



8. előadás

Áttekintés

- Kálmán szűrés *lineáris* esetben (ismétlés)
- Kálmán szűrés *nem lineáris* esetben

Kibővített Kálmán szűrő (**EKF**)

nem lineáris mérési és állapot egyenlet

példák: odometria, kerék gyorsulásmérő

Szagtalan Kálmán szűrő (**UKF**)

szigma pontok és súlyok

példa: odometria

Kálmán szűrő lineáris rendszer modellje (Welch és Bishop jelöléseivel)

- állapot átmeneti mátrix: A
- kezdeti rendszer állapot és annak kovariancia mátrixa: \mathbf{x}_0, P_0
- vezérlési mátrix: B
- rendszer zaj kovariancia mátrix: Q
- mérési mátrix: H
- mérési zaj kovariancia mátrix: R

A Kálmán szűrő működése

1) Előző rendszer állapot és kovariancia becslése

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \quad \hat{\mathbf{P}}_{k-1}$$

2) A rendszer állapot és kovariancia előrejelzése

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = \mathbf{A} \hat{\mathbf{x}}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad \mathbf{P}_k^- = \mathbf{A} \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}^T + \mathbf{Q}$$

3) A mérés utáni állapot és kovariancia frissítés

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}^T + \mathbf{R})^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \mathbf{H} \hat{\mathbf{x}}_k^-) \quad \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}) \mathbf{P}_k^-$$

Kibővített Kálmán szűrő (EKF)

- A mérési egyenlet, az állapot átviteli egyenlet vagy mindkettő *nem lineáris*

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}_k, \mathbf{v}_k), \quad \mathbf{x}_k = f(\mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{w}_{k-1})$$

\mathbf{v}_k mérési zaj, \mathbf{w}_k rendszer zaj

- A pillanatnyi értékek (átlag, kovariancia) körüli *linearizációra* van szükség – Taylor sorfejtés
- Általában nem ismerjük az egyes zaj komponenseket, ezért közelítőleg nélkülük számítjuk ki a rendszer állapotát és a mérési vektort

Kibővített Kálmán szűrő

- A rendszer állapota és a mérési vektor

$$\tilde{\mathbf{x}}_k = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) \quad \tilde{\mathbf{z}}_k = h(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{0})$$

$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}$ előző becsült rendszer állapot

- A kibővített Kálmán-szűrő alapvető hiányossága az, hogy különböző valószínűségi változók eloszlása a nem lineáris transzformáció után már nem Gauss-féle, ezért a becslés nem is lehet optimális.

Linearizáció után

- A rendszer állapota és a mérési vektor

$$\mathbf{x}_k \approx \tilde{\mathbf{x}}_k + \mathbf{A} (\mathbf{x}_{k-1} - \hat{\mathbf{x}}_{k-1}) + \mathbf{W} \mathbf{w}_{k-1}$$

$$\mathbf{z}_k \approx \tilde{\mathbf{z}}_k + \mathbf{H} (\mathbf{x}_k - \tilde{\mathbf{x}}_k) + \mathbf{V} \mathbf{v}_k$$

$\mathbf{x}_k, \mathbf{z}_k$ rendszer állapot és mérés

$\tilde{\mathbf{x}}_k, \tilde{\mathbf{z}}_k$ közelítő rendszer állapot és mérés

$\hat{\mathbf{x}}_k$ becsült rendszer állapot a
 k -edik időpontban

\mathbf{A} az f függvény Jacobi mátrixa \mathbf{x} szerint

\mathbf{W} az f függvény Jacobi mátrixa \mathbf{w} szerint

$\mathbf{w}_k, \mathbf{v}_k$ folyamat és mérési zaj

\mathbf{H} a h függvény Jacobi mátrixa \mathbf{x} szerint

\mathbf{V} a h függvény Jacobi mátrixa \mathbf{v} szerint

A kibővített Kálmán szűrő működése

1) Előző rendszer állapot és kovariancia becslése

$$\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \hat{\mathbf{P}}_{k-1}$$

2) A rendszer állapot és kovariancia előrejelzése

$$\hat{\mathbf{x}}_k^- = f(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}, \mathbf{0}) \quad \mathbf{P}_k^- = \mathbf{A}_k \mathbf{P}_{k-1} \mathbf{A}_k^T + \mathbf{W}_k \mathbf{Q}_{k-1} \mathbf{W}_k^T$$

3) A mérés utáni állapot és kovariancia frissítés

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T (\mathbf{H}_k \mathbf{P}_k^- \mathbf{H}_k^T + \mathbf{V}_k \mathbf{R}_k^- \mathbf{V}_k^T)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - h(\hat{\mathbf{x}}_k^-, \mathbf{0})) \quad \mathbf{P}_k = (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \mathbf{P}_k^-$$



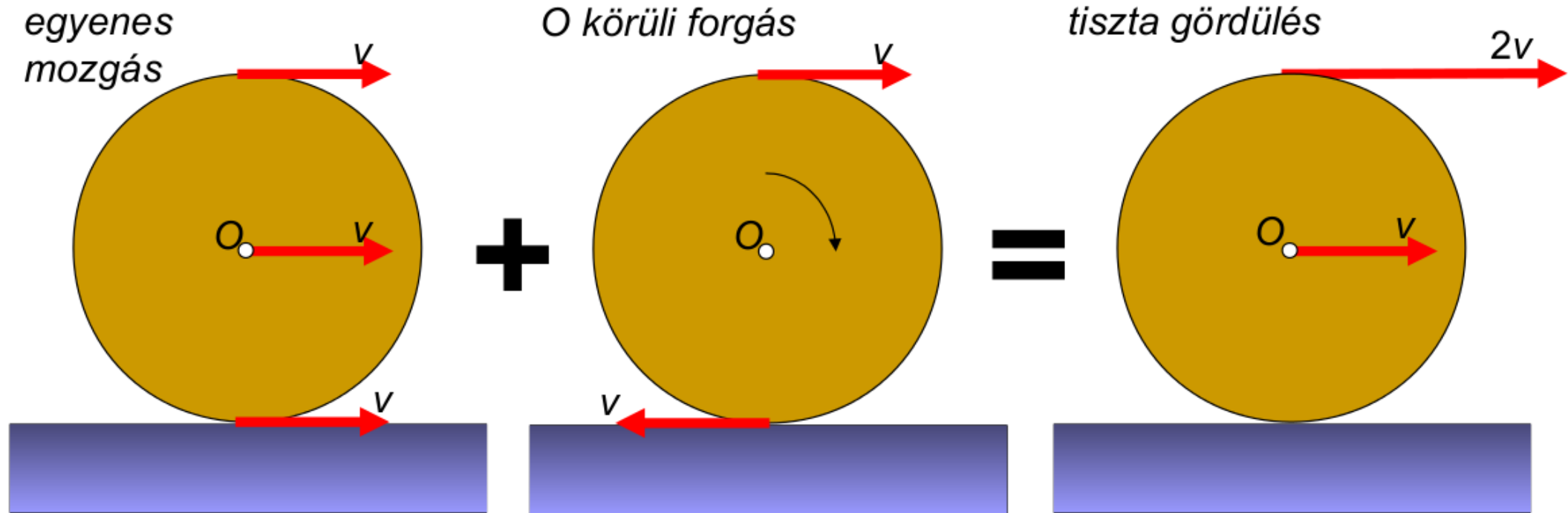
Odometria kerékre szerelt kéttengelyű gyorsulásmérővel

- Feladat:

Határozzuk meg egy kerékre szerelt kéttengelyű gyorsulásmérő szenzor adatai alapján a kerék által megtett utat. Tegyük fel, hogy a kerék vízszintes talajon csúszás nélkül gördül.

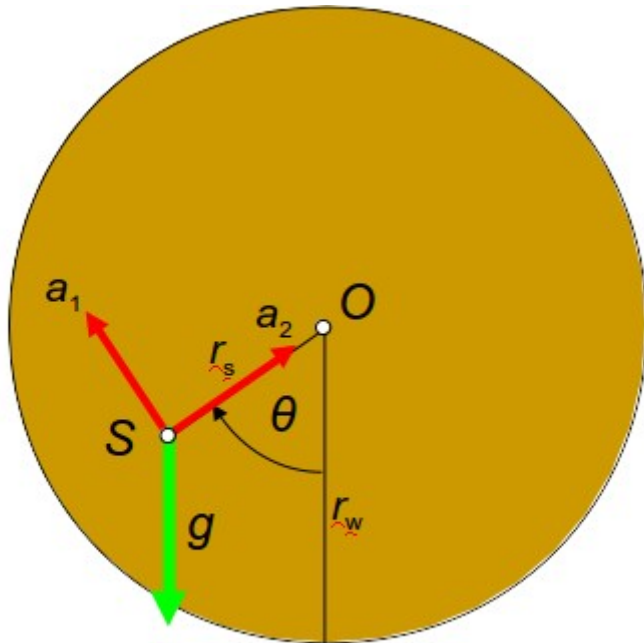
Kerék mozgása

- egyenletes haladás és forgás, a pillanatnyi érintkezési pont zérus sebességű



Kerék mozgása

- kerék sugara: r_w
- az S szenzor az a_1 és a_2 gyorsulásokat méri



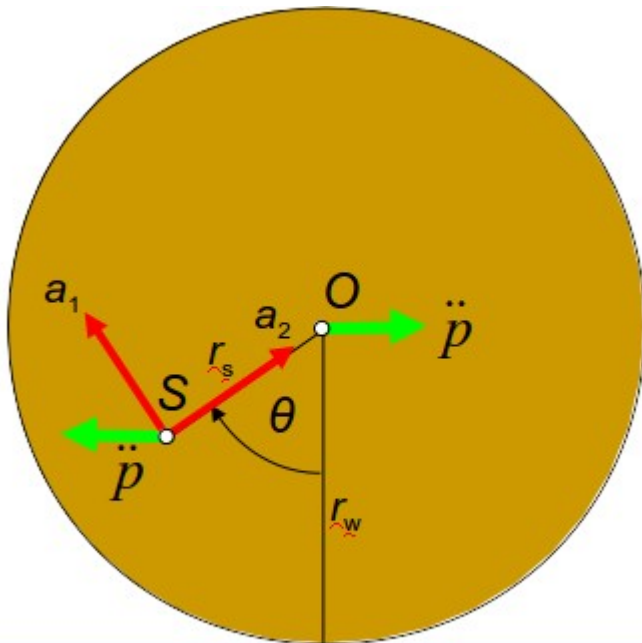
g vektor összetevői

$$a_1 = -g \sin(\theta)$$

$$a_2 = -g \cos(\theta)$$

Kerék mozgása

- a \ddot{p} lineáris gyorsulásból adódó összetevők S-ben

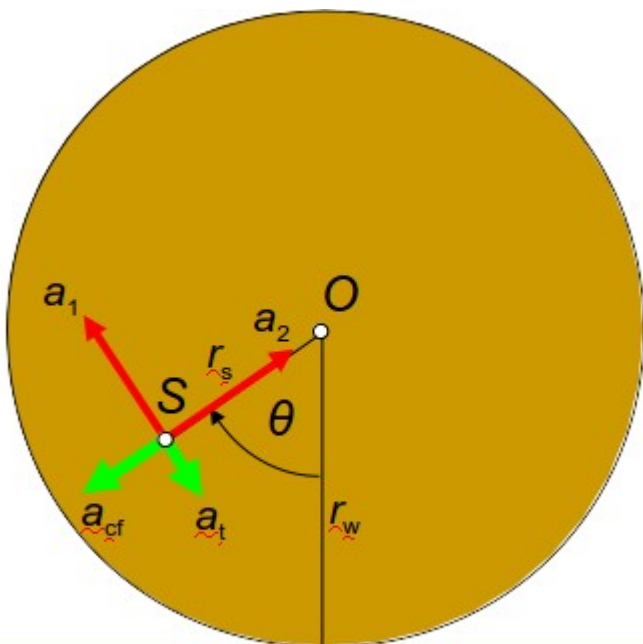


$$a_1 = \ddot{p} \cos(\theta)$$

$$a_2 = -\ddot{p} \sin(\theta)$$

Kerék mozgása

- a kerék csúszásmentesen gördül:



az elfordulási szög,
a szögsebesség és
a szöggyorsulás
kifejezhető a
megtett úttal, a
sebességgel és a
gyorsulással

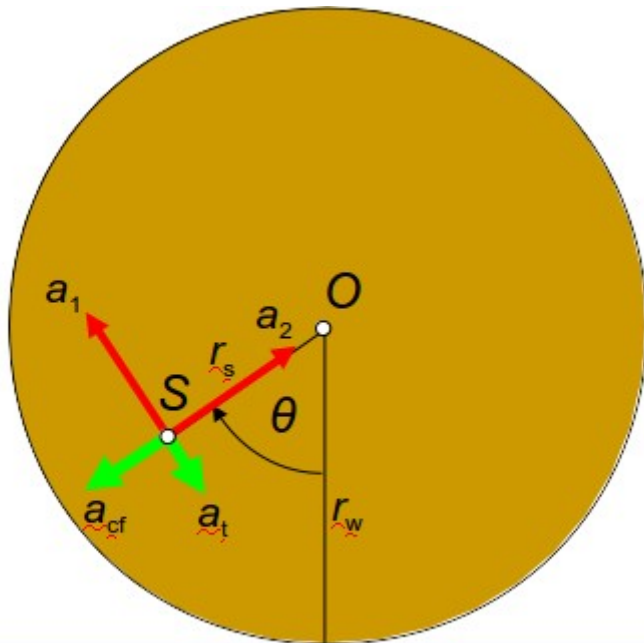
$$\theta = \frac{p}{r_w}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}}{r_w}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{p}}{r_w}$$

Kerék mozgása

- a centripetális és centrifugális gyorsulásból adódó összetevők S -ben

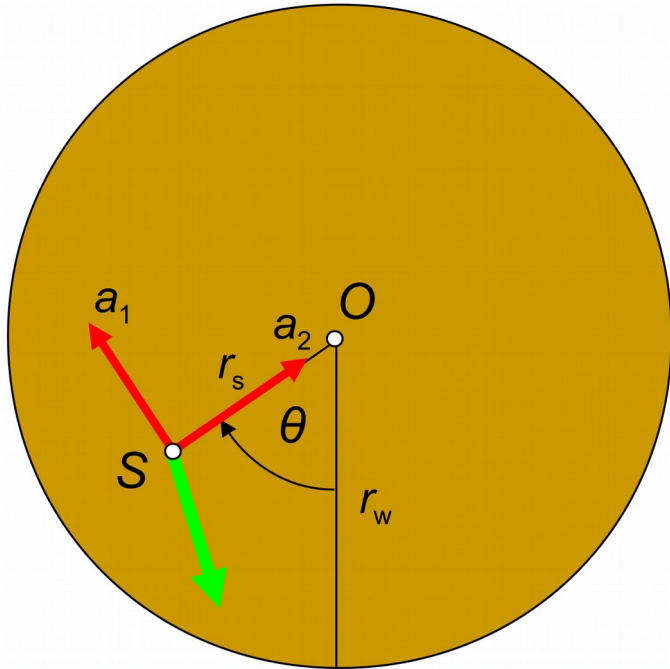


$$a_1 = -r_s \ddot{\theta} = \frac{-r_s}{r_w} \ddot{p}$$

$$a_2 = -r_s \dot{\theta}^2 = \frac{-r_s}{r_w^2} \dot{p}^2$$

Kerék mozgása

- A szenzorra ható teljes gyorsulás komponensei



$$a_1 = -g \sin\left(\frac{p}{r_w}\right) + \ddot{p} \cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w} \ddot{p}$$

$$a_2 = -g \cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \ddot{p} \sin\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w^2} \dot{p}^2$$

Állapot és mérési egyenlet

- a rendszer állapotát a kerék helyzete, sebessége és gyorsulása adja

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix}$$

- a mérési függvény a mért gyorsulásokat adja meg (ahol a \mathbf{v} mérési zaj Gauss eloszlású v.v.)

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} -g \sin\left(\frac{p}{r_w}\right) + \ddot{p} \cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w} \ddot{p} + v_1 \\ -g \cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \ddot{p} \sin\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w^2} \dot{p}^2 + v_2 \end{bmatrix}$$

Állapot átmenet

- Az állapot átmenet függvénye már lineáris, melynek A mátrixa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2} \Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- az állapot átmeneti egyenlet linearizációjára nincs szükség

Adatok

- A kibővített Kálmán-szűrést Gersdorf B., Frese U. (2013) cikkéből vett gyorsulás adatokkal végezzük

Galaxy S2 szenzor adatok

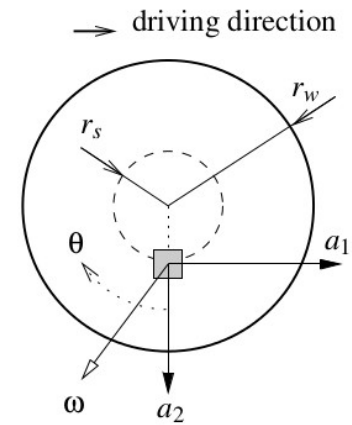
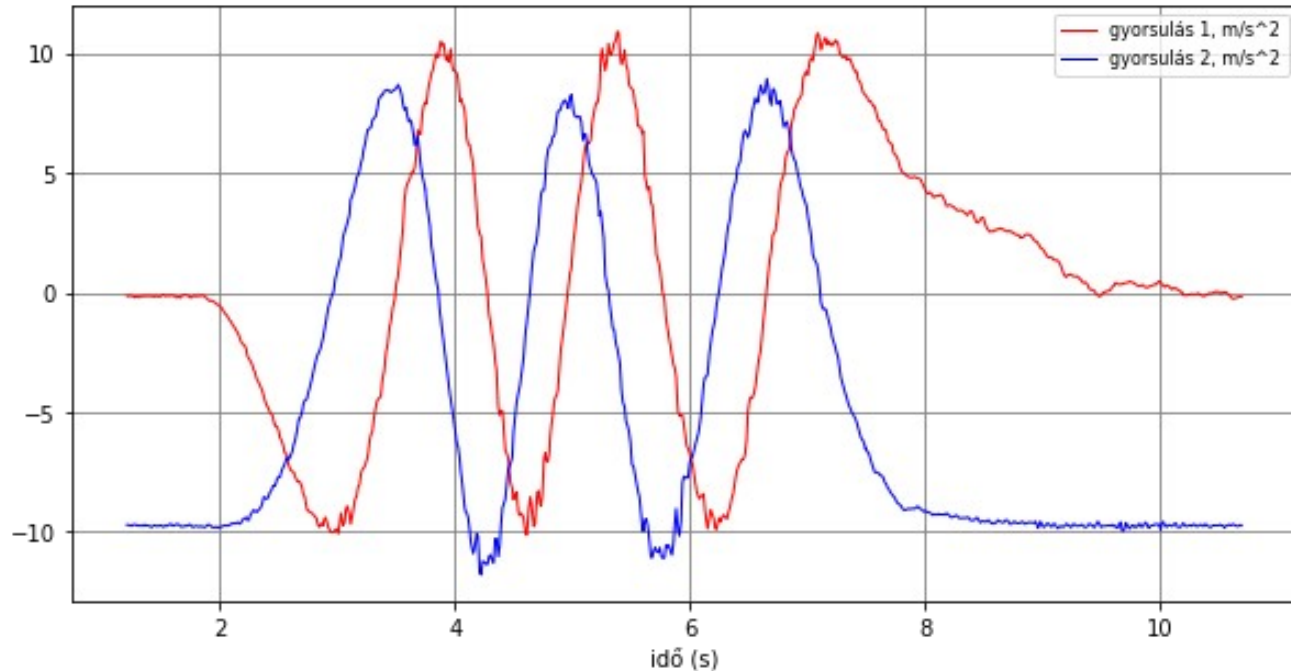


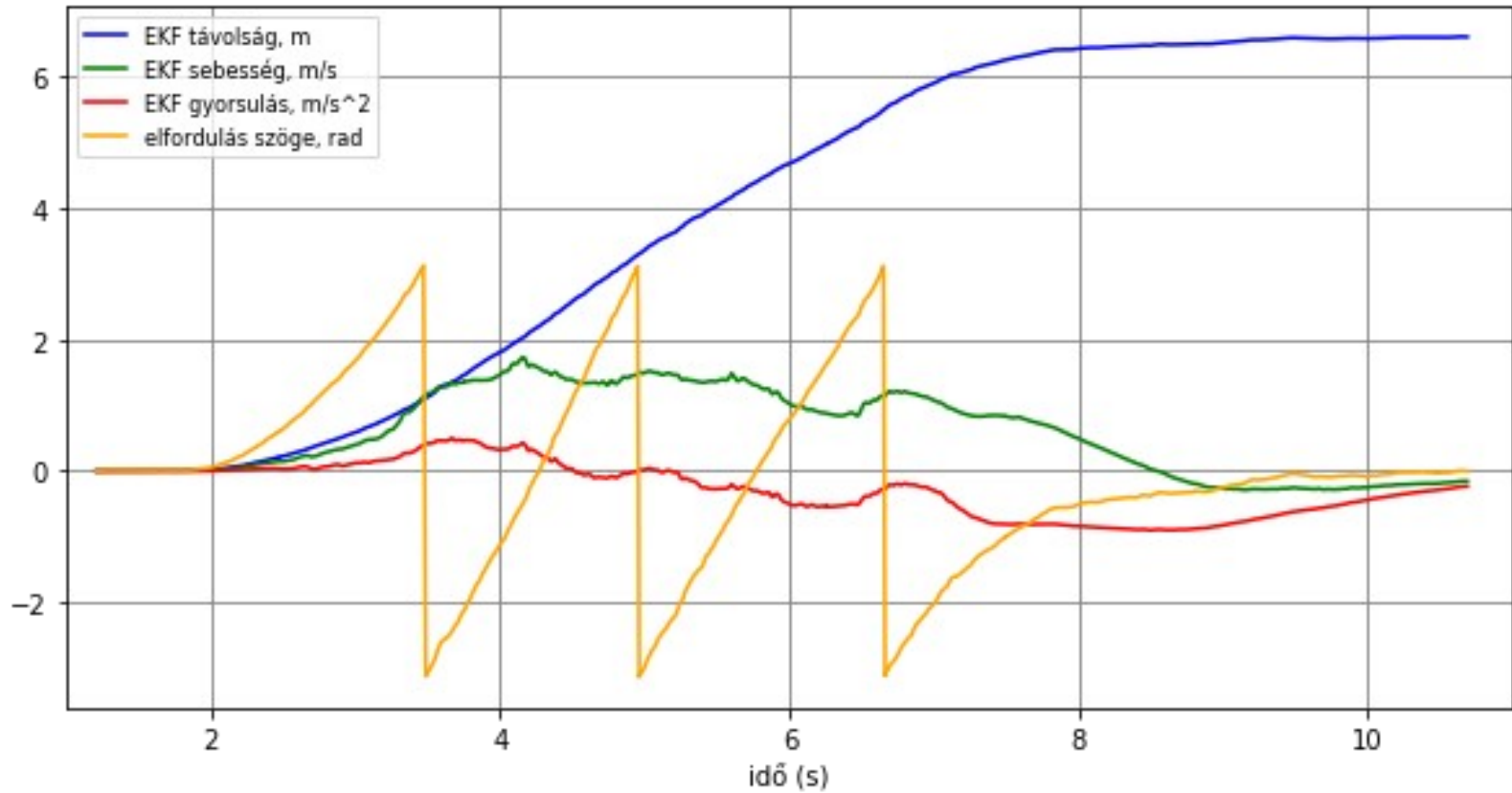
Figure 4: A Samsung Galaxy S2 as a wheel sensor at radius $r_s = 9.5$ cm in a bicycle wheel of radius $r_w = 35$ cm for data logging.

Program

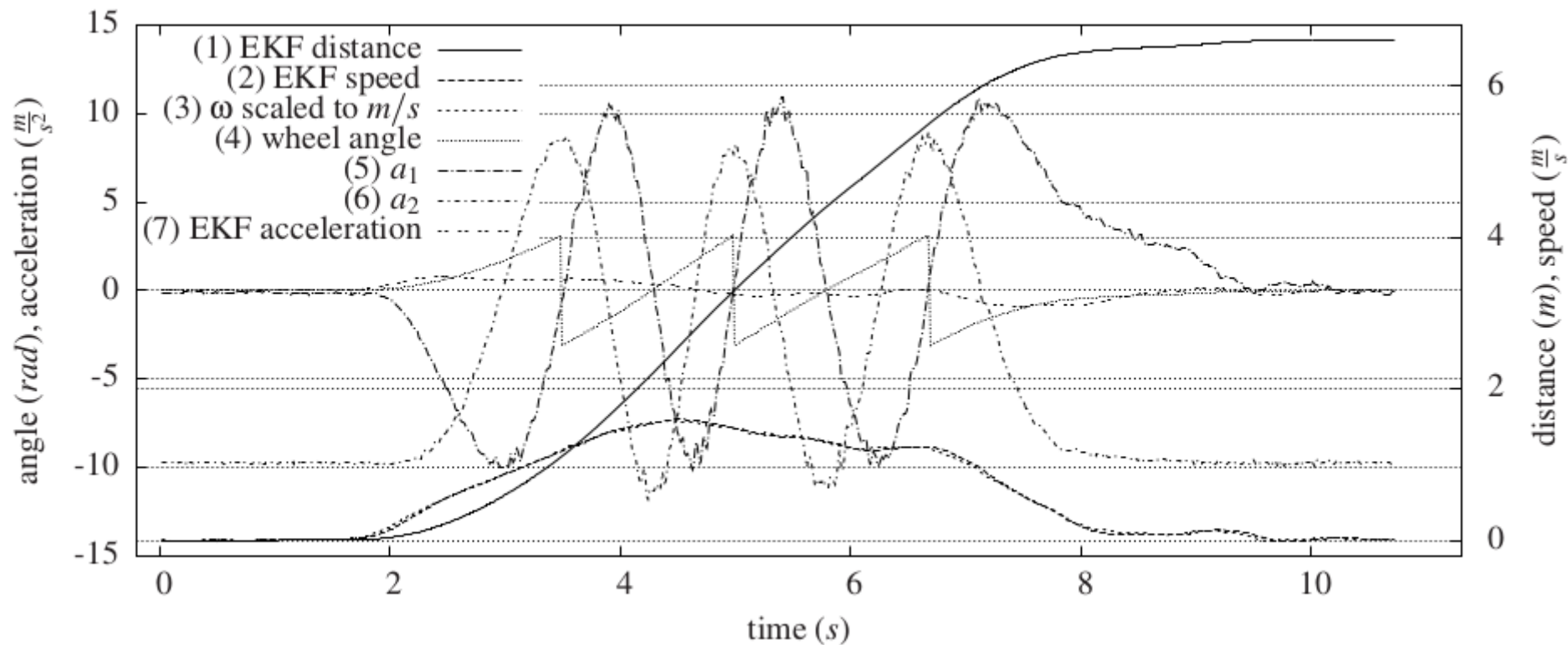
- Python program:
https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/KF2.ipynb
- `def EKFwheel(t, a1, a2, q=0.07, r=5):`
 `''''''`
 Kibővített Kálmán-szűrő kéttengelyű gyorsulásmérő szenzoros odometriához
 t - mérési időpontok vektora
 a1, a2 - mért szenzor centripetális és centrifugális gyorsulások (m/s**2)
 q - folyamat zaj varianciá (m/s**2)
 r - mérési zaj variancia (m/s**2)
 `''''''`
- a szűrés megvalósítása:
 `xe = EKFwheel(t, a1, a2, 0.17, 5.0)`

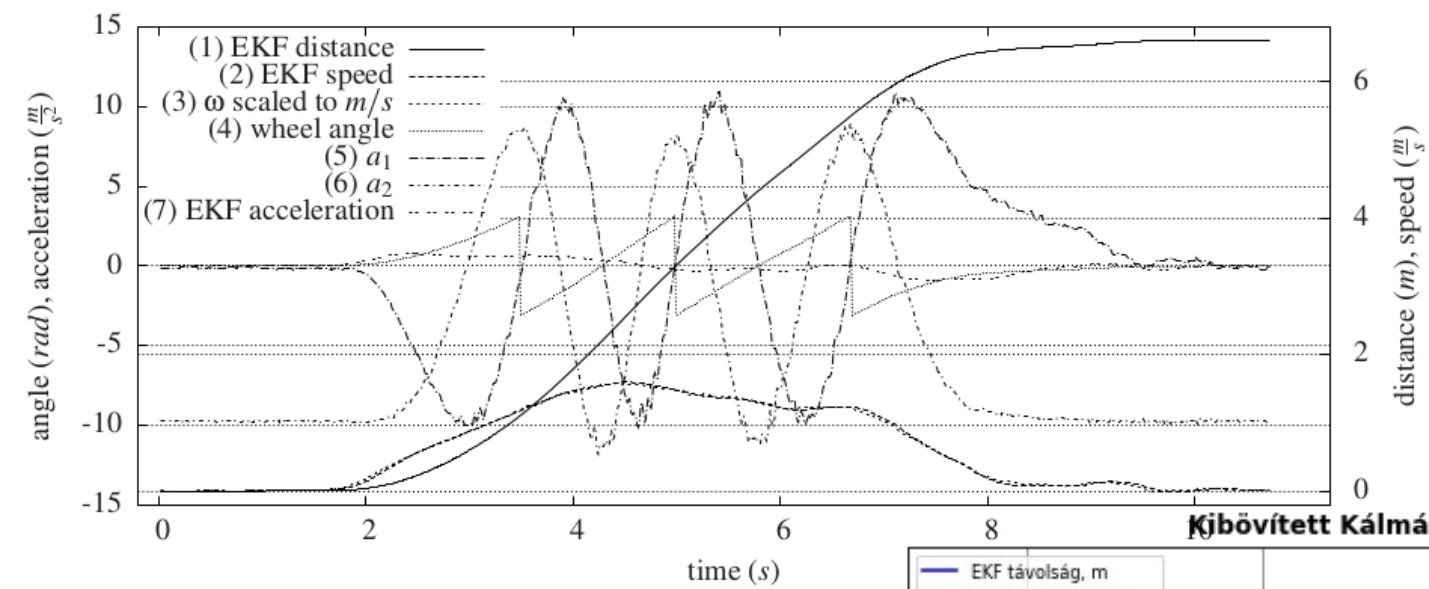
Eredmények

Kibővített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények

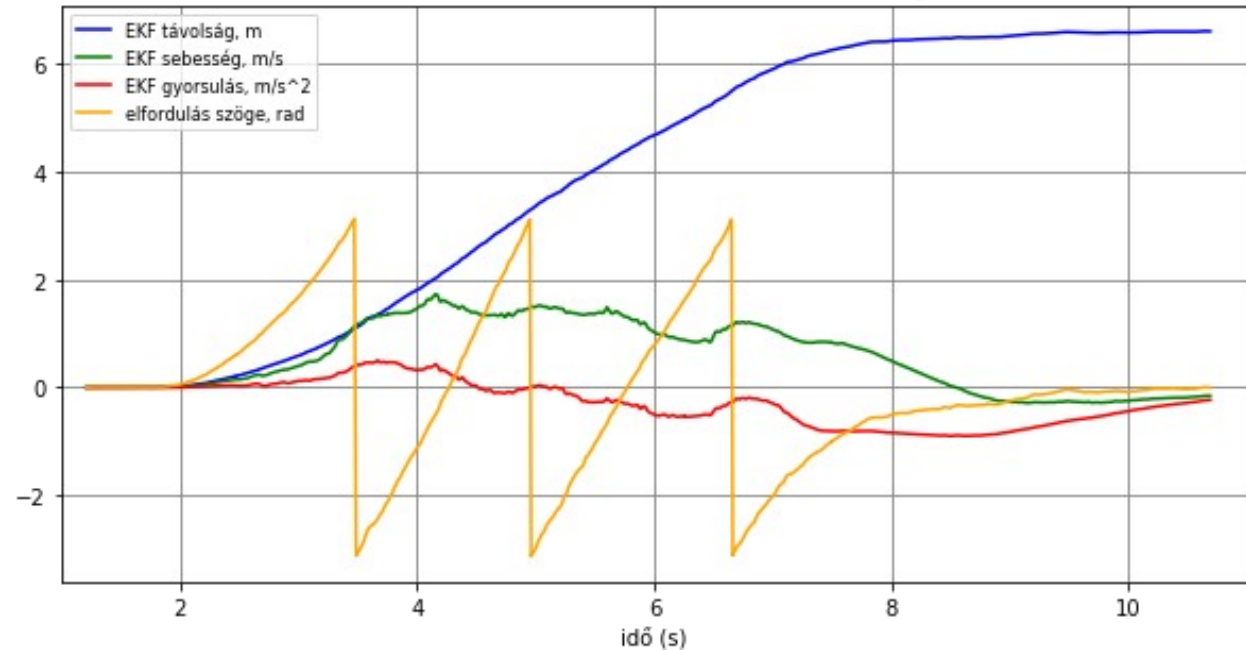


Eredmények (cikk)



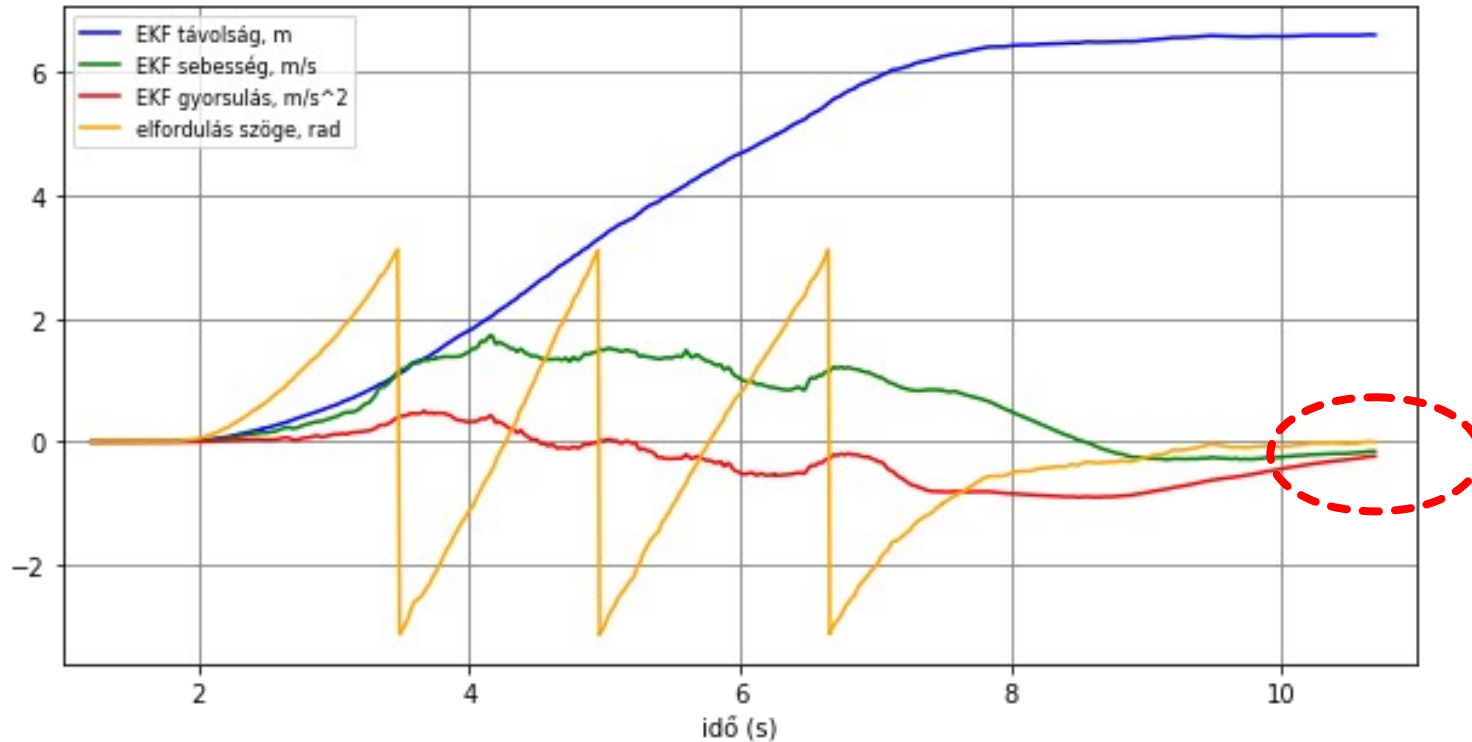


Kibővített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények



Eredmények

Kibővített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények



- a sebesség és gyorsulás nem lesz zérus a végén
- linearizáció problémái: EKF → UKF

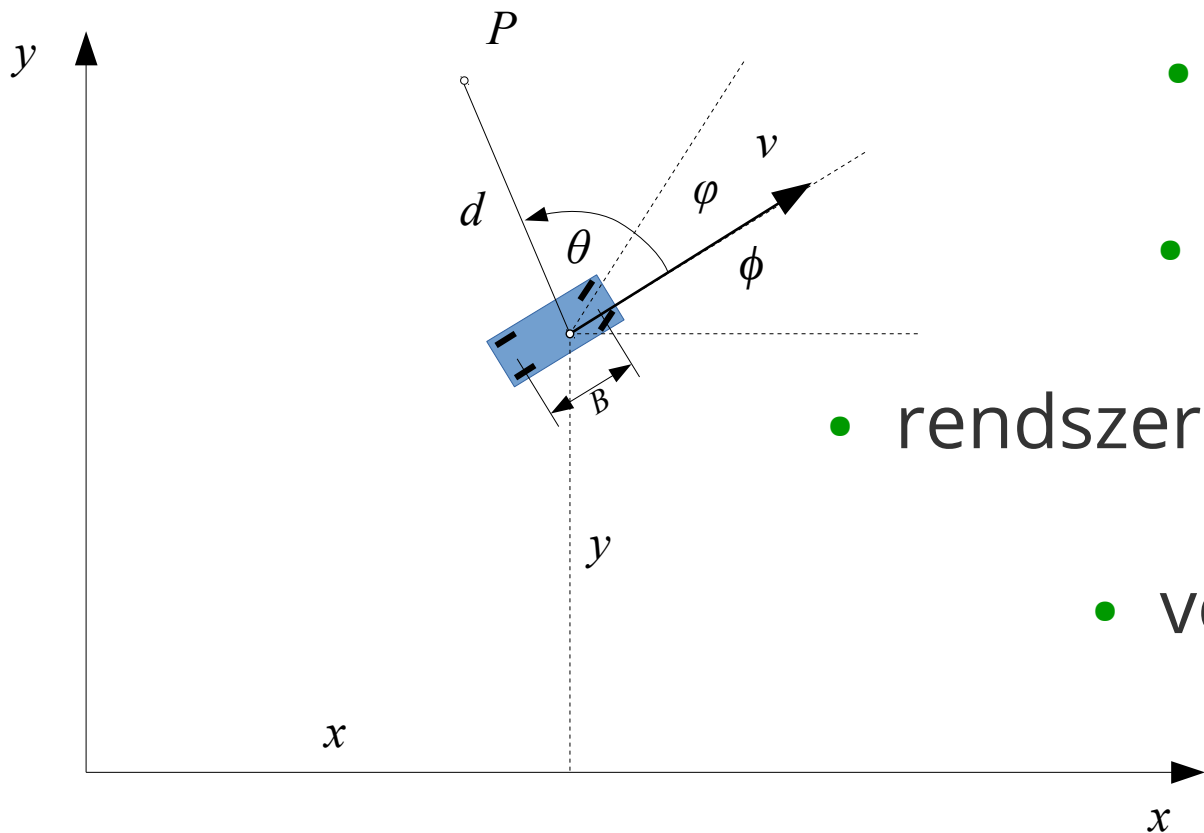


Mozgó mérőkocsiról végzett távolság- és iránymérések

- Feladat:

Határozzuk meg egy kormányzott, mozgó mérőkocsira szerelt irány- és távolságmérő szenzorok (rögzített prizmára végzett mérési adatai) alapján a mozgó mérőkocsi helyzetét és irányát.

Rendszermodell



- $P(X, Y)$: prizma

- mérés: $z_k = [d_k, \theta_k]^T$

- rendszerállapot: $x_k = [x_k, y_k, \phi_k]^T$

- vezérlés: $u_k = [v_k, \phi_k]^T$

Állapot átmeneti és mérési egyenletek

- az állapot átmeneti egyenlet (\mathbf{w} állapot zaj)

$$\mathbf{x}_{k+1} = f(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k) = \mathbf{x}_k + \mathbf{v}_k \Delta t \begin{bmatrix} \cos(\phi_k + \varphi_k) \\ \sin(\phi_k + \varphi_k) \\ \sin(\varphi_k)/B \end{bmatrix} + \mathbf{w}_k$$

- a mérési függvény (\mathbf{v} a mérési zaj)

$$\mathbf{z}_k = h(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \sqrt{(X - x_k)^2 + (Y - y_k)^2} \\ \arctan\left(\frac{Y - y_k}{X - x_k}\right) - \phi_k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k$$

Jacobi mátrixok

- A mátrix:
$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\Delta t \cdot v_k \sin(\phi_k + \varphi_k) \\ 0 & 1 & \Delta t \cdot v_k \cos(\phi_k + \varphi_k) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$
- H mátrix:
$$H = \left[\frac{\partial h}{\partial x} \right] = \begin{bmatrix} \frac{x_k - X}{d_k} & \frac{y_k - Y}{d_k} & 0 \\ -\frac{y_k - Y}{d_k^2} & \frac{x_k - X}{d_k^2} & -1 \end{bmatrix}$$

Jacobi mátrixok

- W mátrix:

$$W = \left[\frac{\partial f}{\partial w} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- V mátrix:

$$V = \left[\frac{\partial h}{\partial v} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A kibővített Kálmán szűrő

1) Előző rendszer állapot és kovariancia becslése

$$\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{P}_k$$

2) A rendszer állapot és kovariancia előrejelzése

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- = f(\hat{\mathbf{x}}_k, \mathbf{u}_k, \mathbf{0})$$

$$\mathbf{P}_{k+1}^- = \mathbf{A}_{k+1} \mathbf{P}_k \mathbf{A}_{k+1}^T + \mathbf{Q}_k$$

3) A mérés utáni állapot és kovariancia frissítés

$$\mathbf{K}_{k+1} = \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T \left(\mathbf{H}_{k+1} \mathbf{P}_{k+1}^- \mathbf{H}_{k+1}^T + \mathbf{R}_{k+1} \right)^{-1}$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{k+1} = \hat{\mathbf{x}}_{k+1}^- + \mathbf{K}_{k+1} \left(\mathbf{z}_{k+1} - h(\hat{\mathbf{x}}_{k+1}^-, \mathbf{0}) \right)$$

$$\mathbf{P}_{k+1} = \left(\mathbf{I} - \mathbf{K}_{k+1} \mathbf{H}_{k+1} \right) \mathbf{P}_{k+1}^-$$

Szagtalan Kálmán szűrő (UKF)

- A kibővített Kálmán szűrő (EKF) problémái:
 - linearizáció: csak a Taylor-sor elsőrendű tagját veszi figyelembe
 - a Jacobi-mátrix előállítása nehézkes
 - nehezen beállítható a szűrő paraméterezése, némely esetben a szűrő divergáló rendszer állapotot becsül
- A tapasztalatok szerint a szagtalan Kálmán szűrő (Unscented Kalman Filter, UKF) sok esetben jobb eredményeket ad

Szagtalan Kálmán szűrő

- A bizarr név a megalkotójától, Jeffrey Uhlmann-tól ered: "Miért „szagtalan”? „Kezdetben »új szűrő« volt a neve, de mivel jellegzetesebb névre volt szükség, ezért egyesek »Uhlmann szűrőnek« kezdték hívni, amit nyilván nem használhattam. Egyik este mindenki más a laborból a Royal Opera House-ba ment. Miközben dolgoztam, észrevettem valaki dezodorát az asztalon. A »szagtalan« (»unscented«) felirat szemet szúrt, ami tökéletes név volt. A laborban először abszurdnak találták – ami rendben van, mert az abszurditás a vezérelvem."

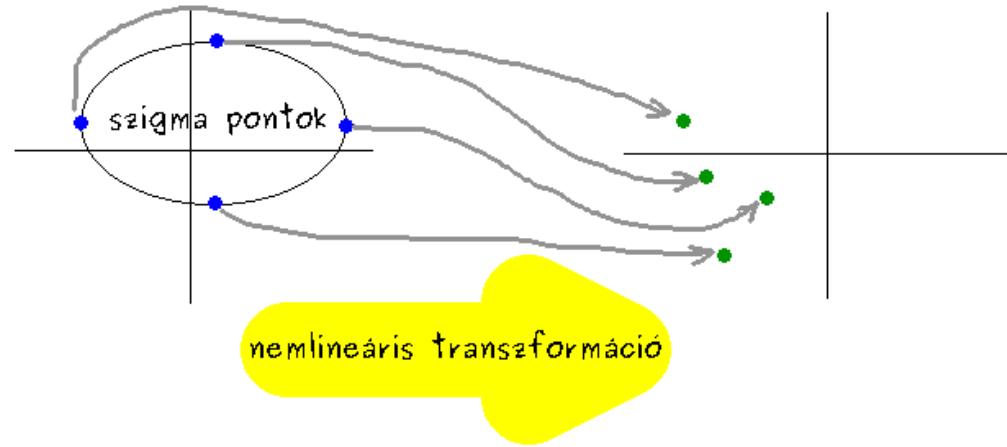


Az UKF alapötlete

- Kálmán szűrés a Gauss eloszlású rendszer állapotának változását és méréseken alapuló frissítését írja le
- A Gauss eloszlást könnyebb közelíteni mint a nem lineáris transzformációt
- Ötlet:
 - megtartjuk a nem lineáris transzformációt
 - a Gauss eloszlás paramétereit (várható érték, szórás)
 - közelítjük diszkrét pontok (ún. *sigma pontok*) segítségével (ez a *szagtalan transzformáció*)

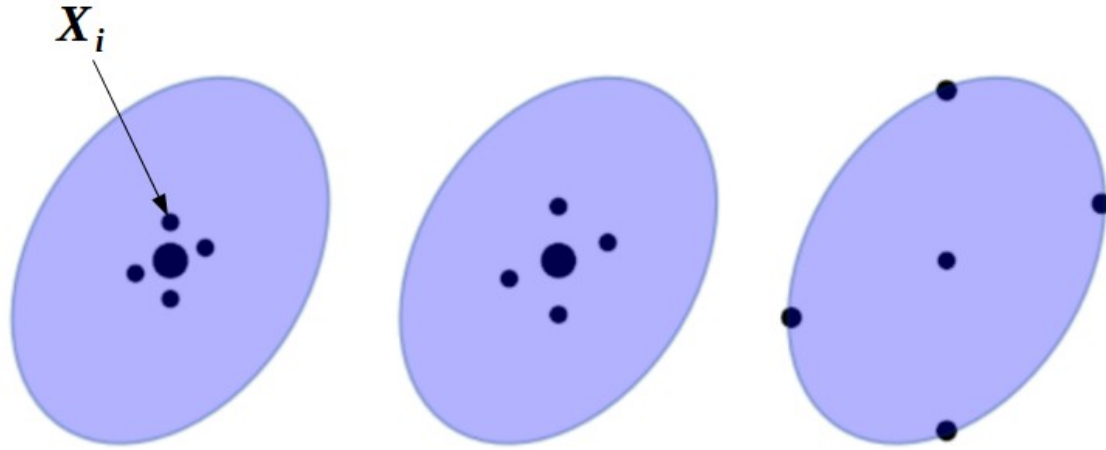
Az UKF alapötlete

- felvesszük a szigma pontokat úgy, hogy pontosan jellemezzék a rendszer állapot átlagát és kovarianciáját
- a szigma pontokat átvisszük a nemlineáris f , h transzformációkkal az állapot- ill. mérési térbe (kovariancia terjedés nemlineáris változata)
- az átvitt pontokból számítjuk közelítőleg a rendszer állapot átlagot és kovarianciát



Az eljárás rokona a Monte Carlo módszereknek, azzal a különbséggel, hogy jóval kevesebb pontra van szükség a diszkrét pontokat nem véletlenszerűen, hanem determinisztikusan vesszük fel

Szigma pontok



forrás: Roger R Labbe: [Kalman and Bayesian Filters in Python](#)

- n dimenziós állapot térben $2n + 1$ db. X_i szigma pontot választunk ki
- a transzformált szigma pontokat W_i súlyokkal súlyozzuk

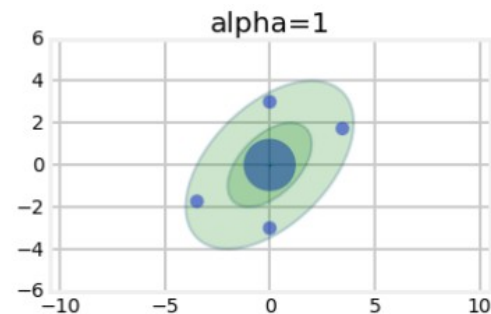
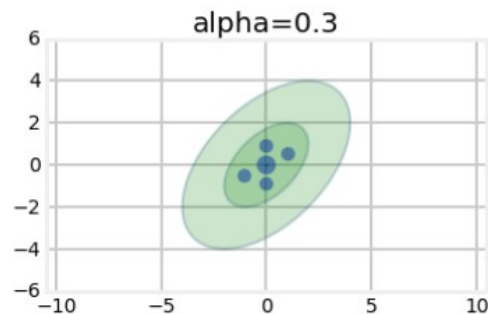
Van der Merwe-féle skálázott szigma pontok

- A szigma pontok halmazát a következő összefüggések szolgáltatják: $\mathbf{X}_0 = \mu$ $\mathbf{X}_i = \mu + [\sqrt{(n+\lambda)} \mathbf{P}]_i$ $i = 1, \dots, n$

$$\mathbf{X}_i = \mu - [\sqrt{(n+\lambda)} \mathbf{P}]_{i-n} \quad i = n+1, \dots, 2n$$

ahol $[\mathbf{A}]_i$ a szimmetrikus \mathbf{A} mátrix i -edik oszlopát (vagy sorát) jelöli és $\lambda = \alpha^2(n+k) - n$, $k = 3 - n$.

- A λ és k skálatényezők, az α paraméter határozza meg a szigma pontok távolságát a μ ponttól.



Van der Merwe-féle súlyok

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n + \lambda} \quad W_0^c = \frac{\lambda}{n + \lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta$$

m : átlaghoz

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n + \lambda)}, \quad i = 1, \dots, 2n$$

c : kovarianciához

- Gauss-eloszlás esetén az alábbi paramétereket célszerű használni:

$$\beta = 2, \quad k = 3 - n, \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Szagtalan transzformáció

- A szagtalan transzformáció során a szigma vektorokat transzformáljuk egy nem lineáris

$$\mathbf{Y}_i = g(\mathbf{X}_i) \quad i = 0, \dots, 2n$$

függvény segítségével, és az eredményül kapott pontokból határozzuk meg súlyozott átlagképzéssel a poszterior eloszlásfüggvény közelítő átlagát és kovarianciáját:

$$\bar{\mathbf{Y}} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \mathbf{Y}_i \quad \mathbf{P}_Y \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_i - \bar{\mathbf{Y}})^T .$$

UKF szűrés egyenletei

- A szűrés a kezdeti rendszer állapot és kovariancia mátrixa ismeretében a $k - 1$ időpontból a k időpontba lépve a következő egyenletek alapján működik, miután rendelkezésre állnak a szigma pontok.

- **Állapot átmenet**

szigma pontok

$$\mathbf{X}_{i,t} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_{i,k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) \quad i=0, \dots, 2n$$

transzformációja

rendszer állapot mérések

$$\hat{\mathbf{x}}^- = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \mathbf{X}_{i,t}$$

előtti becslése

rendszer állapot

$$\hat{\mathbf{P}}^- = \sum_{j=0}^{2n} W_j^c (\mathbf{X}_{j,t} - \hat{\mathbf{x}}^-) (\mathbf{X}_{j,t} - \hat{\mathbf{x}}^-)^T + \mathbf{Q}_{k-1}$$

kovariancia mátrix becslése

UKF szűrés egyenletei

- Az átmenet utáni, de még a mérések előtti rendszer állapot és a kovariancia mátrix becslését a szigma pontok f függvényen (állapot átmeneti függvény) keresztül történő "átvitelével" határozzuk meg.

- Mérés utáni állapot becslése**

szigma pontok

$$\mathbf{z}_{i,t} = \mathbf{h}(\mathbf{X}_{i,k-1}, \mathbf{v}_{k-1}) \quad i=0, \dots, 2n$$

transzformációja a mérések terébe

$$\hat{\mathbf{z}}_k = \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \mathbf{z}_{i,t}$$

becslés a szigma pontok alapján

rendszer állapot kovariancia és keresztkovariancia mátrixainak becslése

$$\mathbf{P}_z = \sum_{j=0}^{2n} W_j^c (\mathbf{z}_{j,t} - \hat{\mathbf{z}}_k) (\mathbf{z}_{j,t} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T + \mathbf{R}_{k-1}$$

$$\mathbf{P}_{x,z} = \sum_{j=0}^{2n} W_j^c (\mathbf{X}_{j,t} - \hat{\mathbf{x}}_k^-) (\mathbf{z}_{j,t} - \hat{\mathbf{z}}_k)^T$$

UKF szűrés egyenletei

Kálmán-féle erősítési mátrix számítása $\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{x,z} \mathbf{P}_z^{-1}$
rendszer állapot és kovariancia mátrix mérések utáni becslése

$$\hat{\mathbf{x}}_k = \hat{\mathbf{x}}_k^- + \mathbf{K}_k (\mathbf{z}_k - \hat{\mathbf{z}}_k) \quad \mathbf{P}_k = \hat{\mathbf{P}}_k^- - \mathbf{K}_k \mathbf{P}_z \mathbf{K}_k^T$$

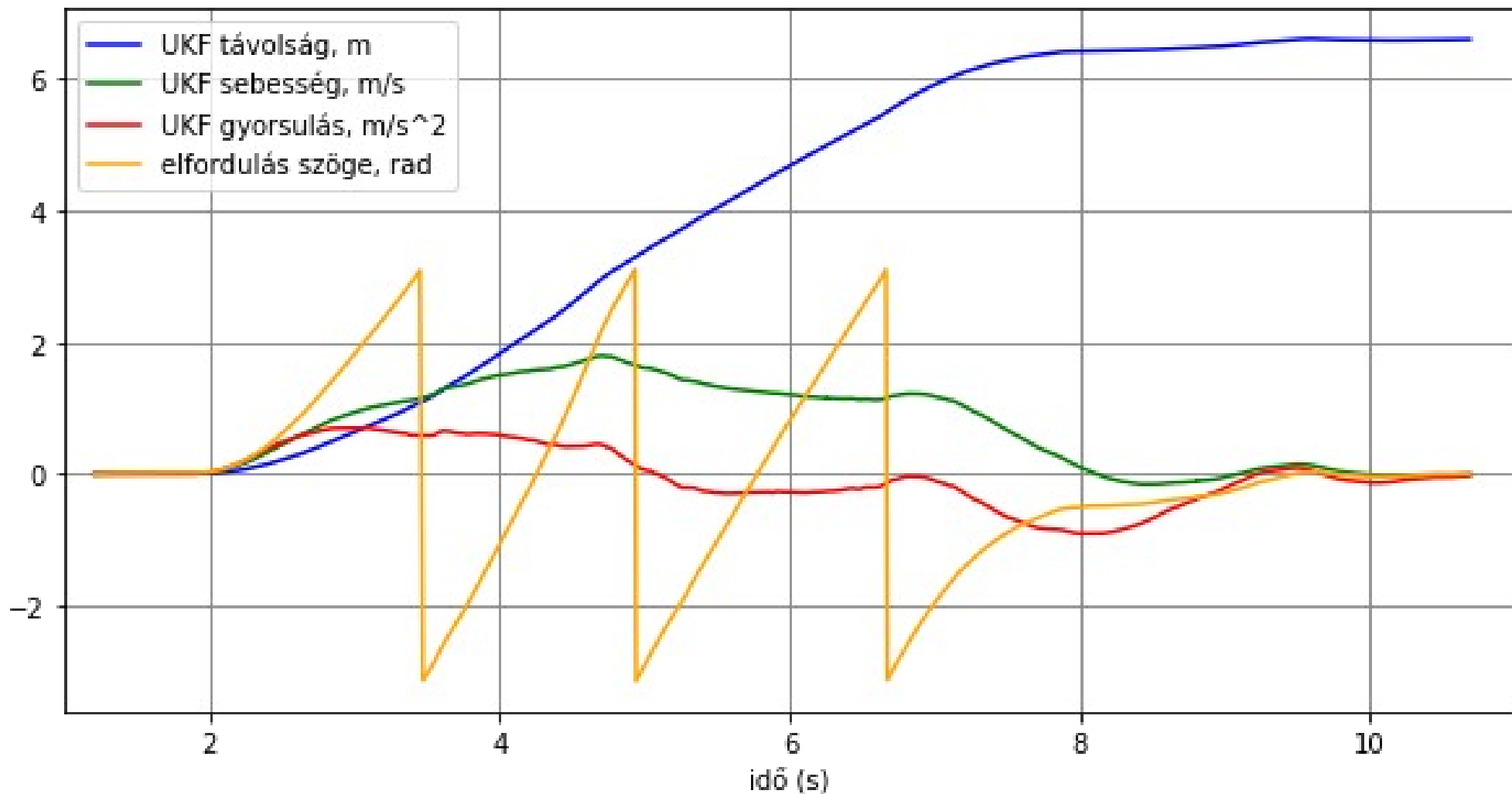
- A mérés utáni rendszer állapot, a kovariancia és keresztkovariancia mátrixok becslését a szigma pontok h függvényén (mérési függvény) keresztül történő "átvitelével" határozzuk meg.
- Az UKF szűrési algoritmus számításigénye hasonló az EKF szűréshez, viszont nagy előnye, hogy nincs szükség az átmeneti és mérési függvények Jacobi-mátrixainak az előállítására.



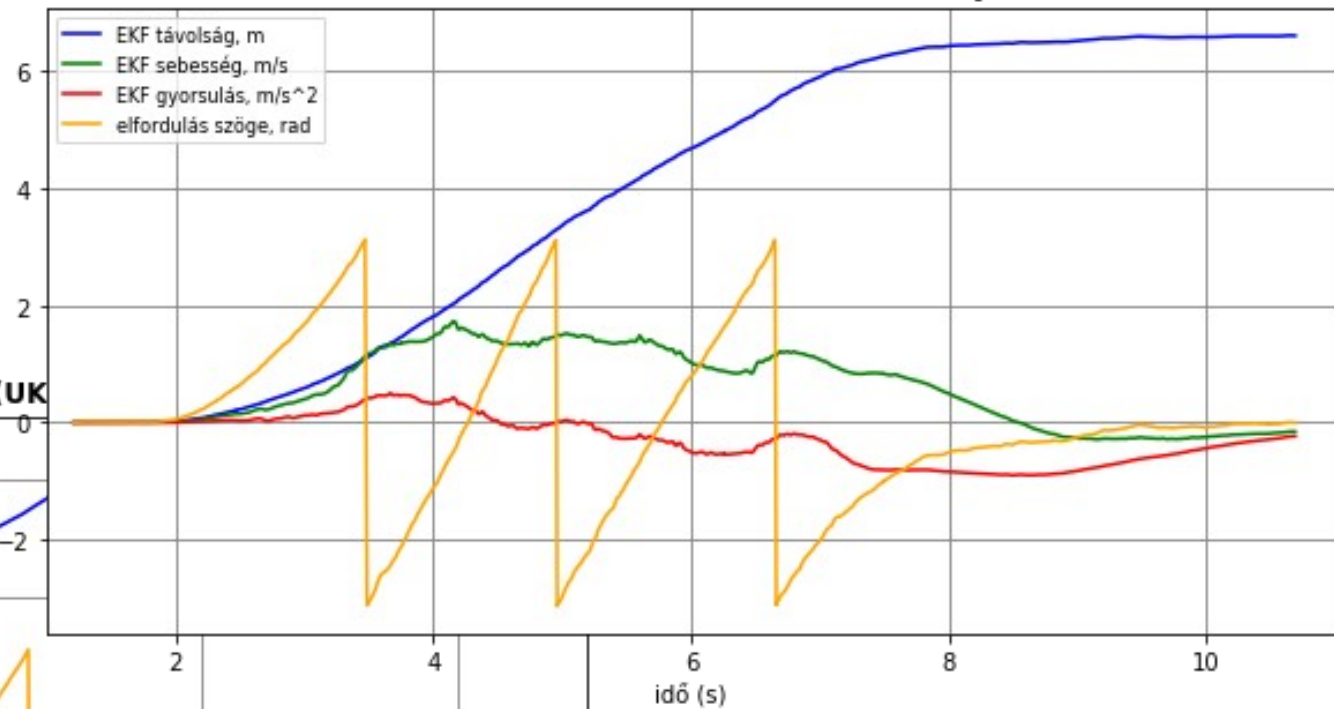
Kerék odometria UKF szűrővel

- A korábbi EKF szűrővel feldolgozott adatok szűrését végezzük el
- Roger R. Labbe [FilterPy](#) eljáráskönyvtárában található UKF implementációt használjuk.

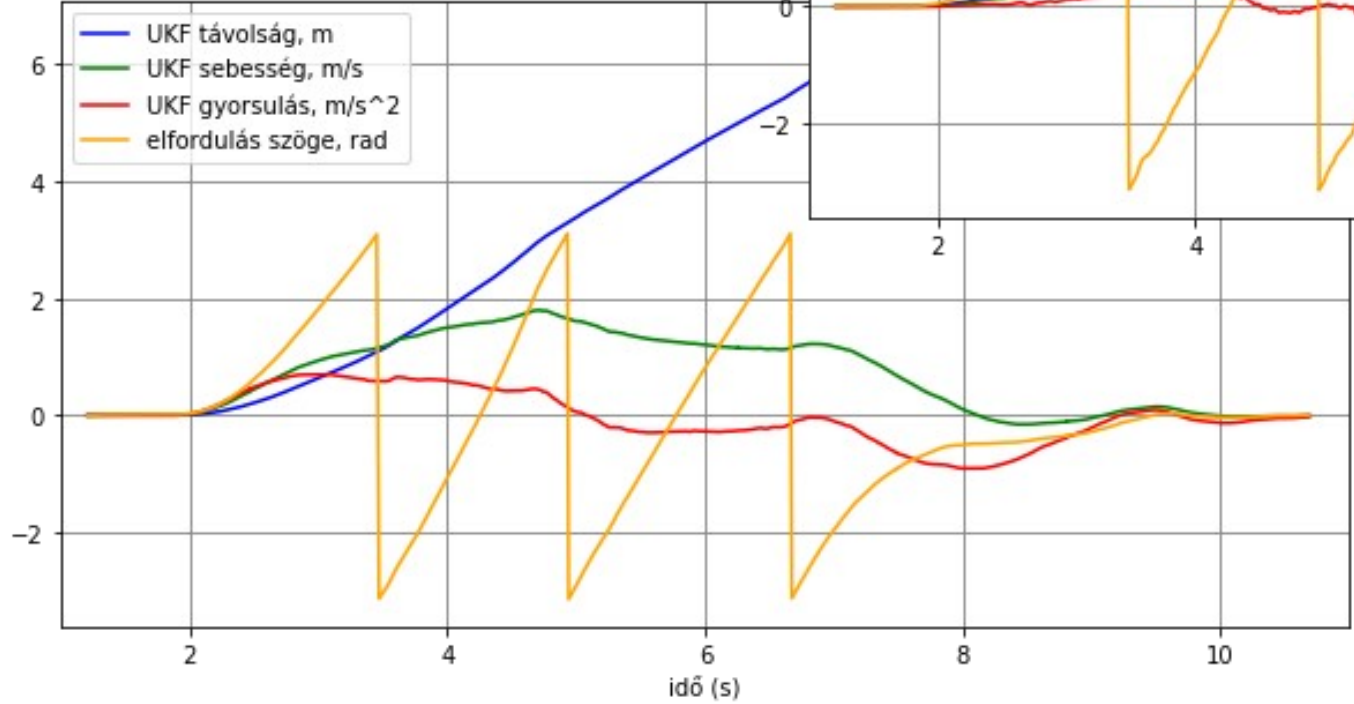
Szagtalan Kálmán-szűrő (UKF) eredmények



Kibővített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények



Szagtalan Kálmán-szűrő (UKF)



Irodalom

- Ádám et al.: Műholdas helymeghatározás, 176-178. oldal. Műegyetemi Kiadó, 2004.
- Kálmán-szűrés 2. Jupyter munkafüzet és Python kód:
(https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/KF2.ipynb)
- Szagtalan Kálmán szűrő Jupyter munkafüzet és Python kód:
(https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/UKF.ipynb)
- Welch G, Bishop G: An introduction to the Kalman Filter, TR 95-041, UNC, 2006
- Gersdorf B, Frese U: A Kalman Filter for Odometry using a Wheel Mounted Inertial Sensor, URL:
<https://pdfs.semanticscholar.org/ab65/2f5c812b580f1c6b154161317b2bb9434655.pdf>