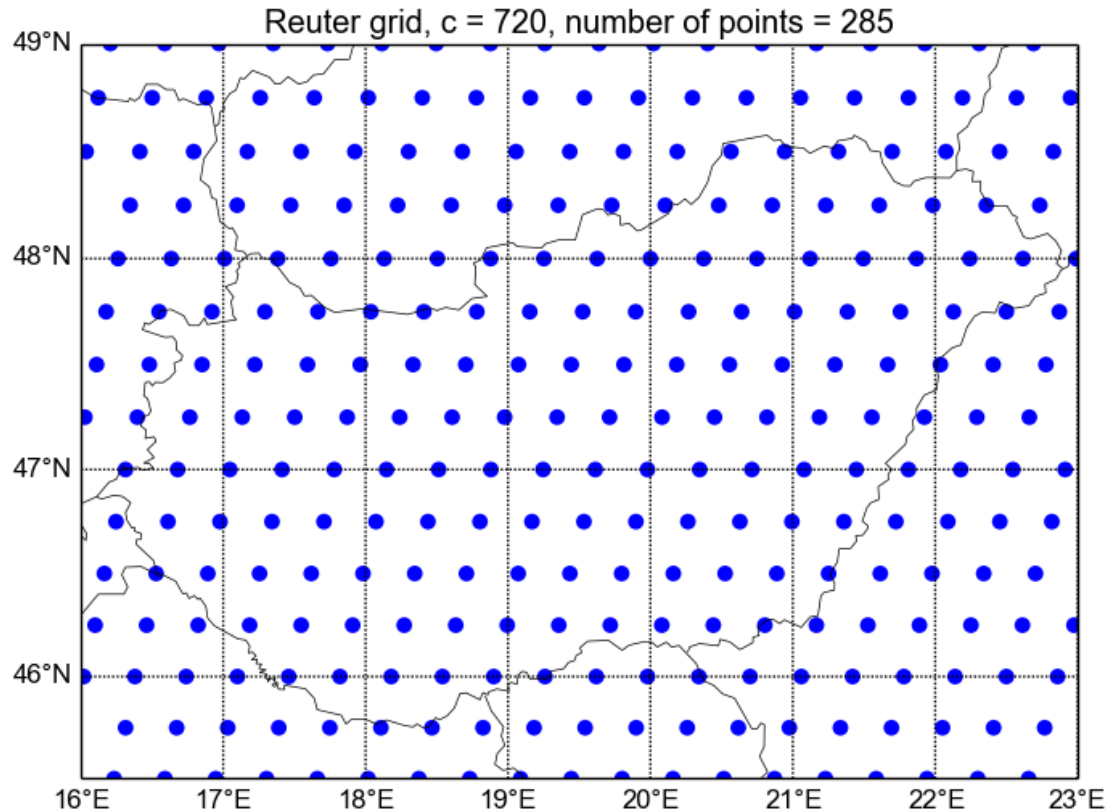
- r_k **hely** és a b_n **együtthatók** szabadon megválaszthatók
 - r_k = adatpontok és a b_n = fokvarianciák: **LKN kollokáció**
 - $b_n = 1$ minden n -re: **Shannon RBF**
 - tömegpontokkal (ún „maszkon”) való erőter modellezés
 - szoros kapcsolatban vannak a gömbfüggvényekkel

Shannon RBF ($N_{\min} = 200$, $N_{\max} = 700$)



Reuter rács

- A gömbfelszínen homogén ponteloszlás
- A rács c paramétere a felbontást jellemzi



SRBF erőter modellezés előnyei



- paraméterbecslés a mérési adatok teljes hibajellemzőinek figyelembe vételével, **a kiegyenlítő számítások teljes eszköztárával**
- a lokális bázisfüggvények helyzete, távolsága, spektrális jellemzői **adaptálhatók** a rendelkezésre álló adatok felbontásához és jellemzőihez
- a bázisfüggvények x_k paramétereiből **közvetlenül gömbfüggvény együtthatókat kaphatunk** (pl. fokvarianciák számíthatók!)
- különböző típusú erőter adatok **kombinálhatók** (GPS/szintezés, geopotenciális értékek, nehézségi rendellenességek, függővonal-elhajlás összetevők, Eötvös-inga mérések, mesterséges holdas mérések, GRACE, GOCE)
- az ismeretlenek száma a **bázisfüggvények** számával azonos (LKN kollokáció: az **adatok** számával azonos)

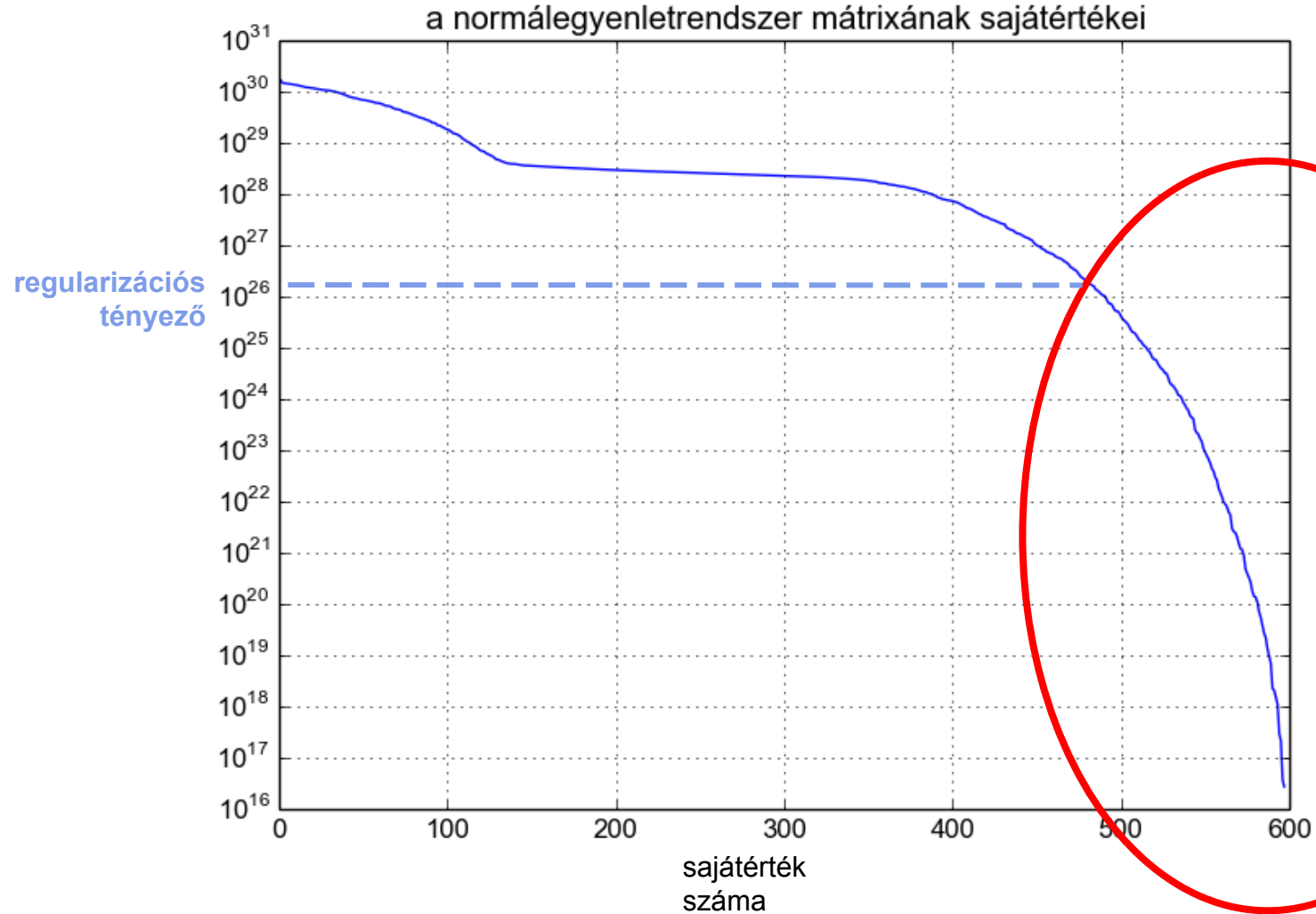
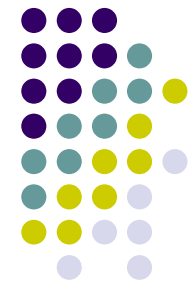


Regularizáció

- Tyihonov-féle regularizáció
 - regularizációs tényező kiinduló becslése
 - iteratív finomítás
- Cél: fizikailag értelmes megoldás meghatározása

$$\|e\|^2 + \|\Gamma \mathbf{c}\|^2 = \|\mathbf{B}\mathbf{c} - \mathcal{W}\|^2 + \|\Gamma \mathbf{c}\|^2 = \min$$

Miért szükséges a regularizáció?

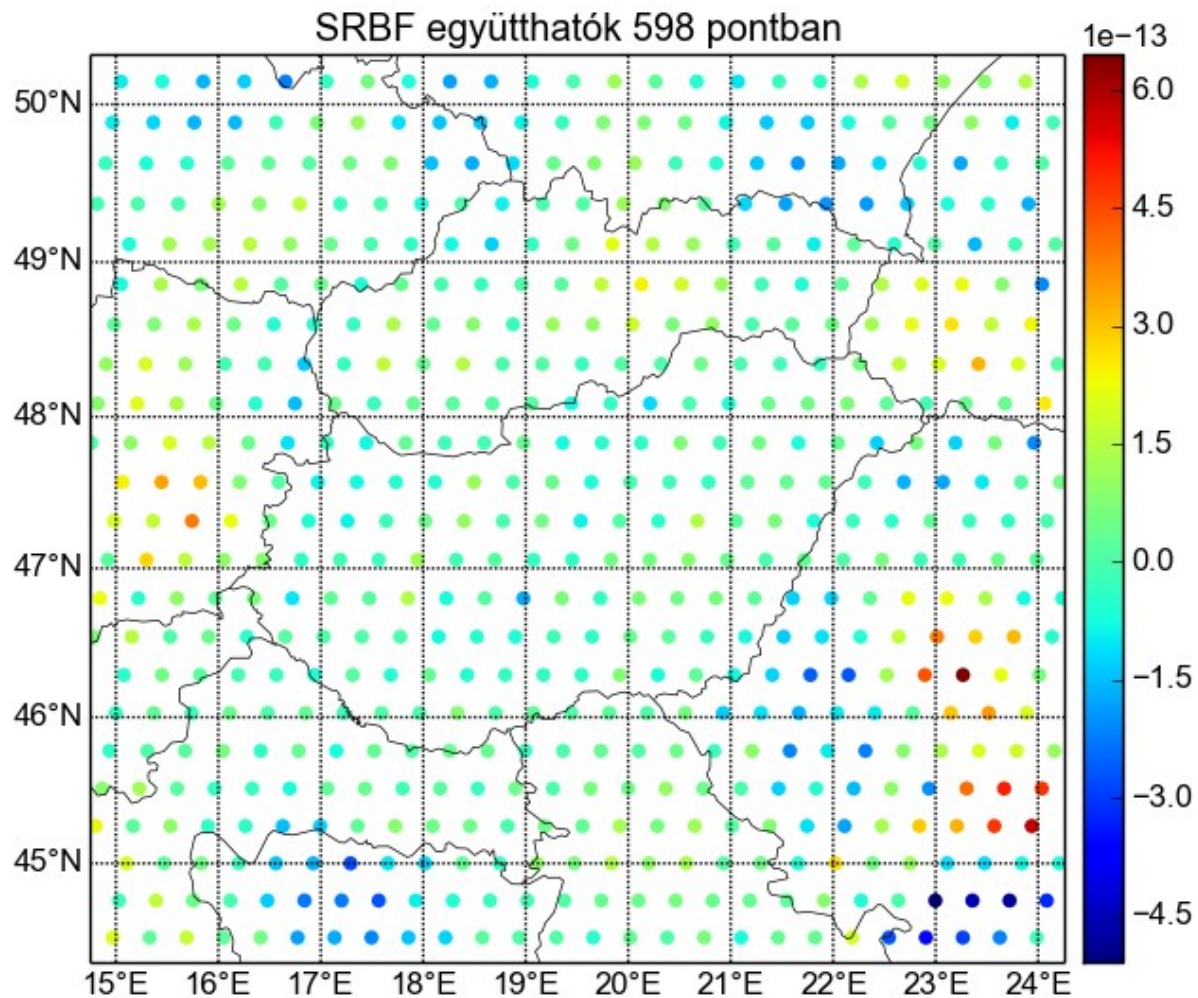


A mérések relatív súlyainak meghatározása

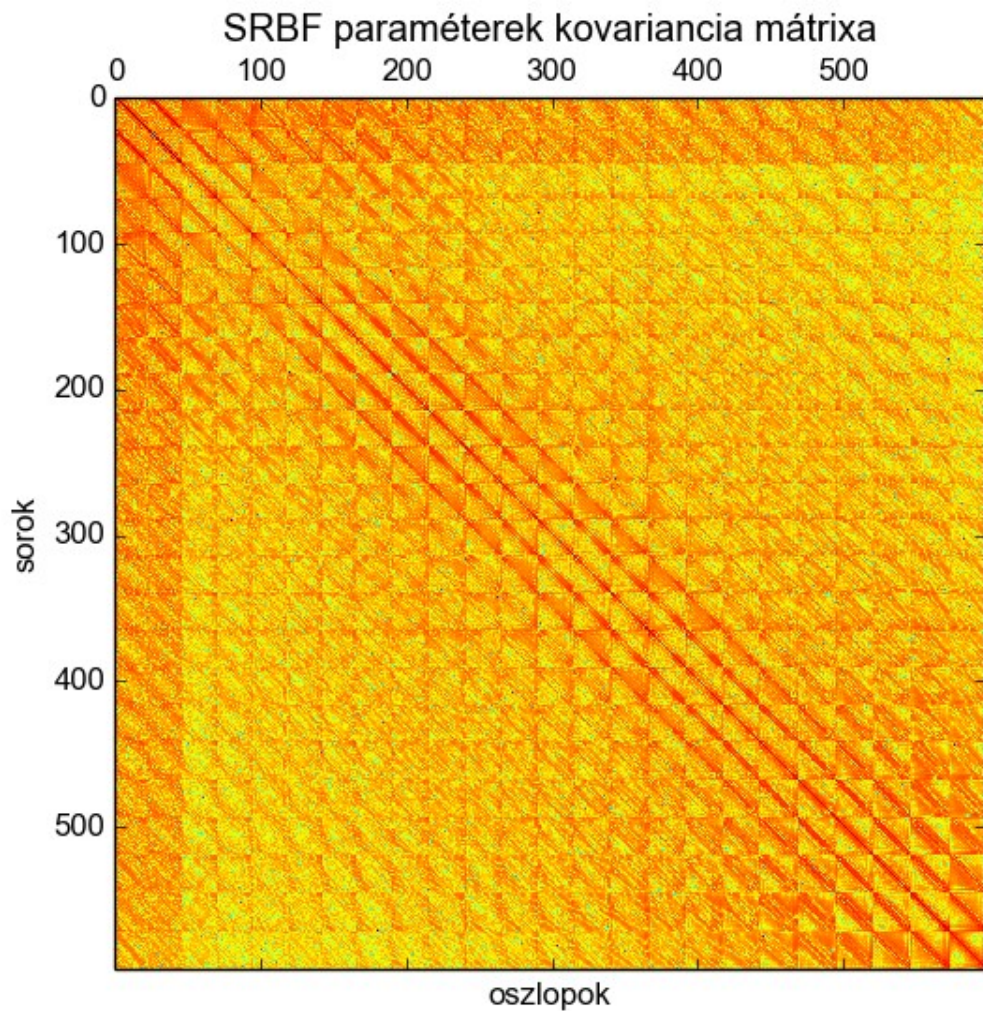


- A mérések **relatív súlytényező**inek iteratív becslése
 - **VCE**: Variance Component Estimation (Koch és Kusche, 2002)
 - a regularizációs tényező is meghatározható súlytényezőként

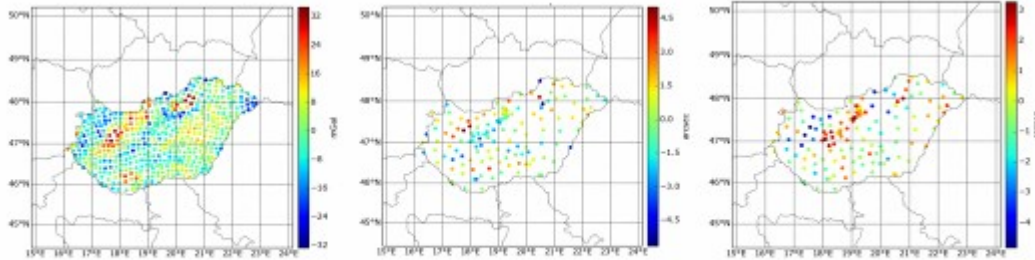
A meghatározott paraméterek



A paraméterek kovariancia mátrixa



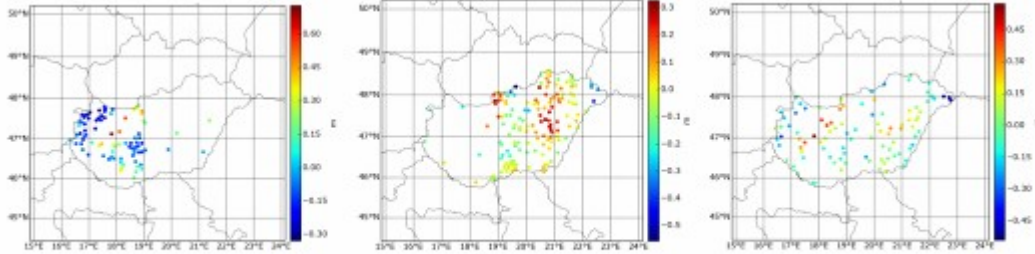
Bemenő adatok (összesen: 154 477)



Δg

ξ

η

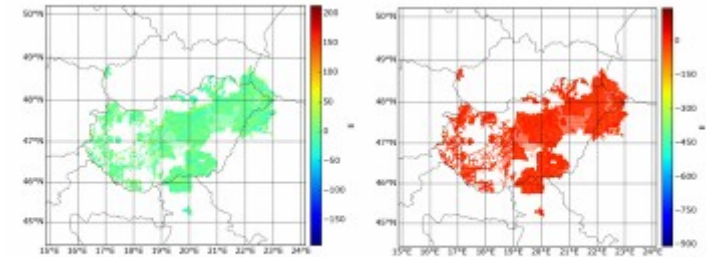


$\zeta_{Bendefy}$

ζ_{EOMA}

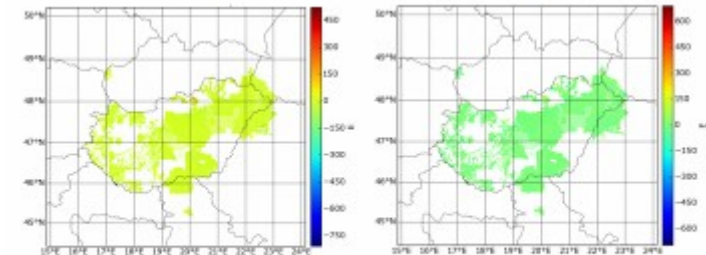
$\zeta_{EOMA,RL}$

- nehézségi rendellenesség
- függővonal-elhajlás
- GNSS/szintezés



V_{xz}

V_{yz}



V_{yy-xx}

$2V_{xy}$

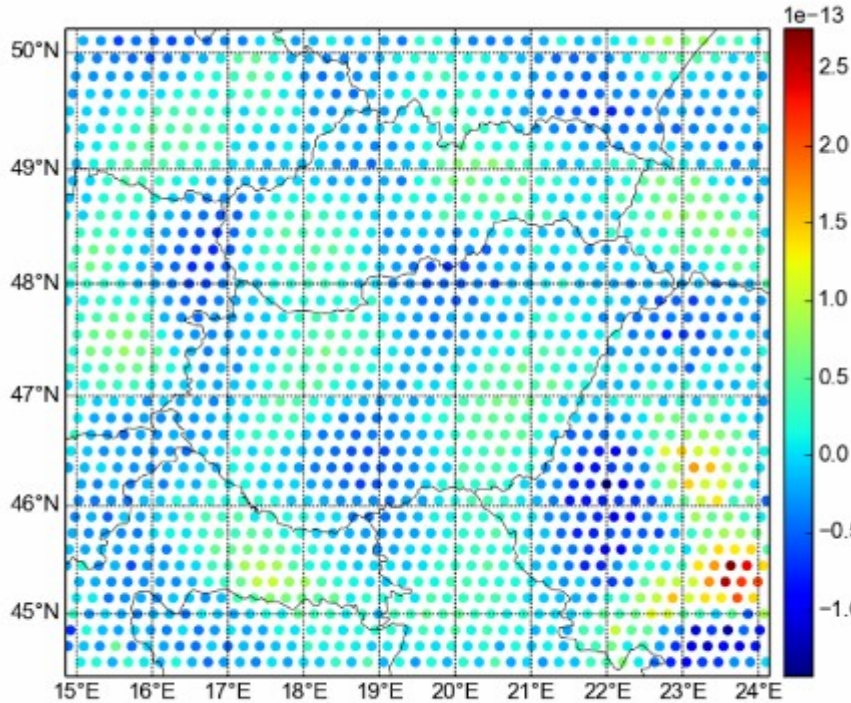
- Eötvös-inga mérések
- vízszintes és görbületi gradiensek

Adatok redukciója



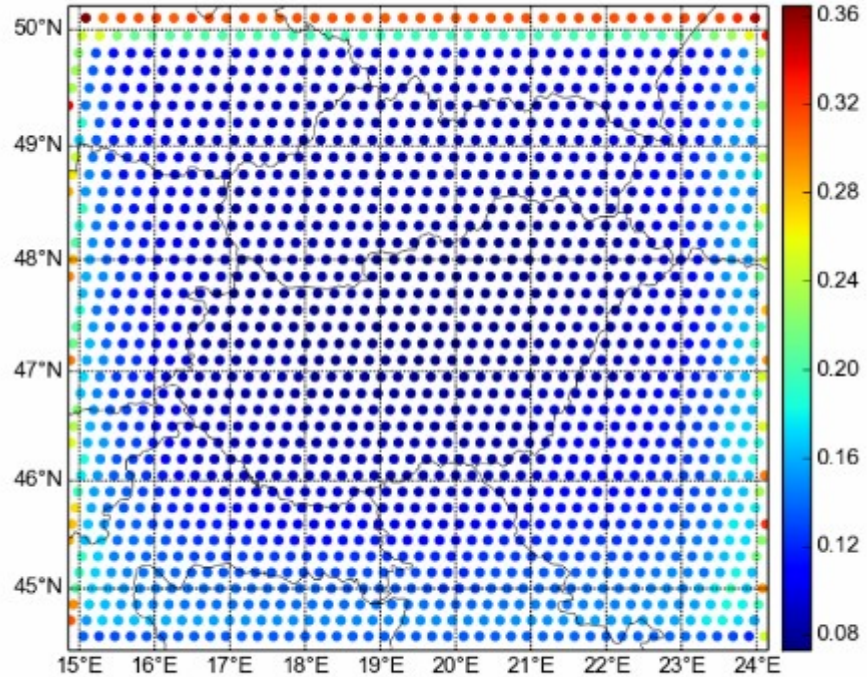
- EGM2008
- EIGEN-6C4 (Förste et al. 2014)
- GOCE DIR R5 és EGM2008
- ERTM2160 nagyfelbontású DTM az RTM redukció elvégzéséhez (Hirt et al. 2014)

Eredmények: paraméterek és hibáik



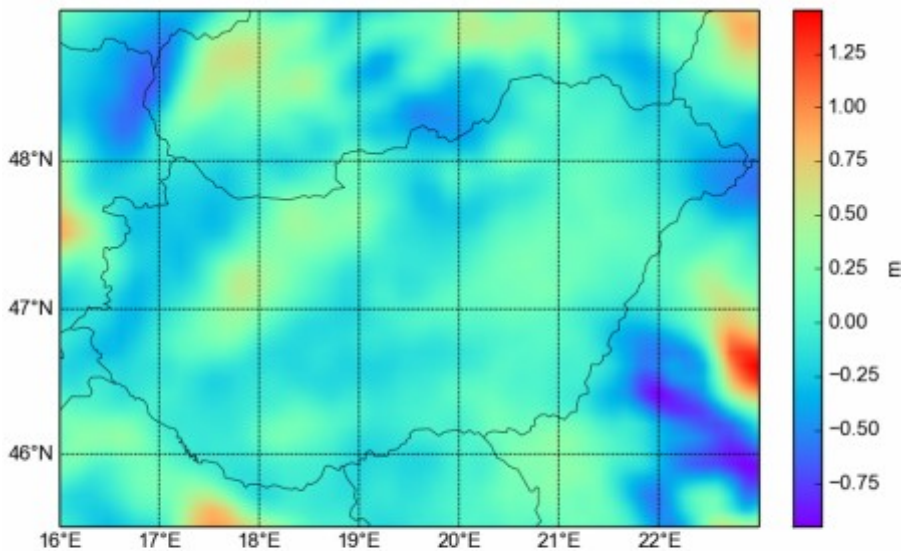
SRBF paraméterek

1633 paraméter

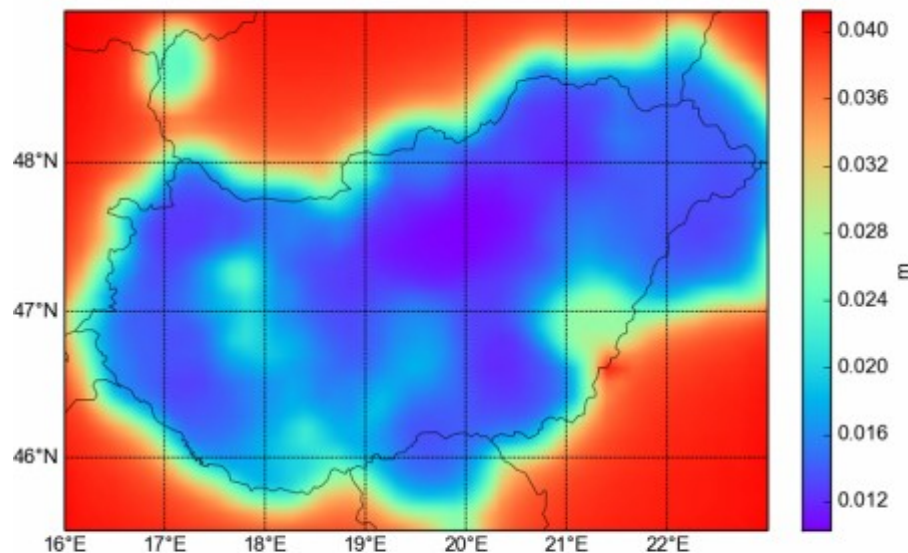


paraméterek relatív hibái

Eredmények: kvázigeoid

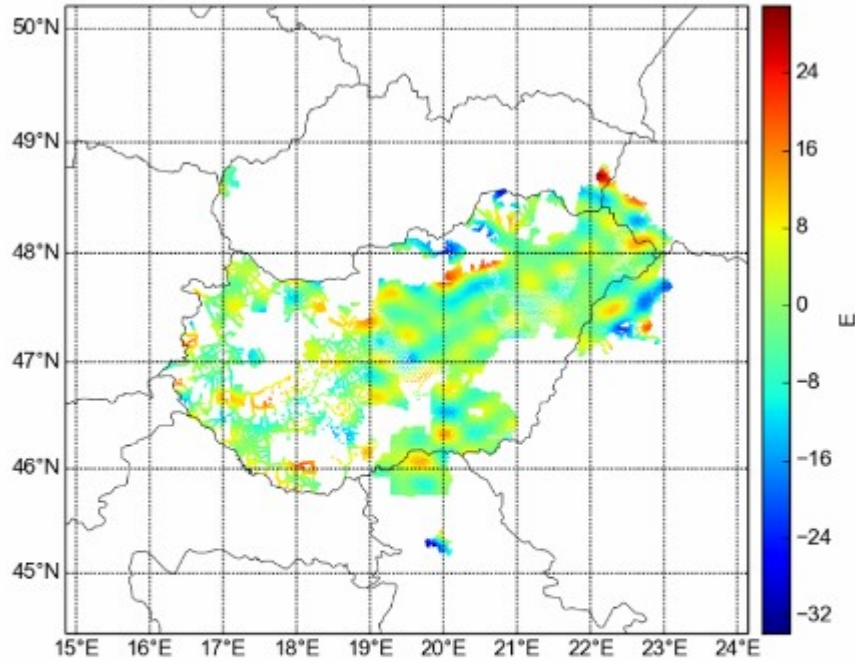


becsült maradék kvázigeoid

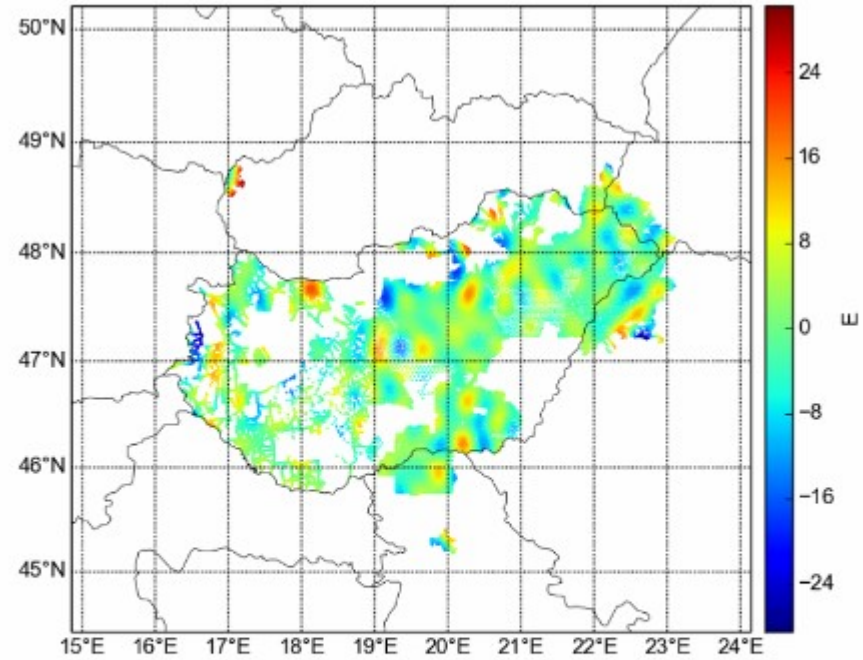


becsült kvázigeoid hibák

Eredmények: W_{xz} , W_{yz} modellezett része



V_{xz}



V_{yz}

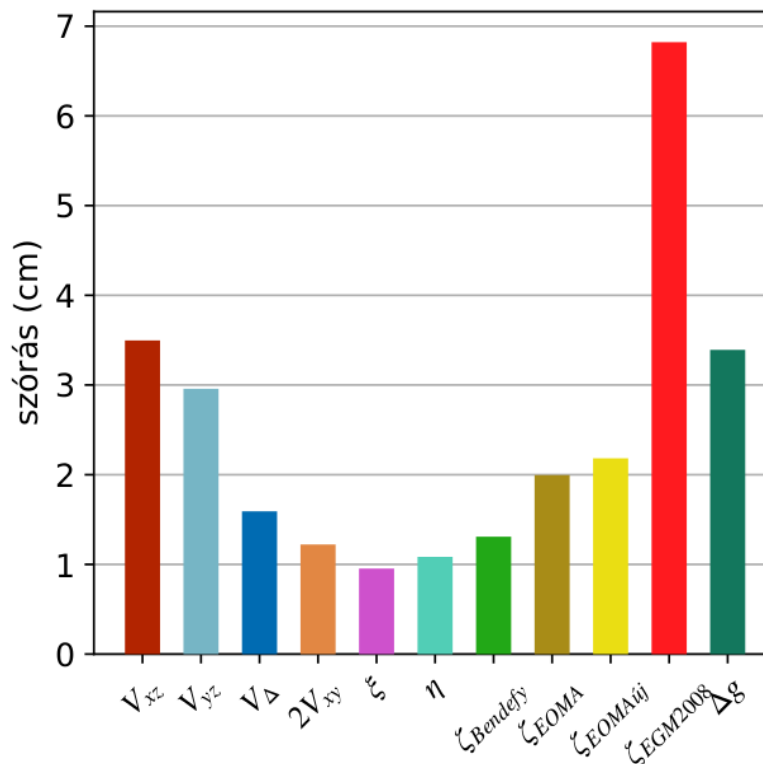
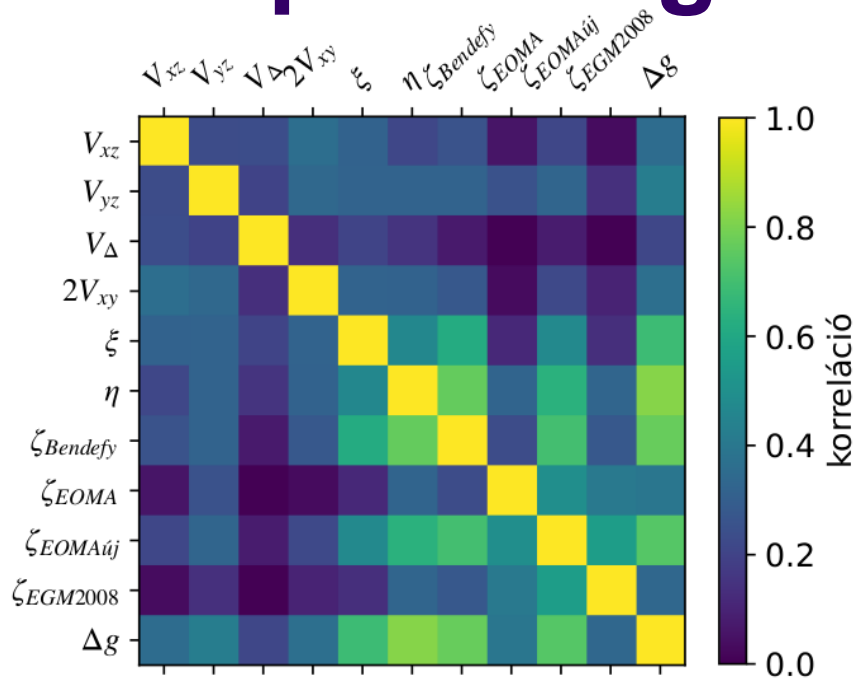
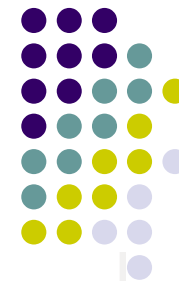
GPM-ek összehasonlítása



data	desc.	V_{xz}	V_{yz}	V_{yy-xx}	$2V_{xy}$	ξ	η	ζ_{Bendoly}	ζ_{DOMA}	ζ_{DOMARL}	ζ_{GPMOUT}	Δg	ζ_{GPMHU}
200-1200	No.	37610	37610	37272	37272	138	138	86	148	96	3598	509	1024
model	unit	E	E	E	E	arcsec	arcsec	meter	meter	meter	meter	mGal	meter
EGM2008 200-1200	std.	±14.06	±14.73	±28.15	±28.74	±1.827	±1.730	±0.220	±0.144	±0.199	±0.429	±10.44	±0.051
	mean	8.210	0.050	2.640	1.610	-0.252	0.382	0.433	0.515	0.501	-0.003	-1.630	0.015
	σ_{VCE}	±5.56	±6.01	±12.16	±12.47	±0.93	±0.92	±0.34	±0.23	±0.22	±0.26	±5.12	min: -0.187
	SNR	-2.87 dB	-3.44 dB	-5.88 dB	-5.76 dB	1.98 dB	2.44 dB	4.78 dB	2.53 dB	4.84 dB	7.74 dB	2.66 dB	max: 0.227
EIGEN-6C4 200-1200	std.	±14.06	±14.71	±28.14	±28.73	±1.820	±1.715	±0.222	±0.134	±0.195	±0.428	±10.35	±0.051
	átl.	8.204	0.030	2.622	1.598	-0.253	0.390	0.436	0.503	0.495	-0.004	-1.762	0.013
	σ_{VCE}	±5.55	±6.00	±12.16	±12.46	±0.93	±0.91	±0.34	±0.23	±0.23	±0.25	±5.10	min: -0.189
	SNR	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.97 dB	2.43 dB	4.44 dB	2.39 dB	4.35 dB	7.82 dB	2.65 dB	max: 0.224
GOCE R05-EGM08 200-1200	std.	±14.06	±14.73	±28.15	±28.74	±1.829	±1.700	±0.223	±0.135	±0.195	±0.420	±10.33	±0.056
	átl.	8.206	0.009	2.644	1.595	-0.252	0.382	0.440	0.504	0.496	-0.005	-1.705	0.013
	σ_{VCE}	±5.55	±6.01	±12.16	±12.47	±0.93	±0.92	±0.35	±0.26	±0.26	±0.25	±5.16	min: -0.206
	SNR	-2.88 dB	-3.44 dB	-5.90 dB	-5.77 dB	1.91 dB	2.30 dB	4.05 dB	1.86 dB	3.65 dB	7.92 dB	2.57 dB	max: 0.219

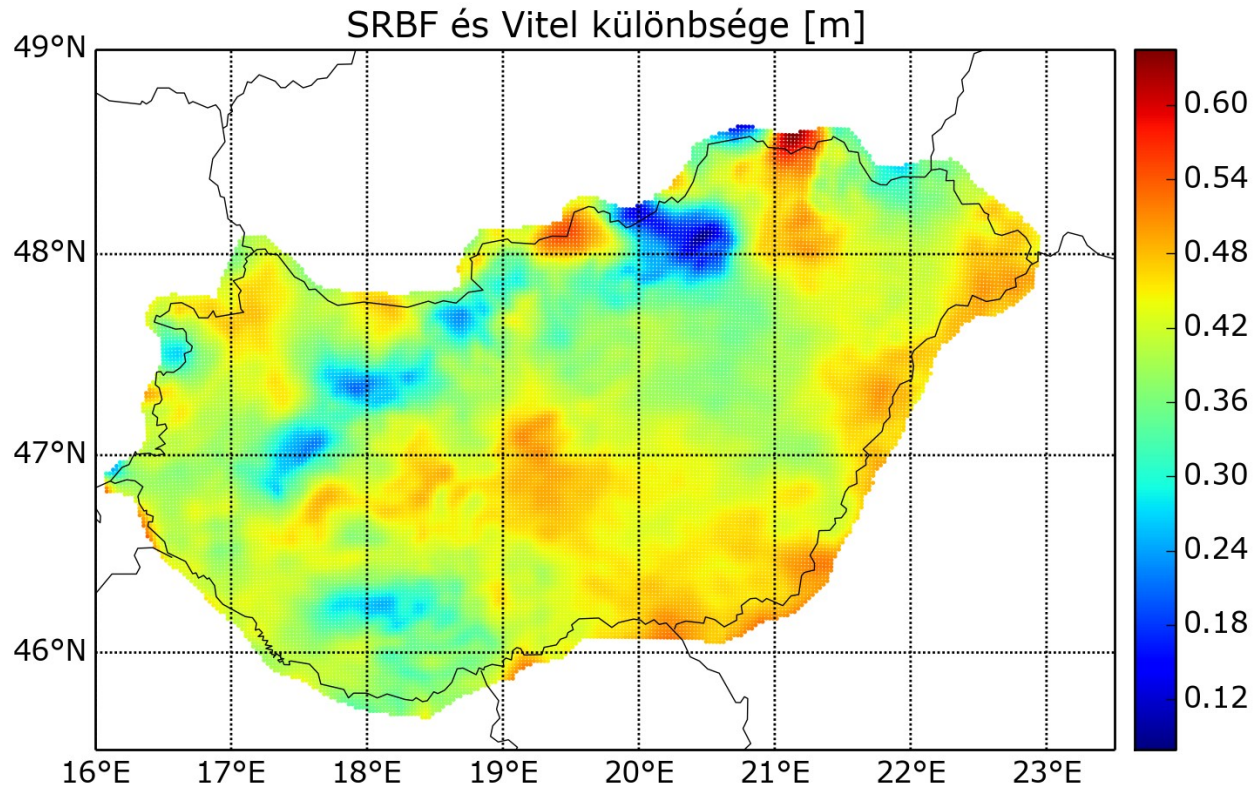
a három geopotenciális modellel kapott eredmények

Az egyes adatrendszerek szerepe a megoldásban



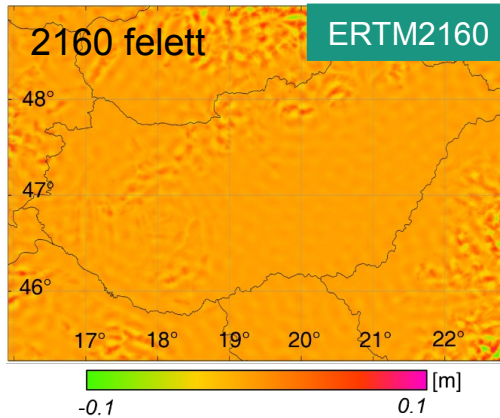
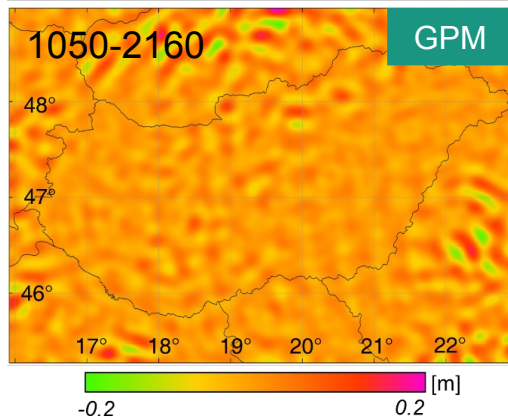
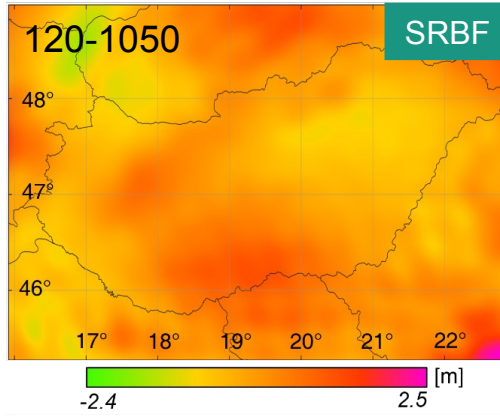
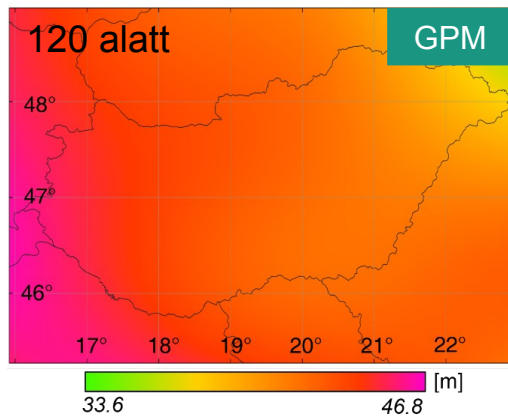
az EGM2008 geopotenciális modellel kapott eredmények

Eltérések a VITEL 2014 pontokban



nem cm
pontos
geoid

SRBF geoidmeghatározás GOCE adatokkal (Tóth S. 2021)



Mérési adatok:

GOCE [W_{zz}]

GNSS/szintezett pontok [ζ]

Szabadlevegő nehézségi rendellenességek [Δg]

Függővonal-elhajlás értékek [ξ, η]

Geopotenciál modell:

EIGEN-6c4 (6c4)

XGM2019e (xgm)

RTM modell:

ERTM2160

Potenciálfüggvény inverziós előállítás polinomokkal

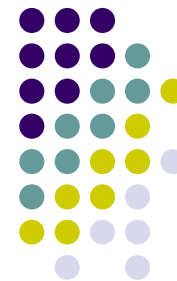


- A meghatározandó $W(x,y)$ potenciálfüggvényt kétváltozós $P_n(x)$ polinom bázisfüggvények szerint bontjuk fel B_j együtthatókkal:

$$W(x,y) = \sum_{n=0}^P \sum_{i=0}^n B_j P_i(y) P_l(x)$$

$$j = \frac{n(n+1)}{2} + i \qquad l = n - i$$

Hatványpolinomok és együtthatók



n	j	i	l	$P_i(y)P_l(x)$	B_j
0	0	0	0	1	B_0
1	1	0	1	x	B_1
	2	1	0	y	B_2
2	3	0	2	x^2	B_3
	4	1	1	xy	B_4
	5	2	0	y^2	B_5

GNSS/szintezés és függővonal-elhajlás mérések



- GNSS/szintezés:

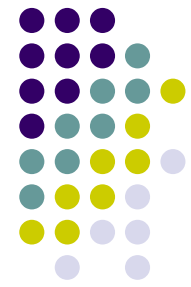
$$W(x, y) = \gamma N(x, y)$$

- függővonal-elhajlás összetevők:

$$W_x(x, y) = -\gamma \xi(x, y)$$

$$W_y(x, y) = -\gamma \eta(x, y)$$

GNSS/szintezés és függővonal-elhajlás mérések



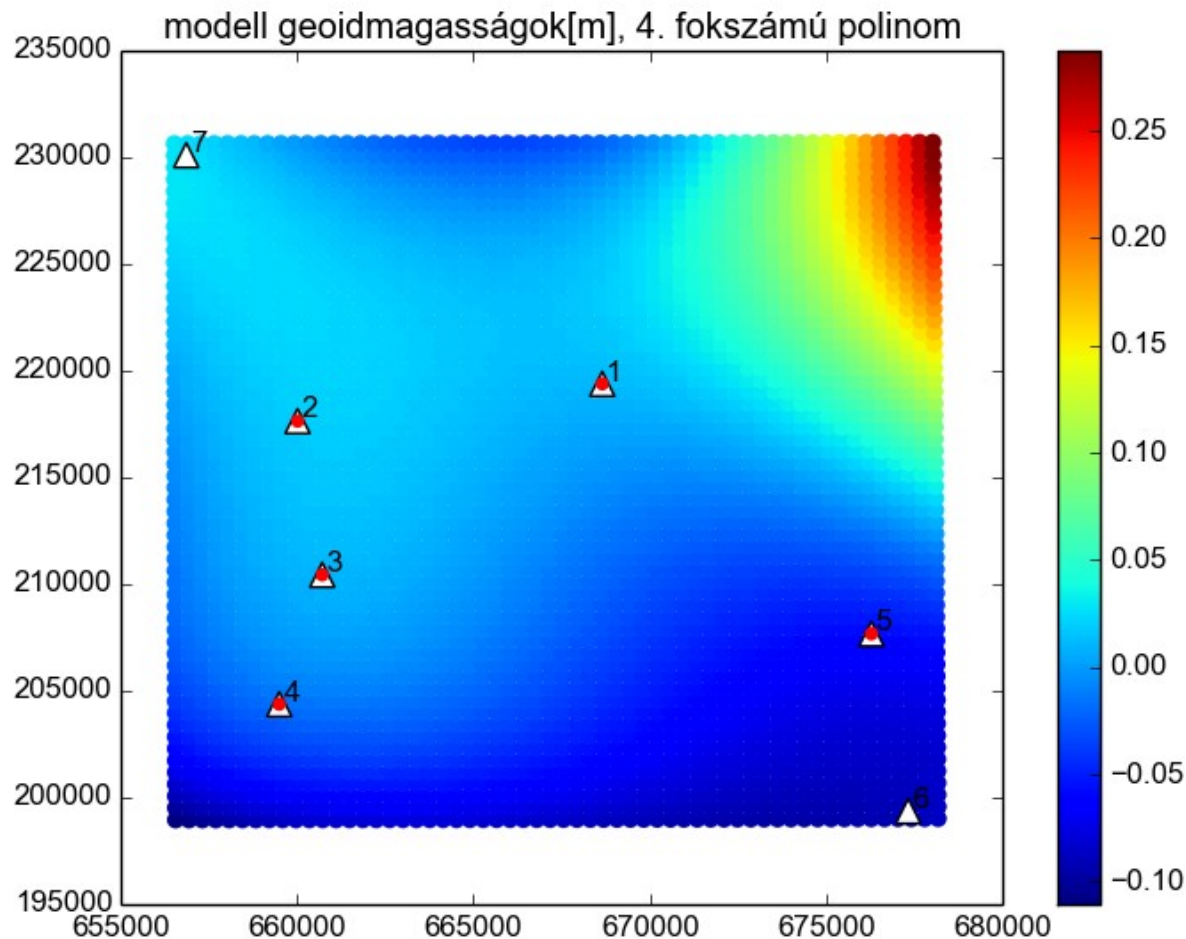
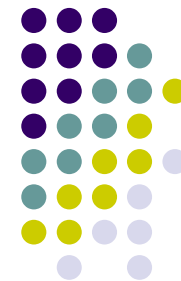
- GNSS/szintezés:
$$\gamma N(x, y) = \sum_{n=0}^P \sum_{i=0}^n B_j P_i(y) P_l(x)$$

- függővonal-elhajlás összetevők:

$$-\gamma \xi(x, y) = \sum_{n=0}^P \sum_{i=0}^n B_j P_i(y) P_l'(x)$$

$$-\gamma \eta(x, y) = \sum_{n=0}^P \sum_{i=0}^n B_j P_i'(y) P_l(x)$$

Példa: inverziós teszt számítás





folytatás: alkalmazott szoftverek