8. előadás

Kiegyenlítő számítások MSc 2018/19

Áttekintés

- Kálmán szűrés *lineáris* esetben (ismétlés)
- Kálmán szűrés *nem lineáris* esetben
  - Kibővített Kálmán szűrő (EKF)

    nem lineáris mérési és állapot egyenlet

    példák:

      odometria

      kerék gyorsulásmérő
  - Szagtalan Kálmán szűrő (UKF)

    szigma pontok és súlyok

    példa: odometria

Kálmán szűrő lineáris rendszer modellje (Welch és Bishop jelöléseivel)

- állapot átmeneti mátrix: $\boldsymbol{A}$
- kezdeti rendszer állapot és annak kovariancia mátrixa: $\boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{P}_0$
- vezérlési mátrix: $\boldsymbol{B}$
- rendszer zaj kovariancia mátrix: $\boldsymbol{Q}$
- mérési mátrix: $\boldsymbol{H}$
- mérési zaj kovariancia mátrix: $\boldsymbol{R}$

A Kálmán szűrő működése

1) Előző rendszer állapot és kovariancia becslése

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \quad \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}$$

2) A rendszer állapot és kovariancia előrejelzése

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = \boldsymbol{A}\,\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1} + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{P}_{k-1}\,\boldsymbol{A}^T + \boldsymbol{Q}$$

3) A mérés utáni állapot és kovariancia frissítés

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^-\,\boldsymbol{H}^T\left(\boldsymbol{H}\,\boldsymbol{P}_k^-\,\boldsymbol{H}^T + \boldsymbol{R}\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k\left(\boldsymbol{z}_k - \boldsymbol{H}\,\hat{\boldsymbol{x}}_k^-\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\,\boldsymbol{H}\right)\boldsymbol{P}_k^-$$

Kibővített Kálmán szűrő (EKF)

- A mérési egyenlet, az állapot átviteli egyenlet vagy mindkettő *nem lineáris*

$$z_k = h(\boldsymbol{x}_k, \boldsymbol{v}_k),$$
$$x_k = f(\boldsymbol{x}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{w}_{k-1})$$

$\boldsymbol{v}_k$ mérési zaj, $\boldsymbol{w}_k$ rendszer zaj

- A pillanatnyi értékek (átlag, kovariancia) körüli *linearizáció*ra van szükség – Taylor sorfejtés
- Általában nem ismerjük az egyes zaj komponenseket, ezért közelítőleg nélkülük számítjuk ki a rendszer állapotát és a mérési vektort

Kibővített Kálmán szűrő

- A rendszer állapota és a mérési vektor

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_k = f\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, 0\right)$$

$$\tilde{\boldsymbol{z}}_k = h\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k, 0\right)$$

$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}$ előző becsült rendszer állapot

- A kibővített Kálmán-szűrő alapvető hiányossága az, hogy különböző valószínűségi változók eloszlása a nem lineáris transzformáció után már nem Gauss-féle, ezért a becslés nem is lehet optimális.

Linearizáció után

- A rendszer állapota és a mérési vektor

$$\boldsymbol{x}_k \approx \widetilde{\boldsymbol{x}}_k + \boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{x}_{k-1} - \hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}\right) + \boldsymbol{W}\boldsymbol{w}_{k-1}$$

$$\boldsymbol{z}_k \approx \widetilde{\boldsymbol{z}}_k + \boldsymbol{H}\left(\boldsymbol{x}_k - \widetilde{\boldsymbol{x}}_k\right) + \boldsymbol{V}\boldsymbol{v}_k$$

$\boldsymbol{x}_k,\ \boldsymbol{z}_k$	rendszer állapot és mérés
$\widetilde{\boldsymbol{x}}_k,\ \widetilde{\boldsymbol{z}}_k$	közelítő rendszer állapot és mérés
$\hat{\boldsymbol{x}}_k$	becsült rendszer állapot a k-adik időpontban
$\boldsymbol{w}_k,\ \boldsymbol{v}_k$	folyamat és mérési zaj
$\boldsymbol{A}$	az f függvény Jacobi mátrixa $\boldsymbol{x}$ szerint
$\boldsymbol{W}$	az f függvény Jacobi mátrixa $\boldsymbol{w}$ szerint
$\boldsymbol{H}$	a h függvény Jacobi mátrixa $\boldsymbol{x}$ szerint
$\boldsymbol{V}$	a h függvény Jacobi mátrixa $\boldsymbol{v}$ szerint

A kibővített Kálmán szűrő működése

1) Előző rendszer állapot és kovariancia becslése

$$\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \quad \hat{\boldsymbol{P}}_{k-1}$$

2) A rendszer állapot és kovariancia előrejelzése

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k^- = f\left(\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}, \boldsymbol{u}_{k-1}, \boldsymbol{0}\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k^- = \boldsymbol{A}_k \boldsymbol{P}_{k-1} \boldsymbol{A}_k^T + \boldsymbol{W}_k \boldsymbol{Q}_{k-1} \boldsymbol{W}_k^T$$

3) A mérés utáni állapot és kovariancia frissítés

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^T \left(\boldsymbol{H}_k \boldsymbol{P}_k^- \boldsymbol{H}_k^T + \boldsymbol{V}_k \boldsymbol{R}_k^- \boldsymbol{V}_k^T\right)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(z_k - h\left(\hat{\boldsymbol{x}}_k^-, \boldsymbol{0}\right)\right)$$

$$\boldsymbol{P}_k = \left(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{H}_k\right) \boldsymbol{P}_k^-$$

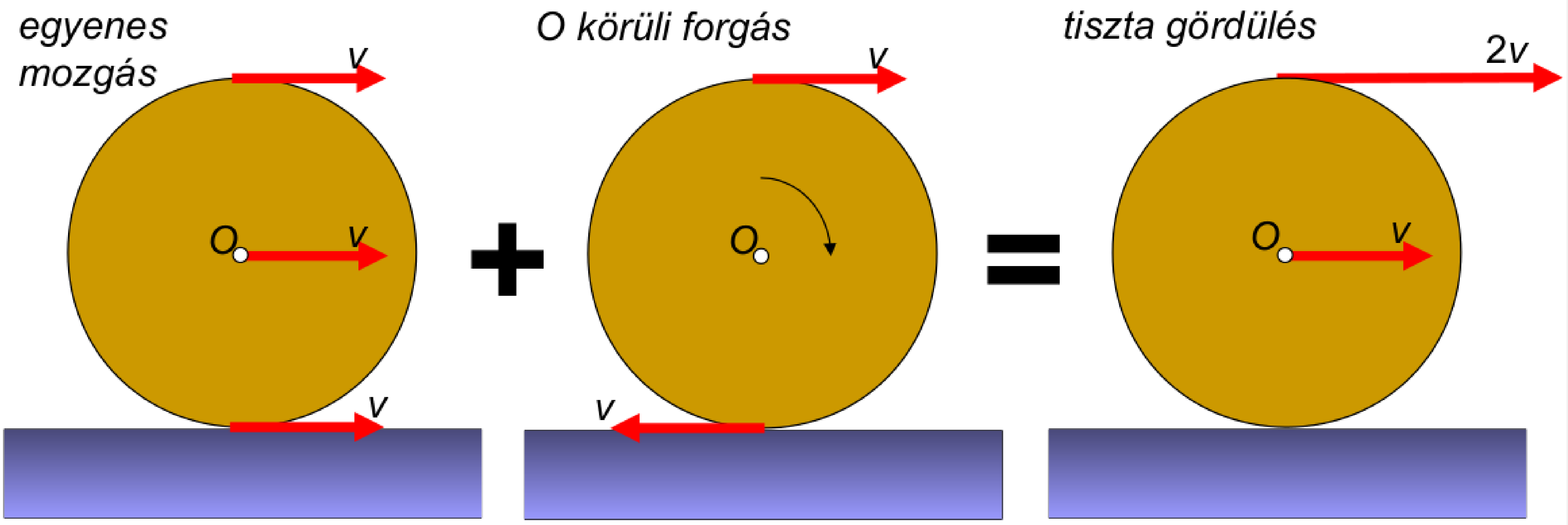
Odometria kerékre szerelt kéttengelyű gyorsulásmérővel

- Feladat:

  Határozzuk meg egy kerékre szerelt kéttengelyű gyorsulásmérő szenzor adatai alapján a kerék által megtett utat. Tegyük fel, hogy a kerék vízszintes talajon csúszás nélkül gördül.

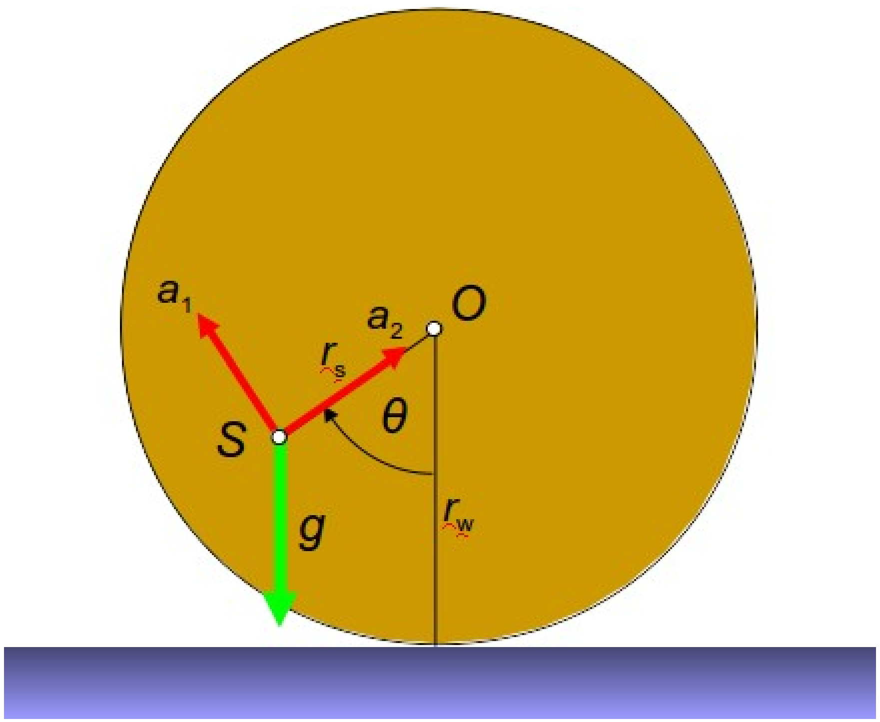
Kerék mozgása

- egyenletes haladás és forgás, a pillanatnyi érintkezési pont zérus sebességű



Kerék mozgása

- kerék sugara: r_w
- az *S* szenzor az a_1 és a_2 gyorsulásokat méri

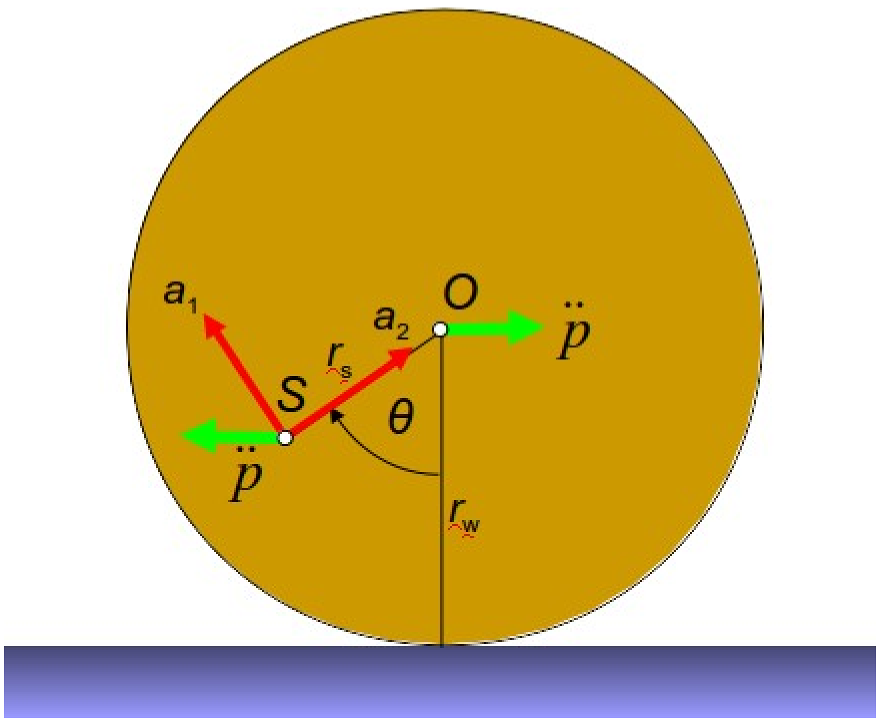


$\boldsymbol{g}$ vektor összetevői

$$a_1 = -g\sin(\theta)$$
$$a_2 = -g\cos(\theta)$$

Kerék mozgása

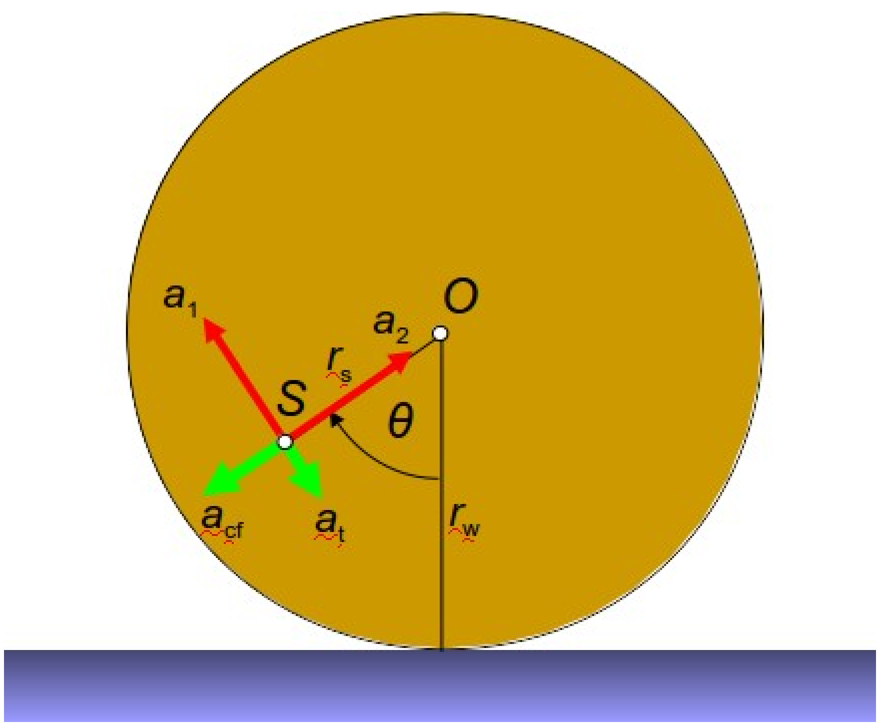
- a $\ddot{p}$ lineáris gyorsulásból adódó összetevők *S*-ben



$$a_1 = \ddot{p}\cos(\theta)$$
$$a_2 = -\ddot{p}\sin(\theta)$$

Kerék mozgása

- a kerék csúszásmentesen gördül:



az elfordulási szög, a szögsebesség és a szöggyorsulás kifejezhető a megtett úttal, a sebességgel és a gyorsulással

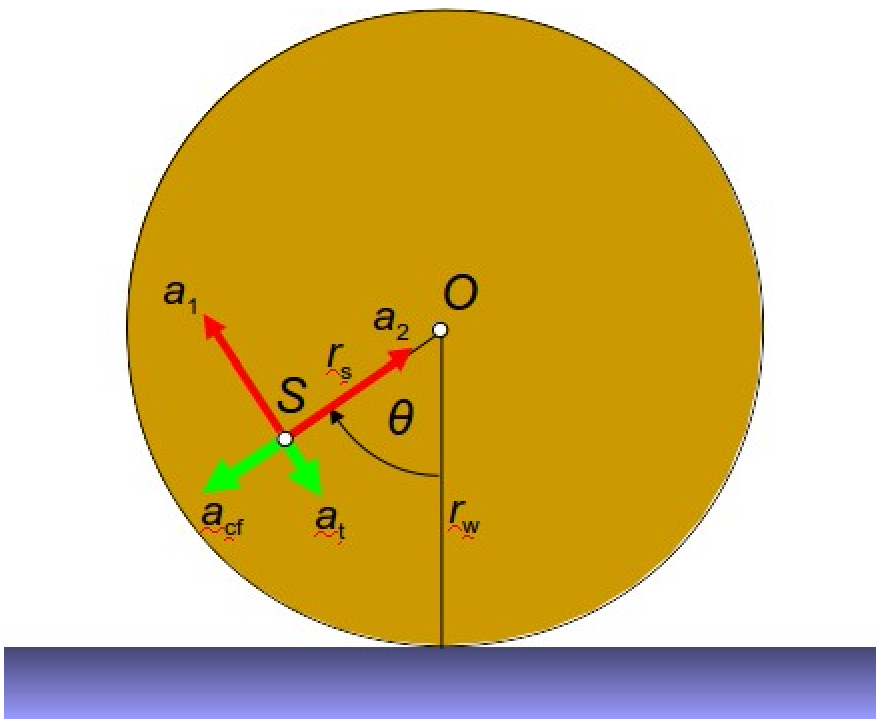
$$\theta = \frac{p}{r_w}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{p}}{r_w}$$

$$\ddot{\theta} = \frac{\ddot{p}}{r_w}$$

Kerék mozgása

- a centripetális és centrifugális gyorsulásból adódó összetevők *S*-ben

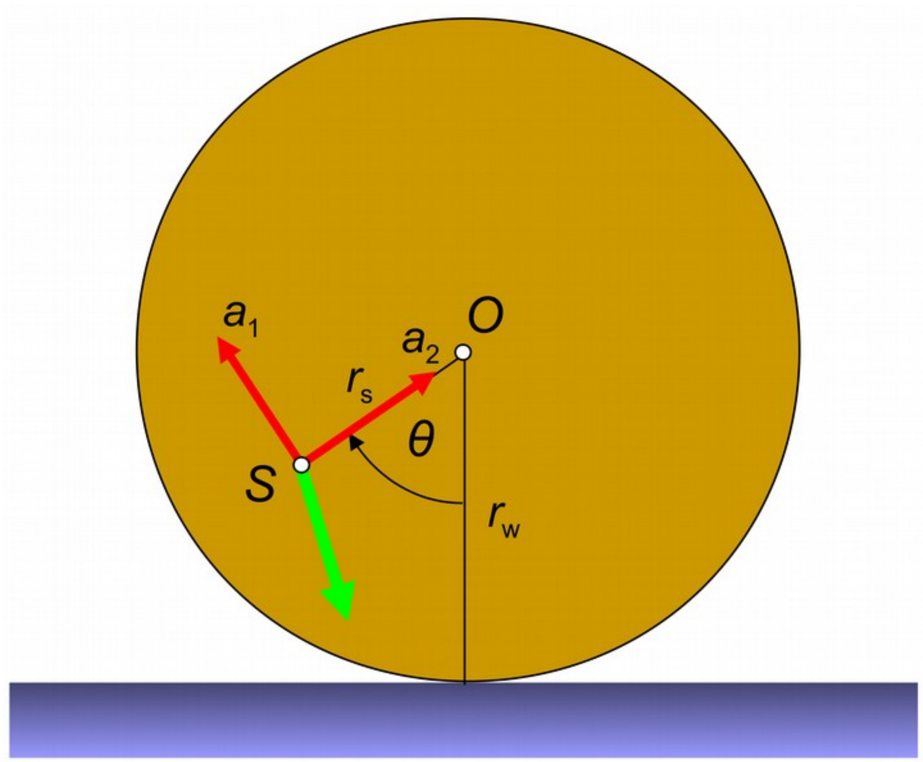


$$a_1 = -r_s \ddot{\theta} = \frac{-r_s}{r_w} \ddot{p}$$

$$a_2 = -r_s \dot{\theta}^2 = \frac{-r_s}{r_w^2} \dot{p}^2$$

Kerék mozgása

- A szenzorra ható teljes gyorsulás komponensei



$$a_1 = -g\sin\left(\frac{p}{r_w}\right) + \ddot{p}\cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w}\ddot{p}$$

$$a_2 = -g\cos\left(\frac{p}{r_w}\right) - \ddot{p}\sin\left(\frac{p}{r_w}\right) - \frac{r_s}{r_w^2}\dot{p}^2$$

Állapot és mérési egyenlet

- a rendszer állapotát a kerék helyzete, sebessége és gyorsulása adja

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} p \\ \dot{p} \\ \ddot{p} \end{bmatrix}$$

- a mérési függvény a mért gyorsulásokat adja meg (ahol a $\boldsymbol{v}$ mérési zaj Gauss eloszlású v.v.)

$$h(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})=\begin{bmatrix} -g\sin\left(\frac{p}{r_w}\right)+\ddot{p}\cos\left(\frac{p}{r_w}\right)-\frac{r_s}{r_w}\ddot{p}+v_1 \\ -g\cos\left(\frac{p}{r_w}\right)-\ddot{p}\sin\left(\frac{p}{r_w}\right)-\frac{r_s}{r_w^2}\dot{p}^2+v_2 \end{bmatrix}$$

Állapot átmenet

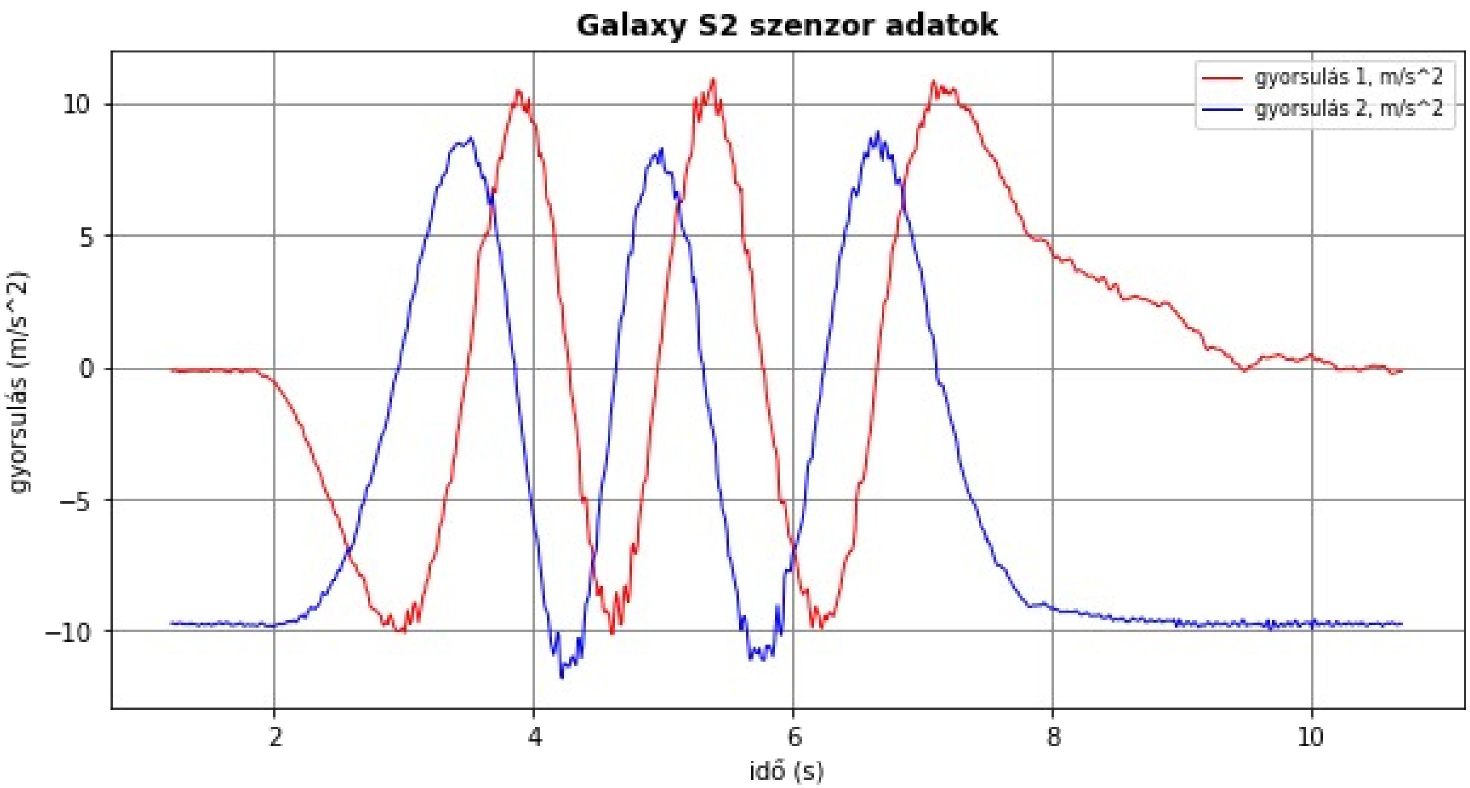
- Az állapot átmenet függvénye már lineáris, melynek A mátrixa

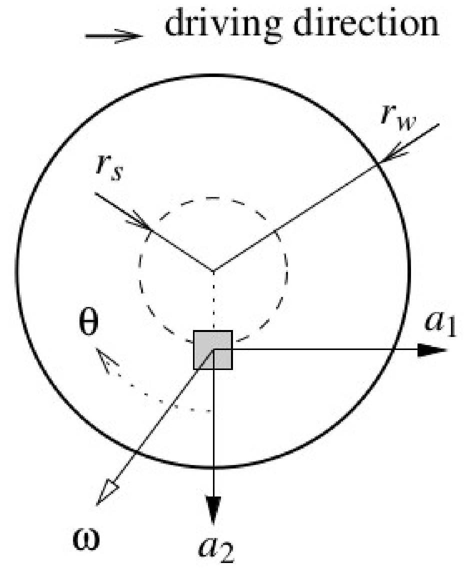
$$A = \begin{bmatrix} 1 & \Delta t & \frac{1}{2}\Delta t^2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- az állapot átmeneti egyenlet linearizációjára nincs szükség

Adatok

- A kibővített Kálmán-szűrést Gersdorf B., Frese U. (2013) cikkéből vett gyorsulás adatokkal végezzük





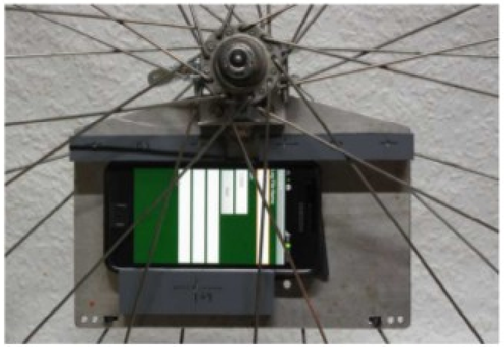


Figure 4: A Samsung Galaxy S2 as a wheel sensor at radius $r_s = 9.5\ cm$ in a bicycle wheel of radius $r_w = 35\ cm$ for data logging.

Program

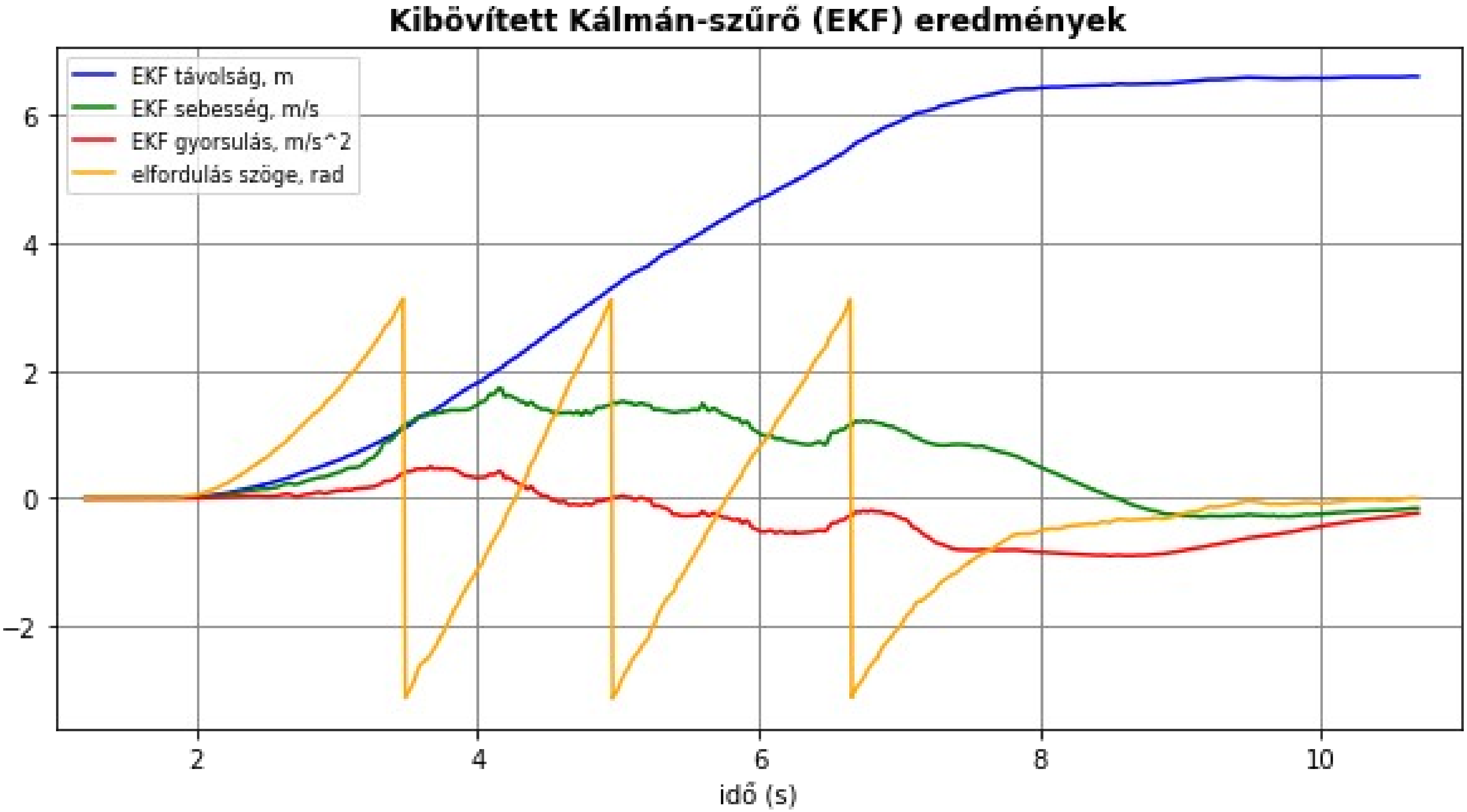
- Python program: https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/KF2.ipynb
- def EKFwheel(t, a1, a2, q=0.07, r=5):

```
    """
    Kibővített Kálmán-szűrő kéttengelyű gyorsulásmérő szenzoros odometriához
     t - mérési időpontok vektora
     a1, a2 - mért szenzor centripetális és centrifugális gyorsulások (m/s**2)
     q - folyamat zaj varianciá (m/s**2)
     r - mérési zaj variancia (m/s**2)
    """
```

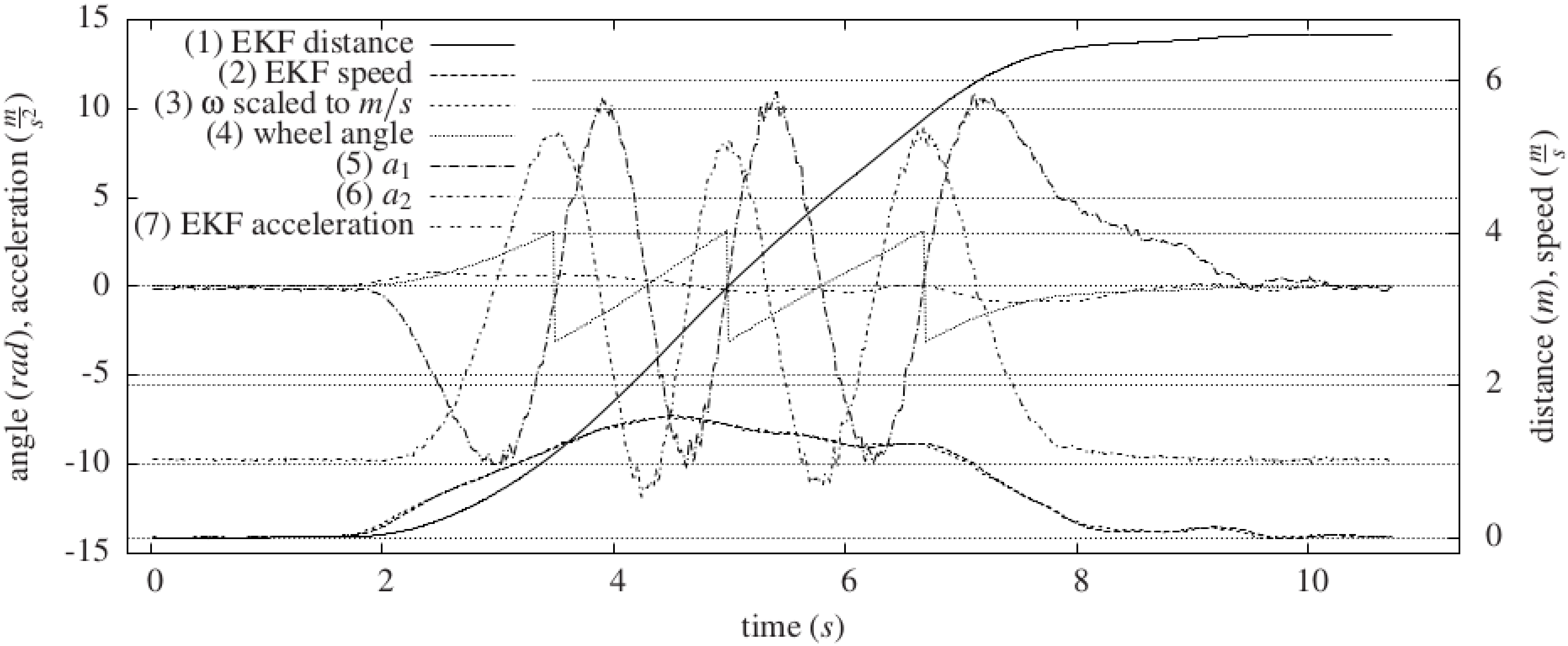
- a szűrés megvalósítása:

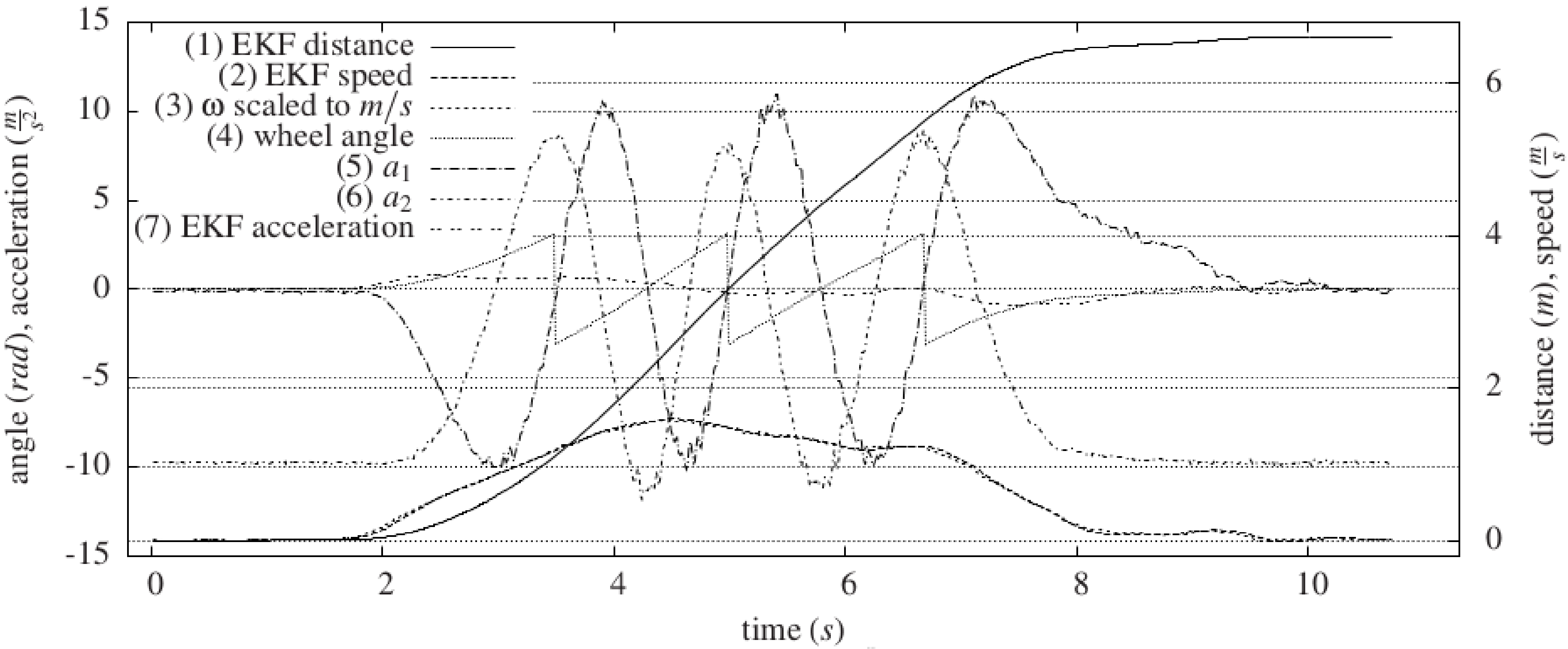
  xe = EKFwheel(t, a1, a2, 0.17, 5.0)

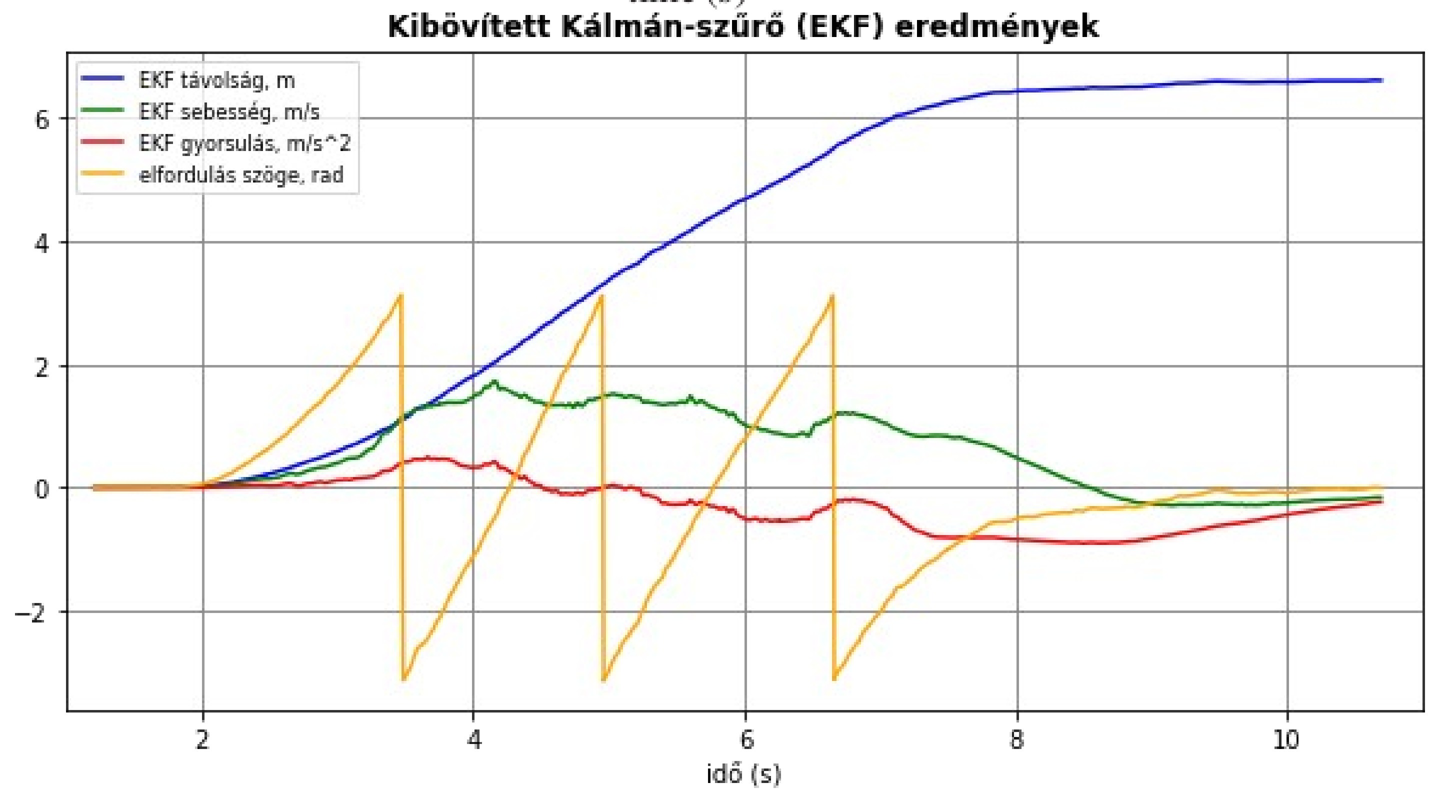
Eredmények


Kibövített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények
EKF távolság, m
EKF sebesség, m/s
EKF gyorsulás, m/s^2
elfordulás szöge, rad
6
4
2
0
−2
2
4
6
8
10
idő (s)

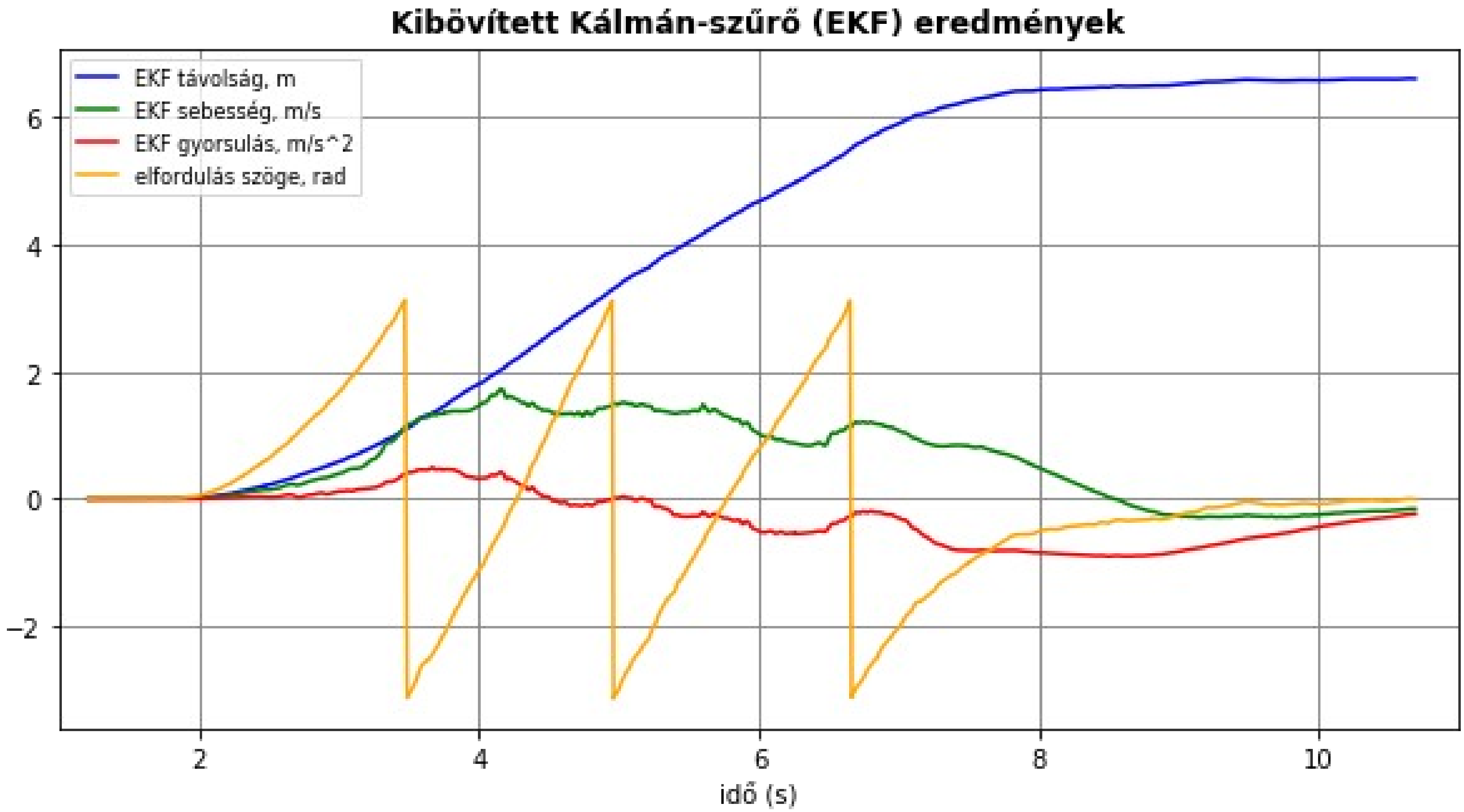
Eredmények (cikk)




(1) EKF distance
(2) EKF speed
(3) ω scaled to m/s
(4) wheel angle
(5) a_1
(6) a_2
(7) EKF acceleration
angle (rad), acceleration ($\frac{m}{s^2}$)
distance (m), speed ($\frac{m}{s}$)
time (s)


Kibövített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények
EKF távolság, m
EKF sebesség, m/s
EKF gyorsulás, m/s^2
elfordulás szöge, rad
idő (s)

Eredmények



- a sebesség és gyorsulás nem lesz zérus a végén
- linearizáció problémái: EKF → UKF

Szagtalan Kálmán szűrő (UKF)

- A kibővített Kálmán szűrő (EKF) problémái:
    linearizáció: csak a Taylor-sor elsőrendű tagját veszi figyelembe
    a Jacobi-mátrix előállítása nehézkes
    nehezen beállítható a szűrő paraméterezése, némely esetben a szűrő divergáló rendszer állapotot becsül
- A tapasztalatok szerint a szagtalan Kálmán szűrő (Unscented Kalman Filter, UKF) sok esetben jobb eredményeket ad

Szagtalan Kálmán szűrő

- A bizarr név a megalkotójától, Jeffrey Uhlmann-tól ered:

  "Miért „szagtalan”? „Kezdetben »új szűrő« volt a neve, de mivel jellegzetesebb névre volt szükség, ezért egyesek »Uhlmann szűrőnek« kezdték hívni, amit nyilván nem használhattam. Egyik este mindenki más a laborból a Royal Opera House-ba ment. Miközben dolgoztam, észrevettem valaki dezodorát az asztalon. A »szagtalan« (»unscented«) felirat szemet szúrt, ami tökéletes név volt. A laborban először abszurdnak találták – ami rendben van, mert az abszurditás a vezérelvem.”

Az UKF alapötlete

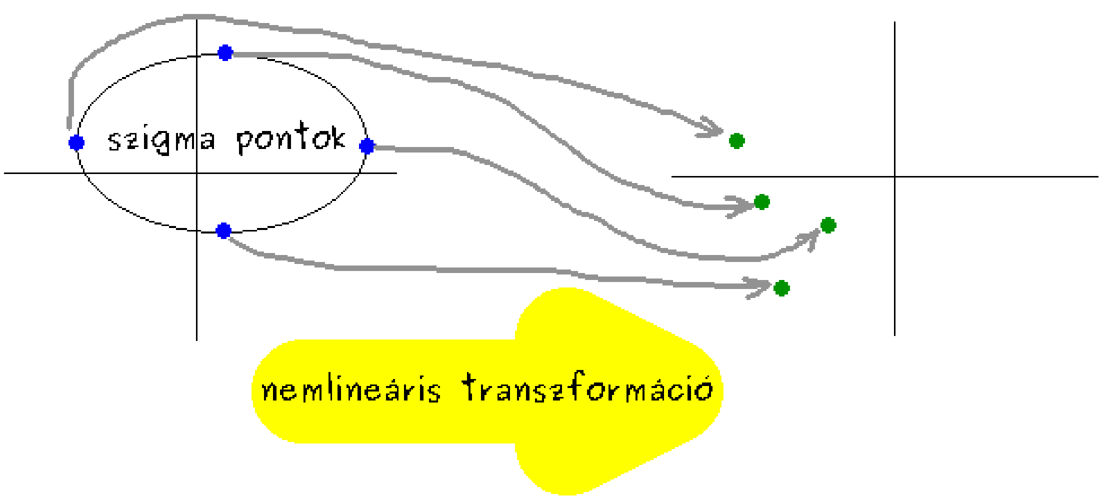
- Kálmán szűrés a Gauss eloszlású rendszer állapotának változását és méréseken alapuló frissítését írja le
- A Gauss eloszlást könnyebb közelíteni mint a nem lineáris transzformációt
- Ötlet:

    megtartjuk a nem lineáris transzformációt

    a Gauss eloszlás paramétereit (várható érték, szórás) közelítjük diszkrét pontok (ún. *szigma pontok*) segítségével (ez a *szagtalan transzformáció*)

Az UKF alapötlete

- felvesszük a szigma pontokat úgy, hogy pontosan jellemezzék a rendszer állapot átlagát és kovarianciáját
- a szigma pontokat átvisszük a nemlineáris f, h transzformációkkal az állapot- ill. mérési térbe (kovariancia terjedés nemlineáris változata)
- az átvitt pontokból számítjuk közelítőleg a rendszer állapot átlagot és kovarianciát

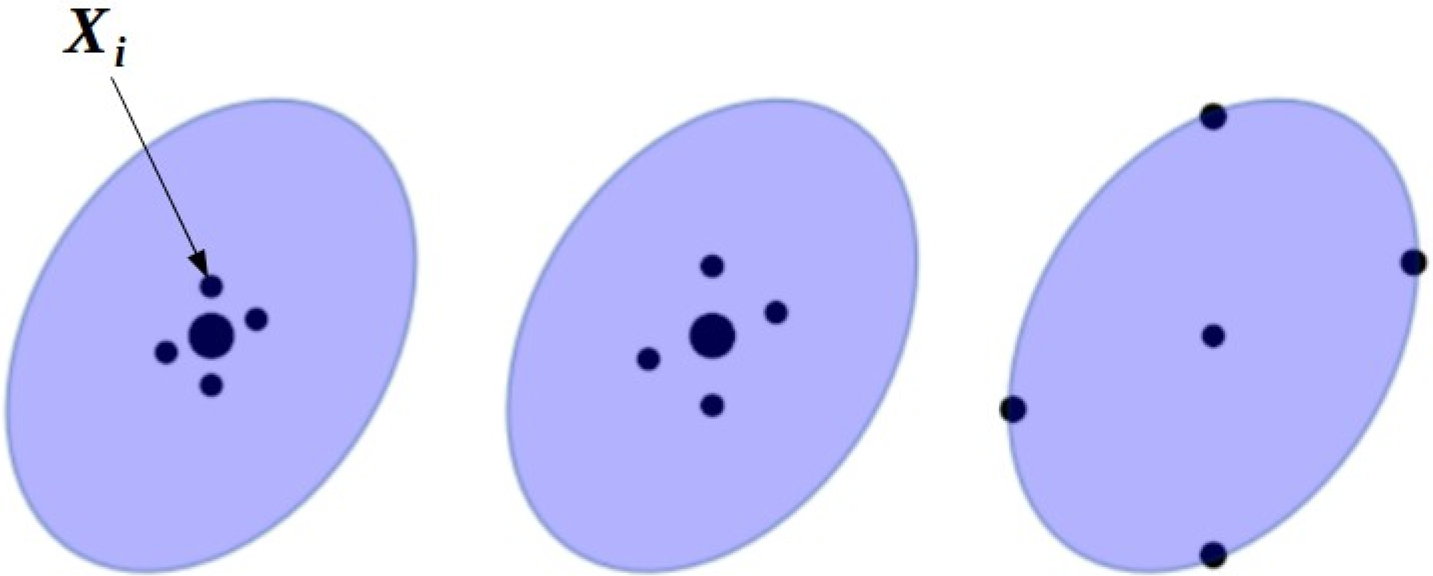


- Az eljárás rokona a Monte Carlo módszereknek, azzal a különbséggel, hogy

    jóval kevesebb pontra van szükség

    a diszkrét pontokat nem véletlenszerűen, hanem determinisztikusan vesszük fel

Szigma pontok



forrás: Roger R Labbe: [Kalman and Bayesian Filters in Python]

- n dimenziós állapottérben $2n + 1$ db. $\boldsymbol{X}_i$ szigma pontot választunk ki
- a transzformált szigma pontokat W_i súlyokkal súlyozzuk

Van der Merwe-féle skálázott szigma pontok

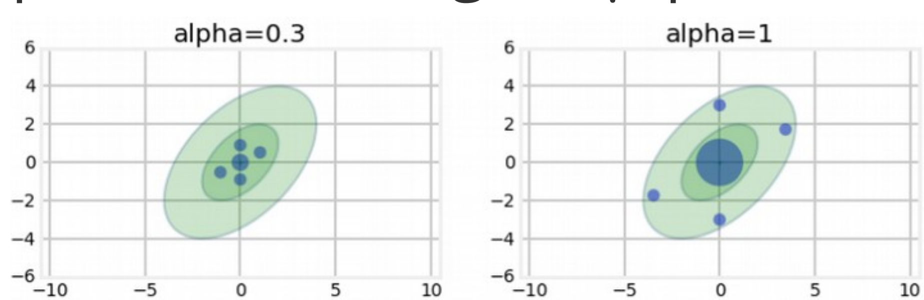
- A szigma pontok halmazát a következő összefüggések szolgáltatják:

$$\boldsymbol{X}_0 = \mu$$
$$\boldsymbol{X}_i = \mu + \left[\sqrt{(n+\lambda)\boldsymbol{P}}\right]_i \quad i = 1, \ldots, n$$
$$\boldsymbol{X}_i = \mu - \left[\sqrt{(n+\lambda)\boldsymbol{P}}\right]_{i-n} \quad i = n+1, \ldots, 2n$$

ahol $[\boldsymbol{A}]_i$ a szimmetrikus $\boldsymbol{A}$ mátrix i-edik oszlopát (vagy sorát) jelöli és

$$\lambda = \alpha^2(n+k) - n, \quad k = 3 - n.$$

- A λ és k skálatényezők, az α paraméter határozza meg a szigma pontok távolságát a μ ponttól.



forrás: Roger R Labbe: Kalman and Bayesian Filters in Python

Van der Merwe-féle súlyok

$$W_0^m = \frac{\lambda}{n+\lambda}$$

$$W_0^c = \frac{\lambda}{n+\lambda} + 1 - \alpha^2 + \beta$$

$$W_i^m = W_i^c = \frac{1}{2(n+\lambda)}, \quad i = 1, \ldots, 2n$$

m: átlaghoz

c: kovarianciához

- Gauss-eloszlás esetén az alábbi paramétereket célszerű használni:

$$\beta = 2, \; k = 3 - n, \; 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Szagtalan transzformáció

- A szagtalan transzformáció során a szigma vektorokat transzformáljuk egy nem lineáris

$$\boldsymbol{Y}_i = g(\boldsymbol{X}_i) \quad i = 0, \ldots, 2n$$

függvény segítségével, és az eredményül kapott pontokból határozzuk meg súlyozott átlagképzéssel a poszterior eloszlásfüggvény közelítő átlagát és kovarianciáját:

$$\overline{\boldsymbol{Y}} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^m \boldsymbol{Y}_i$$

$$\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{Y}} \approx \sum_{i=0}^{2n} W_i^c (\boldsymbol{Y}_i - \overline{\boldsymbol{Y}})(\boldsymbol{Y}_i - \overline{\boldsymbol{Y}})^T .$$

UKF szűrés egyenletei

- A szűrés a kezdeti rendszer állapot és kovariancia mátrixa ismeretében a $k-1$ időpontból a k időpontba lépve a következő egyenletek alapján működik, miután rendelkezésre állnak a szigma pontok.
- **Állapot átmenet**

  szigma pontok transzformációja

$$\boldsymbol{X}_{i,t}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{X}_{i,k-1},\boldsymbol{u}_{k-1}) \quad i=0,\ldots,2n$$

  rendszer állapot mérések előtti becslése

$$\hat{\boldsymbol{x}}^{-}=\sum_{i=0}^{2n} W_i^m \boldsymbol{X}_{i,t}$$

  rendszer állapot kovariancia mátrix becslése

$$\hat{\boldsymbol{P}}^{-}=\sum_{j=0}^{2n} W_j^c (\boldsymbol{X}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{x}}^{-})(\boldsymbol{X}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^{-})^T+\boldsymbol{Q}_{k-1}$$

UKF szűrés egyenletei

- Az átmenet utáni, de még a mérések előtti rendszer állapot és a kovariancia mátrix becslését a szigma pontok f függvényen (állapot átmeneti függvény) keresztül történő "átvitelével" határozzuk meg.
- **Mérés utáni állapot becslése**

  szigma pontok transzformációja a mérések terébe
  $$\boldsymbol{z}_{i,t}=\boldsymbol{h}(\boldsymbol{X}_{i,k-1},\boldsymbol{v}_{k-1})\quad i=0,\ldots,2n$$
  becslés a szigma pontok alapján
  $$\hat{\boldsymbol{z}}_k=\sum_{i=0}^{2n}W_i^m\boldsymbol{z}_{i,t}$$
  rendszer állapot kovariancia és keresztkovariancia mátrixainak becslése
  $$\boldsymbol{P}_z=\sum_{j=0}^{2n}W_j^c(\boldsymbol{z}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{z}}_k)(\boldsymbol{z}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{z}}_k)^T+\boldsymbol{R}_{k-1}$$
  $$\boldsymbol{P}_{x,z}=\sum_{j=0}^{2n}W_j^c(\boldsymbol{X}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{x}}_k^-)(\boldsymbol{z}_{j,t}-\hat{\boldsymbol{z}}_k)^T$$

UKF szűrés egyenletei

Kálmán-féle erősítési mátrix számítása

$$\boldsymbol{K}_k = \boldsymbol{P}_{x,z} \boldsymbol{P}_z^{-1}$$

rendszer állapot és kovariancia mátrix mérések utáni becslése

$$\hat{\boldsymbol{x}}_k = \hat{\boldsymbol{x}}_k^- + \boldsymbol{K}_k \left(\boldsymbol{z}_k - \hat{\boldsymbol{z}}_k \right)$$

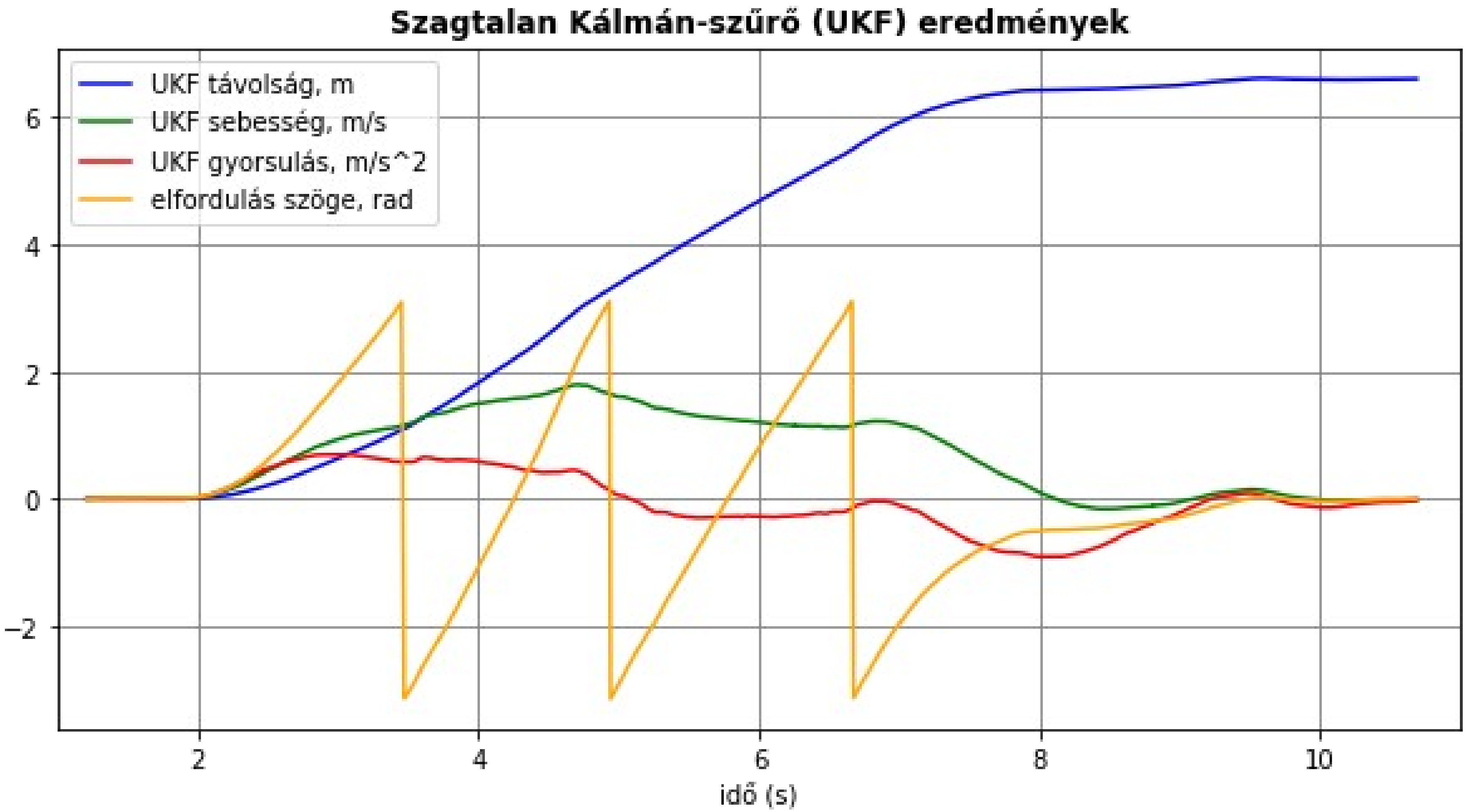
$$\boldsymbol{P}_k = \hat{\boldsymbol{P}}_k^- - \boldsymbol{K}_k \boldsymbol{P}_z \boldsymbol{K}_k^T$$

- A mérés utáni rendszer állapot, a kovariancia és keresztkovariancia mátrixok becslését a szigma pontok h függvényén (mérési függvény) keresztül történő "átvitelével" határozzuk meg.
- Az UKF szűrési algoritmus számításigénye hasonló az EKF szűréshez, viszont nagy előnye, hogy nincs szükség az átmeneti és mérési függvények Jacobi-mátrixainak az előállítására.

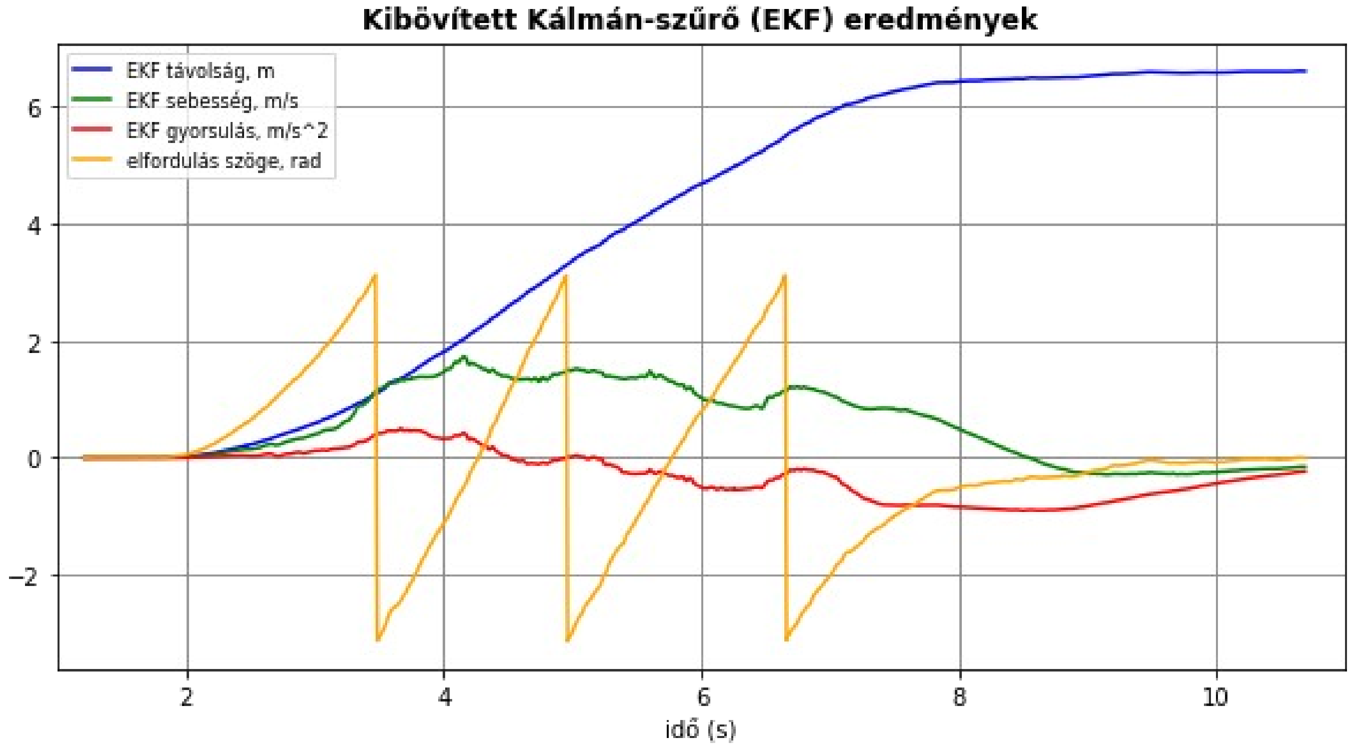
Kerék odometria UKF szűrővel

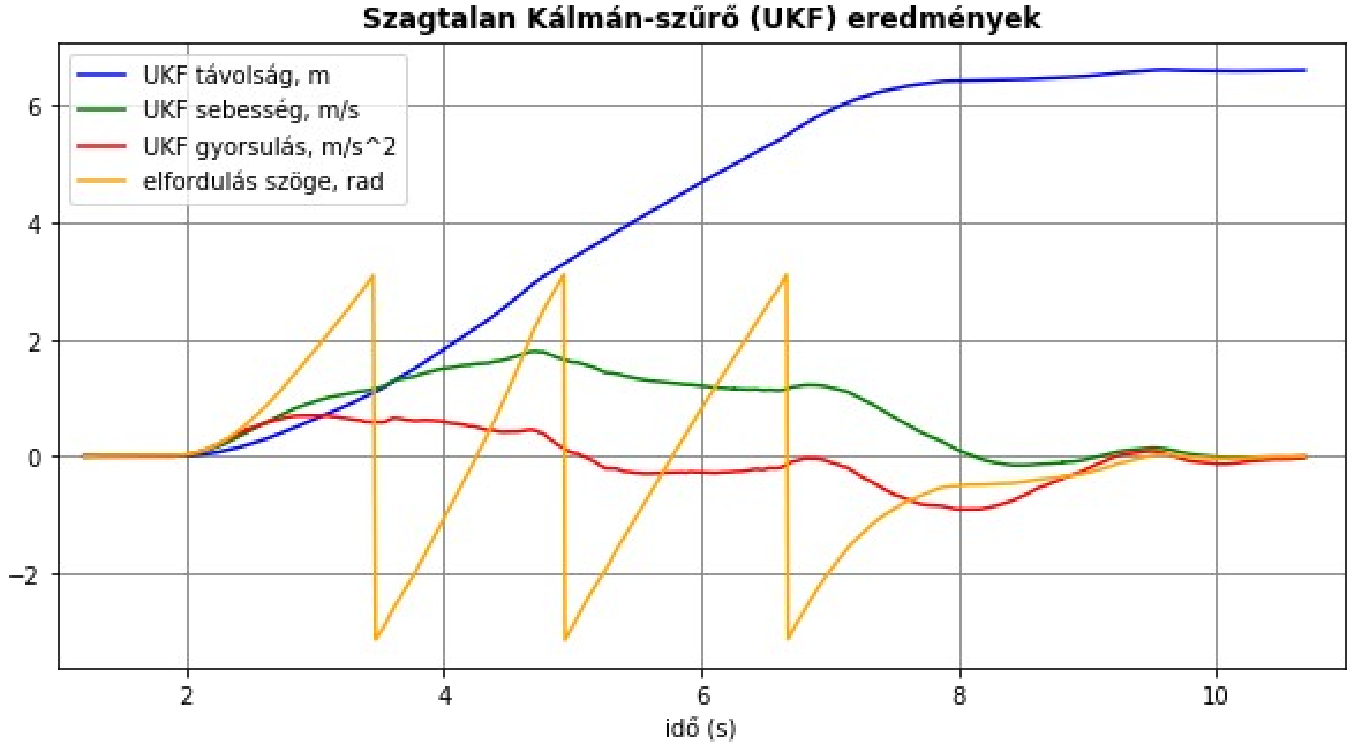
- A korábbi EKF szűrővel feldolgozott adatok szűrését végezzük el
- Roger R. Labbe FilterPy eljáráskönyvtárában található UKF implementációt használjuk.

Eredmények



Szagtalan Kálmán-szűrő (UKF) eredmények
UKF távolság, m
UKF sebesség, m/s
UKF gyorsulás, m/s^2
elfordulás szöge, rad
6
4
2
0
−2
2
4
6
8
10
idő (s)


Kibövített Kálmán-szűrő (EKF) eredmények
EKF távolság, m
EKF sebesség, m/s
EKF gyorsulás, m/s^2
elfordulás szöge, rad
6
4
2
0
−2
2
4
6
8
10
idő (s)


Szagtalan Kálmán-szűrő (UKF) eredmények
UKF távolság, m
UKF sebesség, m/s
UKF gyorsulás, m/s^2
elfordulás szöge, rad
6
4
2
0
−2
2
4
6
8
10
idő (s)

Irodalom

- Ádám et al.: Műholdas helymeghatározás, 176-178. oldal. Műegyetemi Kiadó, 2004.
- Kálmán-szűrés 2.
  Jupyter munkafüzet és Python kód: (https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/KF2.ipynb)
- Szagtalan Kálmán szűrő
  Jupyter munkafüzet és Python kód: (https://github.com/gyulat/Korszeru_matek/blob/master/UKF.ipynb)
- Welch G, Bishop G: An introduction to the Kalman Fiter, TR 95-041, UNC, 2006
- Gersdorf B, Frese U: A Kalman Filter for Odometry using a Wheel Mounted Inertial Sensor, URL: https://pdfs.semanticscholar.org/ab65/2f5c812b580f1c6b154161317b2bb9434655.pdf

Zárthelyi (8. hét)

- 45 perc, 5 kérdés, 30 pont, megadott témakörökből
- nincs minimum, nem pótolható
- témakörök, kérdések: oktatas.epito.bme.hu

1) A minta jellemző értékének mérőszámai: mintamedián, számtani átlag, leggyakoribb érték fogalma, jellemzőik és számítási összefüggéseik
2) Az adatrendszer bizonytalansága mint valamely norma értéke a minimumhelyen. L_1, L_2 és P_1 normák: közepes eltérés, szórás, határozatlanság. Konfidencia intervallumok: interkvartilis és interszeksztilis félterjedelem.
3) A statisztikai próba feladata. Mi a statisztika? A statisztikai függvény és eloszlásának meghatározása Monte Carlo eljárással. Illeszkedésvizsgálat Kolmogorov próbával. Mi a Kolmogorov próba statisztikai függvénye és a statisztika eloszlásfüggvénye? Eloszlásfüggvények (elméleti-tapasztalati és tapasztalati-tapasztalati) összehasonlításának menete kvantilis-kvantilis ábrával. Mit nevezünk kvantilisnek?

4) Mit ad meg az IC-függvény, és mire tudjuk használni az IC görbét? Az aszimptotikus szórásnégyzet definíciója. Mit fejez ki a Cramér-Rao határ?
5) Mi egy becslés abszolút hatásfoka és mi a hatásfok jelentősége a gyakorlati munkában? Definiálja két becslés relatív hatásfokát! Mikor nevezhető egy becslés vagy statisztikai algoritmus robusztusnak?
6) Mi a különbség a klasszikus és a bayesi szemléletű valószínűség felfogás között? Mondja ki Bayes tételét teljes eseményrendszerre! Ismertesse Bayes tételét sűrűségfüggvényekre alkalmazva. Mit fejez ki a likelihood függvény, mi a prior és a poszterior? A prior és a poszterior esélyhányados definíciója.
7) Milyen lépésekből áll egy Monte Carlo eljárással végzett számítás? Hogyan használható egy mérési eljárás esetében a kimeneti értékek legjellemzőbb értékeinek és mérési bizonytalanságainak a számítására?

8) Adja meg a mérési bizonytalanság definícióját és meghatározásának alapvető eljárásait a GUM alapján. Mondjon példákat a mérési bizonytalanság megadására. Minek tekinthető a geodéziában használt középhiba a GUM szempontjából? Mi a kiterjesztett bizonytalanság és a megbízhatósági tartomány?

9) Röviden ismertesse a GNSS mérések kiegyenlítésének általános modelljét (funkcionális és sztochasztikus modell). Miért kell linearizálni a közvetítő egyenleteket? Mi a ponthiba és a közepes ponthiba, és hogyan lehet ezeket meghatározni három dimenzióban a ponthoz tartozó kiegyenlítés utáni kovariancia mátrix segítségével?

10) Mi az egész értékű legkisebb négyzetek módszerének a lényege és mit nevezünk leképezési függvénynek? Miért van szükség dekorrelációra a megoldás megtalálásához?

11) Milyen kiegyenlítési eljárás alkalmazható abban az esetben, ha sokkal több a mérés mint ahány paraméter van? Ismertesse röviden ennek az eljárásnak a lényegét.

1. házi feladat (8. hét)

- Kálmán szűrés (10 pont)
- beadás: oktatas.epito.bme.hu
- határidő: félév vége