



10. előadás

Miről lesz szó?

- Paraméterbecslések

Valószínűségeloszlások paramétereinek
maximum likelihood becslése

Maximum likelihood típusú becslések
(M-becslések)

Paraméterbecslés

- Statisztikai minta eloszlásfüggvénye, ismeretlen paraméterek, sűrűségfüggvény
- Likelihood függvény
- Torzítatlan, hatékony, konzisztens becslés
- A maximális valószínűség (maximum likelihood) elve
- M-becslések

Statisztikai becslés

- Azt a statisztikai eljárást, mely a minta ismeretében valamely mintajellemzőt állít elő, *statisztikai becslésnek* nevezzük
- Ha *ismerjük* az adateloszlást jellemző $f(x)$ sűrűségfüggvény típusát
 - maximum likelihood (ML) becslés
- Ha *nem ismerjük* az $f(x)$ sűrűségfüggvény típusát
 - M-becslés

Statisztikai minta eloszlásfüggvénye

- Statisztikai *minta* mért értékek (valószínűségi változók)

együttese: $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$

- Minta *eloszlásfüggvényei*: $F_1(x), F_2(x), \dots, F_n(x)$

- Minta *együttes* eloszlásfüggvénye

független mintavétel:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F_i(x_i)$$

azonos eloszlású mintaelemek:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n F(x_i)$$

ismeretlen *paraméterek* (a_1, a_1, \dots, a_m)

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = F(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Minta sűrűségfüggvénye, likelihood függvény

- Statisztikai minta *sűrűségfüggvénye* az x_1, x_2, \dots, x_n változók szerinti derivált

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = L(x_1, x_2, \dots, x_n; a_1, a_2, \dots, a_m) = \frac{\partial^n F(\mathbf{x}, \mathbf{a})}{\partial x_1 \partial x_2 \dots \partial x_n}$$

- Ez a *likelihood függvény*
- logaritmus a *loglikelihood függvény*

Paraméterbecslés kívánatos tulajdonságai

- Statisztikai minta bármely függvénye: *statisztika*

$$\tilde{a}_k = t_k(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = t_k(\xi) \quad \tilde{a}_k: \text{paraméter becsült értéke}$$

- **Torzítatlan** a paraméter becslése, ha az M várható érték

$$M(\tilde{a}_k) = a_k \quad k = 1, 2, \dots, m$$

- A becsült paraméter *szórása* legyen a lehető *legkisebb*

Aszimptotikus szórás nem csökkenthető minden határon túl (*Cramér-Rao határ*)

Érje el ezt az alsó határt, vagyis legyen **hatékony** (*efficiens*) becslés

Paraméterbecslés kívánatos tulajdonságai

- A becsléseink javuljanak, ahogy az n mintanagyság növekszik: a becslés legyen ***konzisztens***
- Egy becslési eljárás *konzisztens*, ha a mérések n számának növekedésével a paraméterek becsült értékei a valódi értékhez tartanak minden k -ra és tetszőleges pozitív ε -ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left\{ |\tilde{a}_k - a_k| > \varepsilon \right\} = 0$$

- Gyakori eset, hogy a paraméterek becsült értékeinek a szórása növekvő n -el 0-hoz tart. Ekkor a becslés konzisztens:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} D(\tilde{a}_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, m$$

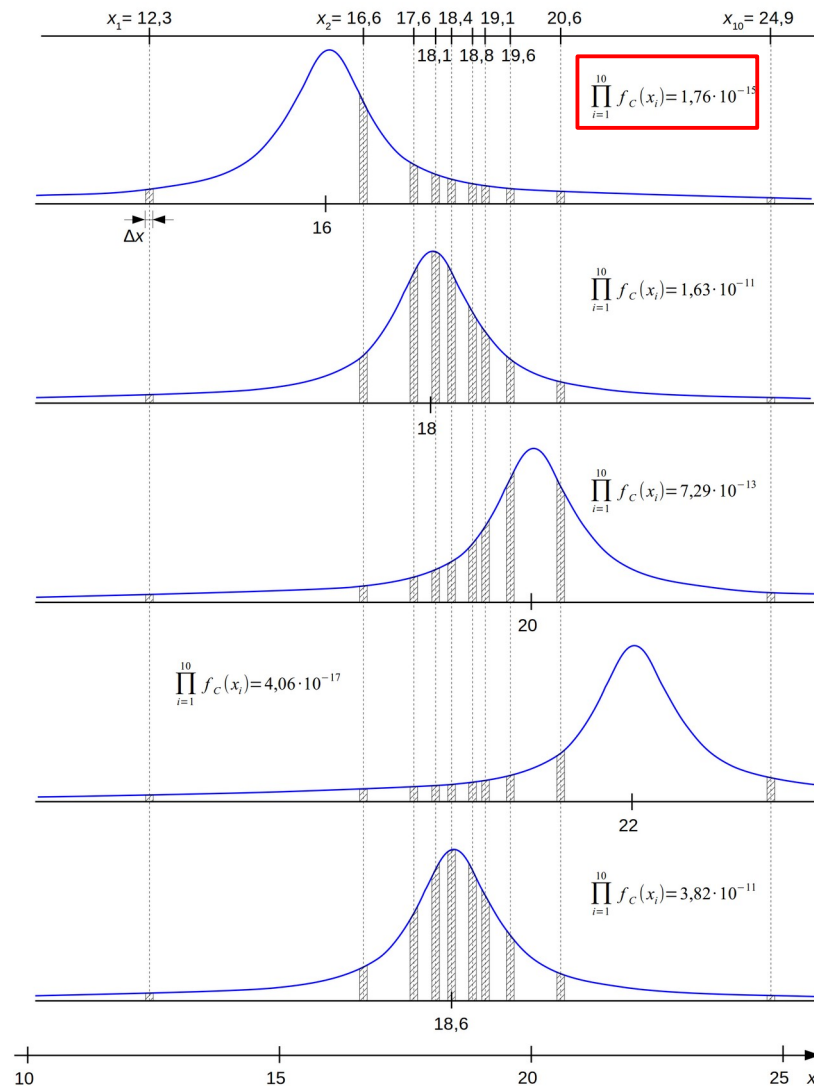
Maximum likelihood módszer

- Elv: Keressük azt az a paramétert, amelyre a minta $p(\mathbf{x}, a)$ valószínűsége maximális lesz
ismernünk kell a minta eloszlását
- R. Fisher vezette be ezen a néven a módszert 1912-ben
- A maximum likelihood elv konzisztens becslésekhez vezet, mely elég nagy n -re közelítőleg Gauss eloszlású (becslés, nem minta eloszlás!)
- Példa
Cauchy eloszlású mintánk van, egységnyi skála paraméterrel ($S = 1$)
 T helyparamétert becsüljük

Maximum likelihood módszer

- $f(x)$ típusát ismerjük: Cauchy eloszlás ($f_C(x)$)
- 10 elemű mintánk van [12.3, 16.6, 17.6, 18.1, 18.4, 18.8, 19.1, 19.6, 20.6, 24.9]
- A T helyparaméter maximum likelihood becslését keressük

$$\prod_{i=1}^{10} f_C(x_i, T) = \text{maximum}$$



Cauchy eloszlású minta

- egységnyi skála paraméterrel:

$$f_C(x, T) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + (x - T)^2}$$

- 10 elemű mintánk van
[12.3, 16.6, 17.6, 18.1, 18.4, 18.8, 19.1, 19.6, 20.6, 24.9]
- A helyparaméter értéke legyen $T = 16$. Ekkor a szorzat értéke

$$\prod_{i=1}^{10} f_C(x_i) = 0.022 \cdot 0.234 \cdot 0.089 \cdot 0.059 \cdot 0.047 \cdot 0.036 \cdot 0.030 \cdot 0.023 \cdot 0.014 \cdot 0.004 = 1.76 \cdot 10^{-15}$$

Számítás

```
import numpy as np
```

```
# minta
```

```
m = [12.3, 16.6, 17.6, 18.1, 18.4, 18.8, 19.1, 19.6, 20.6, 24.9]
```

```
# helyparaméterek
```

```
T = [16, 18, 20, 22, 18.6]
```

```
# 1 skálaparaméterű Cauchy-eloszlás
```

```
def fc(x,T):
```

```
    return 1/np.pi*1/(1+(x-T)**2)
```

```
mn = np.array(m)
```

```
for Ti in T:
```

```
    pi = np.prod(fc(mn,Ti))
```

```
    print("T = {:.1f}: Π(fc): {:.2e}".format(Ti,pi))
```

```
T = 16.0: Π(fc): 1.76e-15
```

```
T = 18.0: Π(fc): 1.63e-11
```

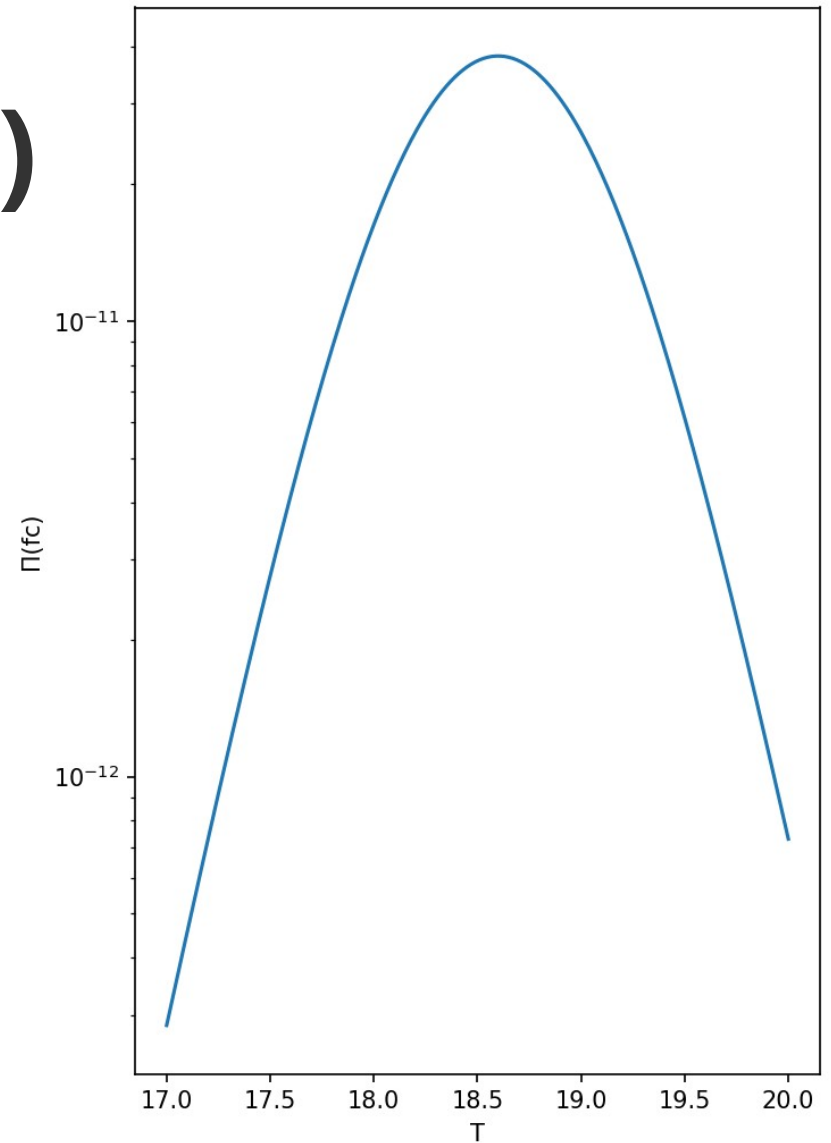
```
T = 20.0: Π(fc): 7.29e-13
```

```
T = 22.0: Π(fc): 4.06e-17
```

```
T = 18.6: Π(fc): 3.82e-11
```

Rajz (likelihood fv.)

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.figure(figsize=(5, 7))
x = np.linspace(17, 20, 301)
nx = len(x)
nm = len(m)
px = np.prod(fc(np.tile(m,
                        (nx, 1)), np.tile(x, (nm, 1))).T), axis=1)
plt.semilogy(x, px)
plt.xlabel('T')
plt.ylabel('Π(fc)')
```

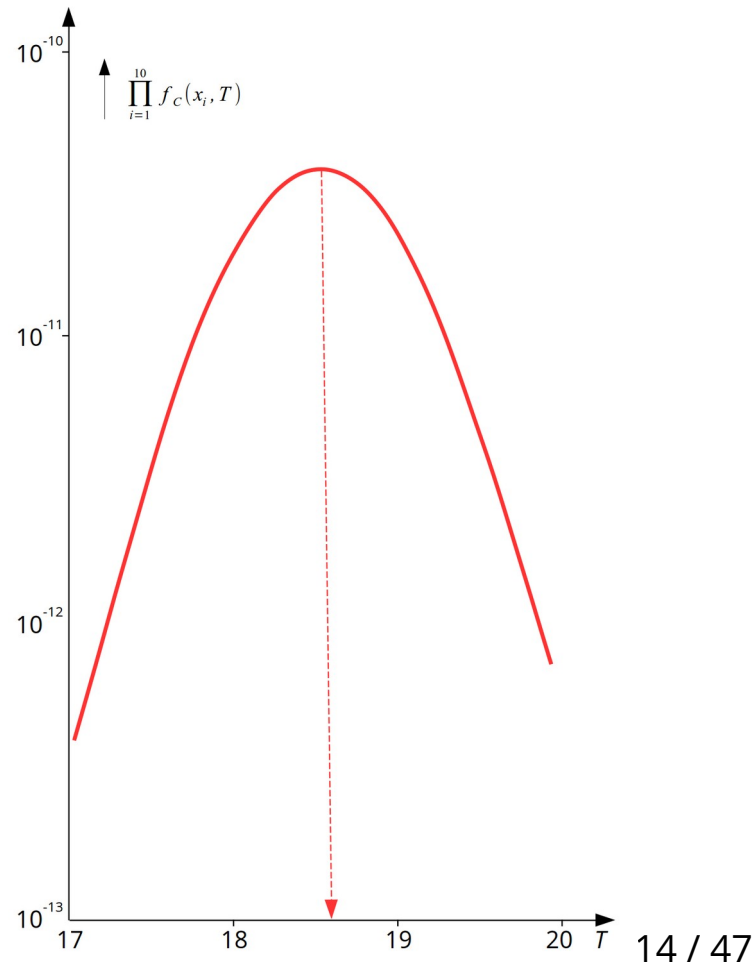


Maximum likelihood módszer

- szemilogaritmikus skálán

$$\prod_{i=1}^{10} f_C(x_i, T)$$

- A T helyparaméter maximum likelihood becslése: 18.6



ML becslés algoritmus

- Milyen algoritmus alkalmazásával számíthatjuk ki a maximum likelihood (ML) elvnek eleget tevő T értéket?

attól függ, milyen az a priori ismert $f(x)$ eloszlás:

$$p(\mathbf{x}, T) = \prod_{i=1}^n f(x_i, T) \cdot (\Delta x)^n = \text{maximum}$$

ezzel ekvivalens alakok

$$\prod_{i=1}^n f(x_i, T) = \text{maximum}$$

$$\sum_{i=1}^n \ln f(x_i, T) = \text{maximum}$$

ML becslés – Cauchy eloszlás

- Az ismert eloszlásfüggvény Cauchy-féle ($f_C(x)$) $f(x) = f_C(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+(x-T)^2}$
- a ML becslés $\sum_{i=1}^n \ln \frac{1}{1+(x_i-T)^2} = \text{maximum}$
- differenciálás után $\sum_{i=1}^n \frac{x_i - T}{1+(x_i-T)^2} = 0$
- megoldás T -re:
$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{1+(x_i-T)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+(x_i-T)^2}}$$

ML becslés – Cauchy eloszlás

- Az egységnyi helyett ε szélesség paraméterű eloszlásra

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\varepsilon^2 + (x_i - T)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon^2 + (x_i - T)^2}} = M_n = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{\varepsilon^2 + (x_i - M_n)^2}}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\varepsilon^2 + (x_i - M_n)^2}}$$

A ML becslés algoritmus a *leggyakoribb érték* meghatározásának algoritmusával

ML becslés - $f_a(x)$ szupermodell

- a : típusparaméter; $a = 2$: Cauchy-eloszlás
- $a = N + 1$: N szabadságfokú Student-eloszlás
- általános alak megkapható x helyére $(x - T)/S$ -et írva és S -el osztva

$$f_a(x) = n(a) \frac{1}{[\sqrt{x^2 + 1}]^a} \quad n(a) = \frac{\Gamma\left(\frac{a}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{a-1}{2}\right)}$$

A T helyparaméter ML becslésének algoritmus *ebben az esetben is azonos* a leggyakoribb érték meghatározásának algoritmusával.

ML becslés – Gauss eloszlás

- Az ismert eloszlásfüggvény Gauss-féle ($f_G(x)$)

$$f(x) = f_G(x) = \text{const} \cdot e^{-\frac{(x-T)^2}{2}}$$

a ML becslés

$$-\sum_{i=1}^n (x_i - T)^2 = \text{maximum}$$

differenciálás után

$$\sum_{i=1}^n (x_i - T) = 0$$

megoldás T -re:

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

ML becslés – Gauss eloszlás

- Az egységnyi szélesség paraméterű eloszlásra

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = E_n$$

A ML becslés algoritmus a *számtani átlag* meghatározásának algoritmusával

- C. F. Gauss *fordított* gondolatmenete (*nem* az adateloszlásból indult ki!):
 - Olyan becslést akart, amihez a számtani átlagképzés tartozik optimális szimmetriapont meghatározási algoritmusként.
 - Melyik ez a sűrűségfüggvény?
A válasz: a *Gauss eloszlás* („normális” eloszlás) sűrűségfüggvénye

Gauss eloszlás S skála paraméterének ML becslése

- likelihood függvény

$$L = \prod_{i=1}^n f(x_i, S, T) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{S \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2S^2} \cdot (x_i - T)^2} = \frac{1}{(S \sqrt{2\pi})^n} e^{-\frac{1}{2S^2} \sum_{i=1}^n (x_i - T)^2}$$

- loglikelihood függvény

$$L^* = \ln L = \left(-n \ln S - \frac{n}{2} \ln 2\pi \right) - \left(\frac{1}{2S^2} \sum_{i=1}^n (x_i - T)^2 \right) = \max$$

- S szerinti parciális derivált

$$\frac{\partial L^*}{\partial S} = -\frac{n}{S} + \frac{1}{S^3} \sum_{i=1}^n (x_i - T)^2 = 0$$

- S skála paraméter ML becslése
az *empirikus szórás*

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - T)^2} = \sigma_n$$

ML becslés és M-becslés

- Az ML becslés *minimumfeltételként* megfogalmazva:

$$-\sum_{i=1}^n \ln f(x_i, T) = \text{minimum}$$

A gyakorlatban sokszor *nem ismerjük* az anyaeloszlás, $f(x)$ típusát

- *Huber* javaslata: helyettesítsük az ismeretlen negatív logaritmizált $f(x)$ eloszlást egy *ismert* $\rho(x)$ függvénnyel

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i, T) = \text{minimum}$$

ekkor is kapunk becslést a T helyparaméterre

ez az **M-becslés**, $\rho(x, T)$ a *célfüggvény*

M-becslés hatásfüggvénye

- A célfüggvény minimalizálása helyett a differenciálással kapható

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i, T) = 0$$

megoldása célszerűbb

- Az M-becslést a célfüggvény helyett közvetlenül a $\psi(\mathbf{x}, T)$ függvénnyel, a *hatásfüggvénnyel* is megadhatjuk:

$$\psi(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial \rho(\mathbf{x}, T)}{\partial T}$$

a T helyparaméter becslés esetén

$$\sum_{i=1}^n \rho(x_i - T) = \text{minimum}$$

$$\sum_{i=1}^n \psi(x_i - T) = 0$$

M-becslés súlyfüggvénye

- a T helyparaméter becslés esetén, ha bevezetjük a

$$\varphi(x_i) = \frac{\psi(x_i - T)}{x_i - T} \quad \text{súlyfüggvényt,}$$

az M-becslést súlyozott átlag képzésére vezethetjük vissza:

$$\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot (x_i - T) = 0$$

a megoldása

$$T = \frac{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n \varphi(x_i)}$$

M-becslés skálaparaméterre

- az S skálaparaméter becslés esetén a ψ -vel analóg függvényt χ -vel szokás jelölni
- az M-becslést az alábbi egyenlet megoldása adja:

$$\sum_{i=1}^n \chi\left(\frac{x_i - T}{S}\right) = 0$$

feltételezve, hogy a T helyparaméter már ismert

M-becslés az ismertebb eloszlástípusokra

1. Gauss eloszlás

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\rho(x) = \frac{x^2}{2}$$

célfüggvény

$$\psi(x) = x$$

hatásfüggvény

$$\varphi(x) = 1$$

súlyfüggvény

az M-becslés az *átlaggal* egyezik meg

a hibák négyzetösszegét minimalizáljuk (ez a LKN vagy L2 norma szerinti becslés)

a hatásfüggvény *lineáris*, ezért

a megoldandó egyenletrendszer is *lineáris*

M-becslés az ismertebb eloszlástípusokra

2. Laplace eloszlás

$$f(x) = e^{-|x|} \quad \rho(x) = |x| \quad \psi(x) = \text{sign } x \quad \varphi(x) = \frac{1}{|x|}$$

célfüggvény hatásfüggvény súlyfüggvény

az M-becslés a *medián*nal egyezik meg

ahhoz, hogy az előjelek összege zérus legyen, az adatok felének előjele pozitív, a másik feléé negatív kell, hogy legyen – ez a tapasztalati medián (sign y : y előjele: +1/-1)

a hibák abszolút értékének összegét minimalizáljuk (L1 norma szerinti becslés, Boscovich, 1790, Laplace, 1799)

M-becslés az ismertebb eloszlástípusokra

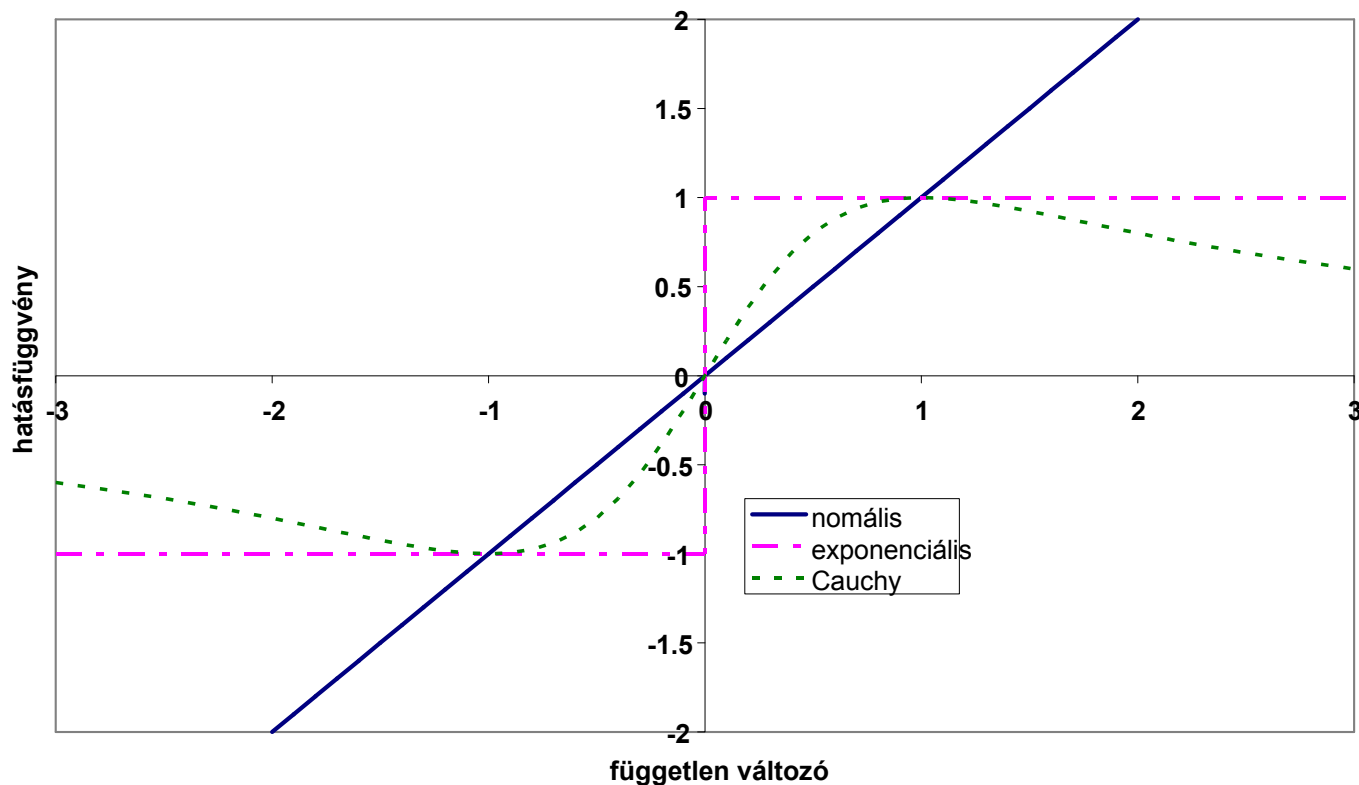
3. Cauchy eloszlás

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \rho(x) = \ln(1+x^2) \quad \psi(x) = \frac{2x}{1+x^2} \quad \varphi(x) = \frac{2}{1+x^2}$$

célfüggvény hatásfüggvény súlyfüggvény

az M-becslés a *leggyakoribb értékkel* egyezik meg (Steiner, 1990)
csak iterációval határozható meg

Az M-becslők hatásfüggvényei



- Ha a hatásfüggvény nem korlátos, a becslés nem rezisztens (vagyis érzékeny a kivágó értékekre): A Gauss eloszláson alapuló M-becslés nem rezisztens

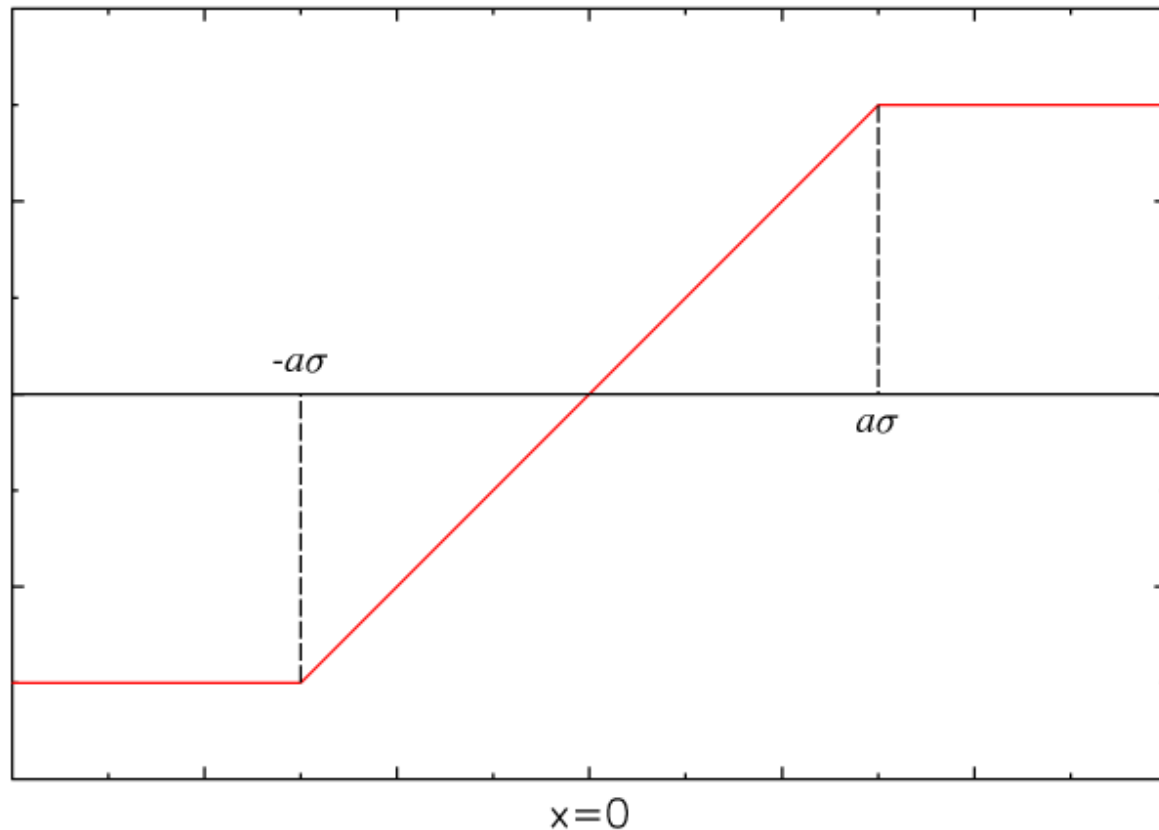
Huber hatásfüggvénye

- A tapasztalatok szerint a geodéziai mérési eredmények hibaeloszlása középén gyakran jó közelítéssel Gauss eloszlású, de a széleken bizonytalan
- Huber az alábbi hatásfüggvényt javasolta (például az $a = 1.5\sigma$ paraméterrel)

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq a \\ a \operatorname{sign} x & \text{egyébként} \end{cases}$$

A Huber hatásfüggvény alakja

Huber hatásfüggvénye



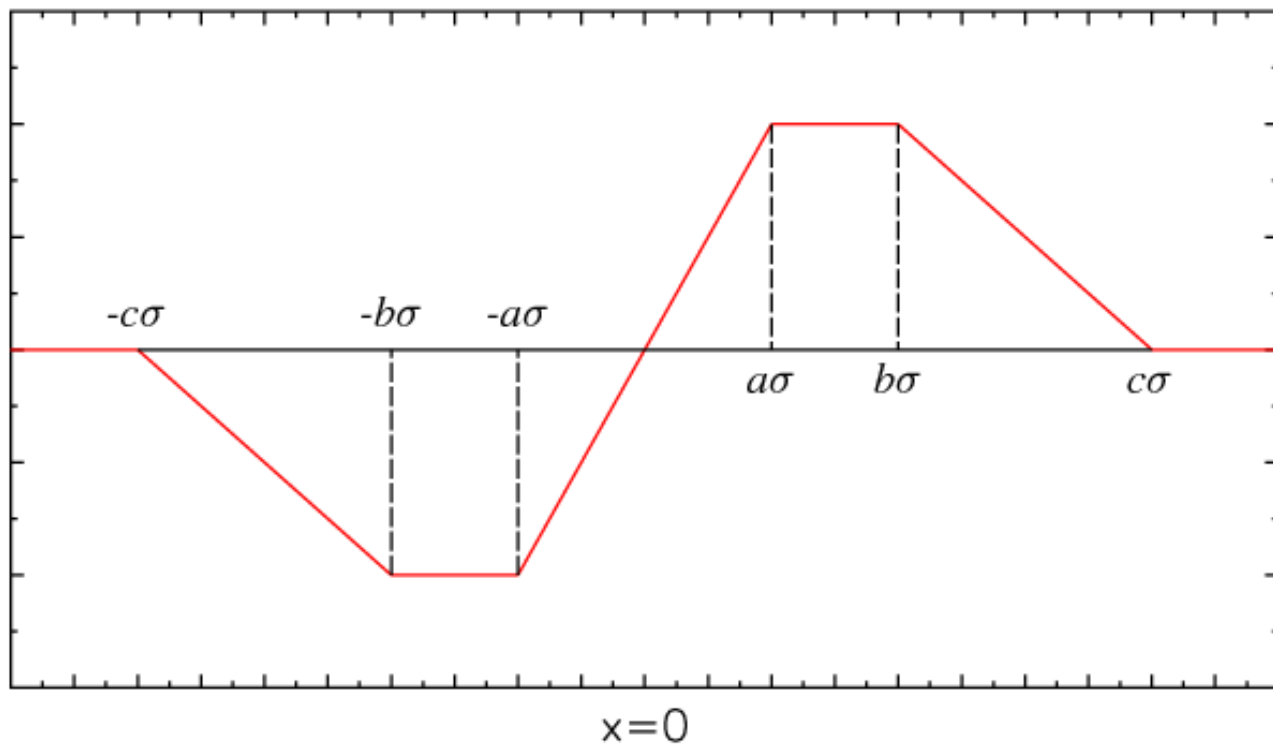
Hampel hatásfüggvénye

- A durva hibák (kivágó értékek) biztos kizárása érdekében Hampel a hatásfüggvényt a széleken csökkentette

$$\Psi(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } |x| \leq a \\ a \operatorname{sign} x & \text{ha } a < |x| \leq b \\ \frac{a(c \operatorname{sign} x - x)}{c - b} & \text{ha } b < |x| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

A Hampel hatásfüggvény alakja

Hampel hatásfüggvénye



$x > 0$ értékekre 4 részből áll a hatásfüggvény

pl. a dán geodéziai alaphálózat kiegyenlítésekor alkalmazták

Rezisztens kiegyenlítés M-becslőkkel

- *Hampel* hatásfüggvényét alkalmazzuk a közvetett mérések rezisztens kiegyenlítésére

Huber hatásfüggvénye *Hampel* speciális esete,
ha $b = c = \infty$

- r elemű \mathbf{x} paramétervektor
- n elemű \mathbf{v} hibavektor $\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}$ $\mathbf{A} = \left[a_{i,j} \right]_{i=1,n}^{j=1,r}$

A célfüggvény minimalizálása

- az \mathbf{x} paramétervektor legjobb becslésének feltételi egyenlete:

$$\sum_{i=1}^n \rho(v_i, \mathbf{x}) \Rightarrow \min$$

- az aktuális szélsőérték-feladatnál:

$$v_i = \sum_{j=1}^r a_{i,j} x_j - l_i \quad i = 1, \dots, n$$

ezért

$$\frac{dv_i}{dx_k} = a_{i,k} \quad k = 1, \dots, r$$

A szélsőérték megkeresése

- az \mathbf{x} paramétervektor legjobb becslése a célfüggvény \mathbf{x} szerinti deriválásával:

$$\frac{d}{dx_k} \sum_{i=1}^n \rho(v_i(\mathbf{x})) = \sum_{i=1}^n \frac{d\rho(v_i(\mathbf{x}))}{dv_i} \frac{dv_i}{dx_k} = \sum_{i=1}^n a_{i,k} \psi(v_i) = 0 \quad k=1, \dots, r$$

tömörített írásmódban

$$\mathbf{A}^T \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} \quad \boldsymbol{\psi}(\mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \psi(v_1) \\ \psi(v_2) \\ \vdots \end{bmatrix}$$

és $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{v})$ a Hampel-féle hatásfüggvény

A mérési javítások Gauss eloszlásúak

- $\psi(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ (a hatásfüggvény lineáris)
- az \mathbf{x} paramétervektor „rezisztens” becslése megegyezik a LKN kiegyenlítéssel:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{v} = \mathbf{A}^T (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{l}) = 0$$

ebből $\mathbf{x} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{l}$

A Hampel-módszer javítási egyenletei

- az A mátrixot a v_i hibák nagysága alapján függőlegesen 4 almátrixra bonthatjuk

$$A_1 (|v_i| \leq a), A_2 (a < |v_i| \leq b),$$

$$A_3 (b < |v_i| \leq c) \text{ és } A_4 (c < |v_i|)$$

- particionáljuk ennek megfelelően a javítási egyenleteket:

$$\begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \\ v^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix} \cdot x - \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \\ l_4 \end{bmatrix}$$

A Hampel-módszer feltételi egyenletei

- a feltételi egyenleteket is 4 almatrixra bonthatjuk

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1^T & \mathbf{A}_2^T & \mathbf{A}_3^T & \mathbf{A}_4^T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \psi(\mathbf{v}^1) \\ \psi(\mathbf{v}^2) \\ \psi(\mathbf{v}^3) \\ \psi(\mathbf{v}^4) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

amelyből

$$\mathbf{A}_1^T \psi(\mathbf{v}^1) + \mathbf{A}_2^T \psi(\mathbf{v}^2) + \mathbf{A}_3^T \psi(\mathbf{v}^3) + \mathbf{A}_4^T \psi(\mathbf{v}^4) = \mathbf{0}$$

A megoldandó egyenletrendszer

- A $\psi(\mathbf{v})$ a Hampel-féle hatásfüggvény behelyettesítése után

$$\mathbf{A}_1^T \mathbf{v}^1 + \mathbf{A}_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + \mathbf{A}_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 - \mathbf{v}^3) = 0$$

a javításokat beírva

$$\mathbf{A}_1^T (\mathbf{A}_1 \mathbf{x} - \mathbf{l}_1) + \mathbf{A}_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + \mathbf{A}_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 + \mathbf{l}_3 - \mathbf{A}_3 \mathbf{x}) = 0$$

A megoldandó egyenletrendszer

- Az előző egyenletet rendezve

$$\left[\begin{array}{cc} A_1^T & A_1 - A_3^T A_3 \frac{a}{c-b} \end{array} \right] \mathbf{x} = A_1^T \mathbf{l}_1 - A_2^T a \operatorname{sign} \mathbf{v}^2 + A_3^T \frac{a}{c-b} (c \operatorname{sign} \mathbf{v}^3 + \mathbf{l}_3)$$

- Végeredményben egy $\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{d}$ alakú egyenletrendszerhez jutunk, ahol

$$\mathbf{B} = A^T P A \qquad \mathbf{d} = A^T P \mathbf{l} - a A^T Q \operatorname{sign} \mathbf{v}$$

A súlymátrixok

- az előző egyenletekben P és Q átlós súlymátrixok, melyeknek főátlóelemei:

$$p_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |v_i| \leq a \\ \frac{a}{b-c} & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases} \quad q_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{ha } a < |v_i| \leq b \\ \frac{b}{c-b} & \text{ha } b < |v_i| \leq c \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- a megoldás *iterációban* történik
- a v ellentmondás-vektor alapján a kiegyenlítést mindig az aktuális *osztályba sorolásnak* megfelelően ismételjük meg

A dán módszer

- durvahibasűrésre kifejlesztett eljárás *Krarrup* (1967) elgondolása nyomán
- a mérések *iteratív újrásúlyozása* a kiegyenlítésből kapott mérési javítások függvényében (a gyakorlatban $a = 3$)

$$p_{i+1} = \begin{cases} 1 & \text{ha } |v_i| < a \cdot \sigma \\ e^{-\frac{|v_i|}{a \cdot \sigma}} & \text{egyébként} \end{cases}$$

Példa rezisztens M-kiegyenlítésre: regressziós egyenes számítása

- LKN paraméter becslés

egyenes egyenlete:

paraméter vektor:

alakmátrix:

tisztatag vektor:

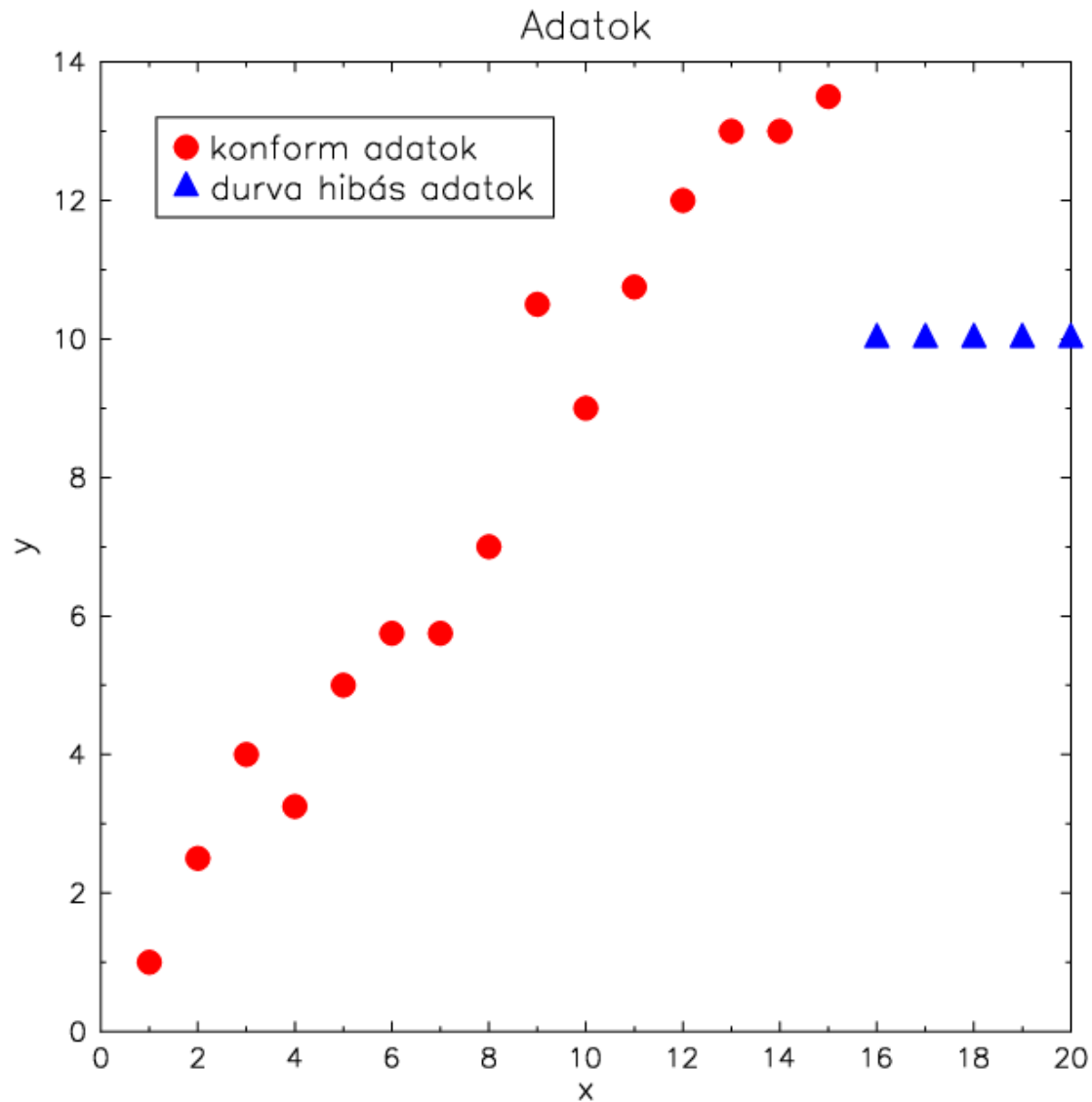
$$y = ax + b$$

$$\mathbf{x} = [a \quad b]^T$$

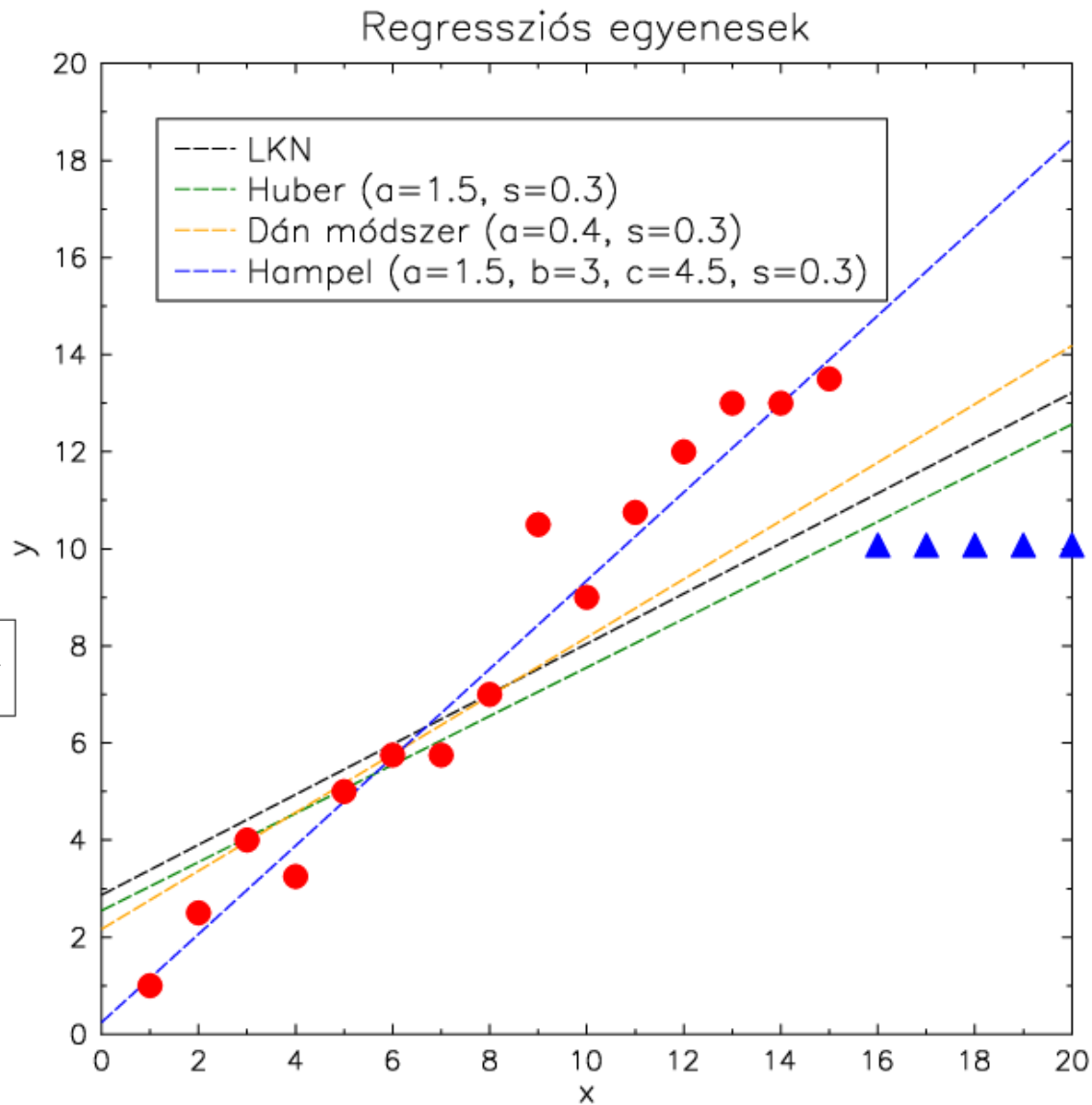
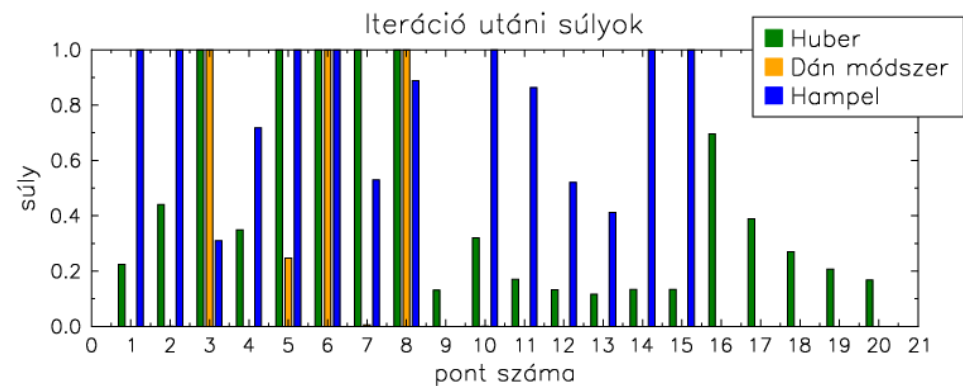
$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\mathbf{l} = [y_1 \quad \cdots \quad y_n]^T$$

Mérések (5/20 durva hibás)



Eredmények





Tananyag, szakirodalom

- Steiner (1990): 5.2
- Vincze (1968): 4.2-4.4, 4.7.1
- Szabó Norbert Péter (2012): Bevezetés a geostatisztikába. Jegyzet. Miskolci Egyetem
- Huber P.J. (1981): Robust Statistics. Wiley & Sons 3.2 (M-Estimates)