TORZULÁSOK MEGHATÁROZÁSA A VETÜLETI EGYENLETEKBŐL (GÖMBI ALAPFELÜLET ESETÉN)

Gömbi alapfelület esetén az egyenletekbe *N* és *M* helyett *R*-et, Φ és Λ helyett φ-t és λ-t kell behelyettesíteni.

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2$$

Lineármodulus a meridián irányában

$$l_m = \frac{\sqrt{E}}{R}$$

Lineármodulus a paralelkör irányában

$$l_p = \frac{\sqrt{G}}{R\cos\varphi}$$

A fokhálózat vetületi torzulása

$$\cos\Theta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\sqrt{EG}}$$

A torzulási ellipszis féltengelyei:

$$A^2 = (a+b)^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial \varphi} - \frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$B^2 = (a-b)^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{\partial x}{\partial \varphi} - \frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{R}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{1}{R\cos\varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2$$

$$a = \frac{A+B}{2}; b = \frac{A-B}{2}$$

A vetület *szögtartó*, ha *a* = *b*, ha *a* = 1/*b*, akkor a vetület *területtartó*. Minden más esetben *általános torzulású* a vetület.

SZÁMÍTÁSI PÉLDA

Vetületi egyenletek:

$$x = R \ln \tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) \qquad y = R\,\lambda$$

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \frac{R}{2\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \frac{R}{2\sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} = \frac{R}{\sin\left(90^\circ + \varphi\right)} = \frac{R}{\cos\varphi}$$

Itt a $2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$ goniometriai összefüggést használtuk fel.

$$\frac{\partial x}{\partial \lambda} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0, \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = R$$

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 = \left(\frac{R}{\cos\varphi}\right)^2; \; G = \left(\frac{\partial x}{\partial \lambda}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \lambda}\right)^2 = R^2$$

$$l_m = \frac{\sqrt{E}}{M} = \frac{R}{R\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}; \; l_p = \frac{\sqrt{G}}{N\cos\varphi} = \frac{R}{R\cos\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

$$l_m = l_p$$

$$\cos\Theta = \frac{\frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial y}{\partial \lambda} - \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial x}{\partial \lambda}}{\sqrt{EG}} = \frac{\frac{R^2}{\cos\varphi}}{\frac{R^2}{\cos\varphi}} = 1$$

$$\Theta = 0^\circ$$

Ez azt jelenti, hogy a *fokhálózat nem torzul*, vagyis a fokhálózat metszésszögének eltérése a derékszögtől zérus.

$$(a+b)^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{R}{\cos\varphi} + \frac{R}{R\cos\varphi}\right)^2; \; (a-b)^2 = \left(\frac{1}{R}\frac{R}{\cos\varphi} - \frac{R}{R\cos\varphi}\right)^2$$

$$a+b = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}; \; a-b = \frac{1}{\cos\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} = 0$$

$$2a = \frac{2}{\cos\varphi} \qquad a = b = \frac{1}{\cos\varphi}$$

A vetület *szögtartó*, mert *a* = *b*.

SZÁMÍTÁSI PÉLDA MEGOLDÁSA MATLAB SEGÍTSÉGÉVEL

```
%% Torzulási viszonyok megállapítása a vetületi egyenletek alapján
clear all; clc;

%% Vetületi egyenletek
x = @(R,fi,lambda) R*log(tan(pi/4+fi/2))
y = @(R,fi,lambda) R*lambda

% Parciális deriváltak számítása szimbolikusan
syms R fi lambda
dxdf = diff(x,fi)   % (R*(tan(fi/2 + pi/4)^2/2 + 1/2))/tan(fi/2 + pi/4)
dxdl = diff(x,lambda) % 0
dydf = diff(y,fi) % 0
dydl = diff(y,lambda) % R

% Egyszerűsítés (ahol szükséges és lehet)
dxdf = simplify(dxdf, 'IgnoreAnalyticConstraints',true) % R/cos(fi)
% Az 'IgnoreAnalyticConstraints'=true nélkül nem egyszerűsítené le pl. az
% sqrt(x^2)-t x-re, mivel nem egyértelmű, lehetne +x és -x is a megoldás

% Ebben a példában már nincs lehetőség további egyszerűsítésre, de ha
% nagyon bonyolult kifejezést kapunk a végeredményre, meg lehet próbálni
% több egyszerűsítést végrehajtatni a Matlab-bal, például 1 egyszerűsítő
lépés helyett 10-et, 20-at, 100-at stb.
dxdf = simplify(dxdf, 'IgnoreAnalyticConstraints',true,'Steps',20) %
R/cos(fi)

% E és G állandó kiszámítása
E = dxdf^2 + dydf^2
% R^2/cos(fi)^2
G = dxdl^2 + dydl^2
% R^2

%% Lineármodulus a meridián irányában
lm = sqrt(E)/R
% (R^2/cos(fi)^2)^(1/2)/R
lm = simplify(lm, 'IgnoreAnalyticConstraints',true)
% 1/cos(fi)

%% Lineármodulus a  paralelkör irányában
lp = sqrt(G)/(R*cos(fi))
% (R^2)^(1/2)/(R*cos(fi))
lp = simplify(lp, 'IgnoreAnalyticConstraints',true)
% 1/cos(fi)

%% A fokhálózat vetületi torzulása
costeta = (dxdf*dydl-dydf*dxdl)/sqrt(E*G)
% R^2/(cos(fi)*(R^4/cos(fi)^2)^(1/2))

costeta = simplify(costeta,  'IgnoreAnalyticConstraints',true) % 1
teta = acos(costeta) % 0
% Ez azt jelenti, hogy a fokhálózat nem torzul, vagyis a fokhálózat
% metszésszögének eltérése a derékszögtől zérus.

%% A torzulási ellipszis tengelyei
A2 = (1/R*dxdf+1/(R*cos(fi))*dydl)^2+(1/R*dydf-1/(R*cos(fi))*dxdl)^2
% 4/cos(fi)^2
B2 = (1/R*dxdf-1/(R*cos(fi))*dydl)^2+(1/R*dydf+1/(R*cos(fi))*dxdl)^2
% 0
```

```
A = simplify(sqrt(A2), 'IgnoreAnalyticConstraints',true) % 2/cos(fi)
B = simplify(sqrt(B2), 'IgnoreAnalyticConstraints',true) % 0

% fél nagytengely
a = (A+B)/2
% 1/cos(fi)

% fél kistengely
b = (A-B)/2
% 1/cos(fi)

% A vetület szögtartó, mert a=b.
```