GYAKORLÓ FELADATOK 1.

LINEÁRIS EGYENLET RENDSZEREK

1. Határozza meg az alábbi egyenletrendszer megoldását SVD felbontással!

$$\begin{aligned} 2x + 3y + 4z &= 5 \\ 3x + 5y + 6z &= 15 \\ 4x + 6y + 9z &= 7 \end{aligned}$$

Ellenőrizze, hogy van-e megoldása a feladatnak és egyértelmű-e? Hozza létre az U,S,V mátrixokat SVD felbontással! Ellenőrizze a felbontás helyességét! Állítsa elő az inverzet az U,S,V mátrixokat használva és ezzel oldja meg az egyenletrendszert! Határozza meg megoldás abszolút hibáját skalár alakban!

```
> clear all; clc;
> A = [2 3 4;
>      3 5 6;
>      4 6 9]
> b = [5; 15; 7]
>
> % Van-e megoldás?
> rank(A) % 3
> rank([A b]) % 3, egyenlőek, tehát van megoldás
> % és r(A) egyenlő az oszlopok számával is, tehát egyértelmű a
  megoldás
>
> %  Az M=U*S*V' felbontásnak megfelelően inv(M)=V*inv(S)*U'
> [U,S,V]=svd(A)
>
> %  Ellenőrzés
> norm(A-U*S*V') % 4.5513e-15 - jó a felbontás
> U'*U-eye(3)
> V'*V-eye(3)
> % U és V ortonormáltak
>
> %  Az inverz előállítása
> invS=diag(1./S);
> invA=V*diag(invS)*U'
>
> %  A megoldás
> x1=invA*b % x1 = -14.0000, 15.0000, -3.0000
>
> %  Beépített SVD felbontás függvénnyel: pinv
> x2=pinv(A)*b %  x2 = -14.0000, 15.0000, -3.0000
>
> % Hiba
> norm(A*x1-b) % 5.1361e-14
```

2. Határozza meg az alábbi egyenletrendszer megoldását LU felbontással!

$$\begin{aligned} -x + y &= 3 \\ 2x - y + z &= 4 \\ x + 3y + 2z &= 5 \end{aligned}$$

Ellenőrizze, hogy van-e megoldása a feladatnak és egyértelmű-e? Hozza létre az L és U mátrixokat! Ellenőrizze a felbontás helyességét! Oldja meg az egyenletrendszereket, kihasználva azok mátrixainak speciális voltát! Határozza meg megoldás abszolút hibáját skalár alakban!

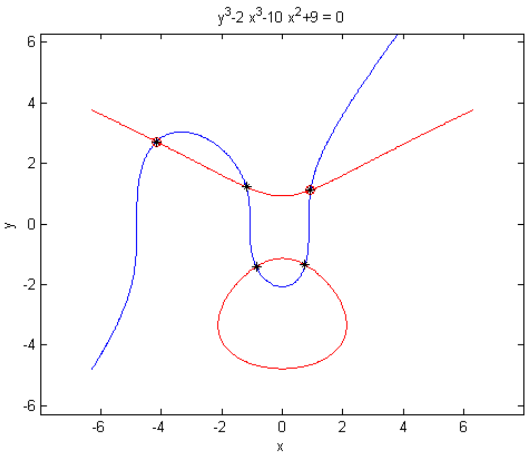
```
> clear all; clc;
> A = [-1 1 0;
>      2 -1 1;
>      1 3 2]
> b = [3; 4; 5]
>
> % Van-e megoldás?
> rank(A) % 3
> rank([A b]) % 3, egyenlőek, tehát van megoldás
> % és r(A) egyenlő az oszlopok számával is, tehát egyértelmű a
  megoldás
>
> %  LU felbontás alsó (L), felső (U) és permutációs (P) mátrix-ra
> [L U P]=lu(A)
>
> %  A felbontás helyességének ellenőrzése
> L*U-P*A
> norm(L*U-P*A)
>
> %  Az L*U*x=P*b egyenletrendszer megoldása 2 lépésben
> %  2.1 L*y=P*b megoldása y-ra
> %      úgy, hogy kihasználjuk L alsó mátrix tulajdonságát
> opts.UT=false;
> opts.LT=true;
> y1=linsolve(L,P*b,opts) %  y1 = 4.0000, 3.0000, 4.5714
>
> %  2.2 U*x=y megoldása x-re
> %      úgy, hogy kihasználjuk U felső mátrix tulajdonságát
> opts.UT=true;
> opts.LT=false;
> x1=linsolve(U,y1,opts) % x1 = -9, -6, 16
>
> % Hiba
> norm(A*x1-b)
```

NEMLINEÁRIS EGYENLETEK/EGYENLETRENDSZEREK

3. Határozza meg az alábbi egyenletrendszer megoldásait!

$$y^3 - 3 \cdot x^2 + 5 \cdot y^2 - 5 = 0$$
$$y^3 - 2 \cdot x^3 - 10 \cdot x^2 + 9 = 0$$

Ábrázolja a feladatot grafikusan a gyökök közelítő helyének meghatározása érdekében! Határozza meg a legkisebb és a legnagyobb x koordinátájú valós gyökeit a Matlab beépített numerikus függvényével 10^{-6} pontossággal! Ábrázolja a megoldásokat a korábbi ábrán! Határozza meg az összes megoldást a Matlab beépített szimbolikus egyenletrendszer megoldó függvényével! Van komplex gyök? Ha igen mennyi? Ábrázolja az összes valós megoldást!



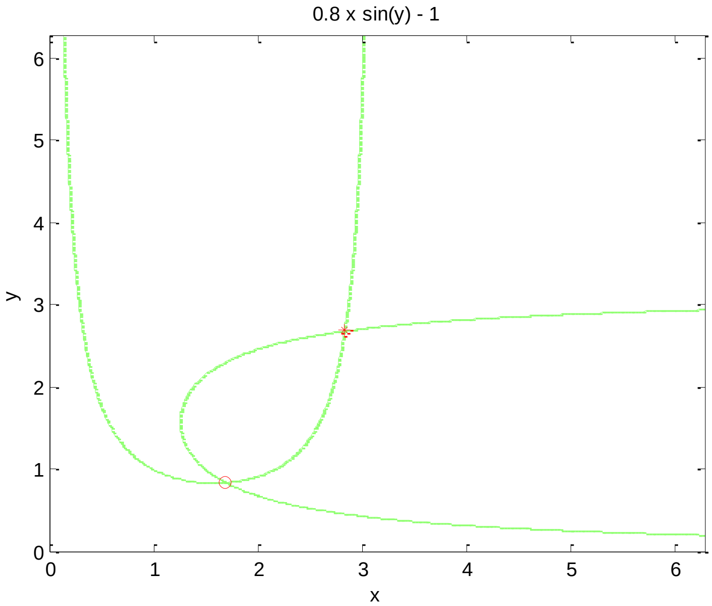

```
> %% 3. feladat
> clc; clear all; close all;
> % Az egyenletrendszer
> disp('Egyenlet rendszer')
> eq1 = @(x,y) y^3 - 3*x^2 + 5*y^2 - 5
> eq2 = @(x,y) y^3 - 2*x^3 - 10*x^2 + 9
> f = @(x,y) [eq1(x,y); eq2(x,y)];
> figure(1); clf;
> ezplot(eq1)
> hold on
> ezplot(eq2)
> axis equal
> F = @(x) f(x(1),x(2));
> x0 = [-4; 3]
> x1 = fsolve(F,x0,
  optimset('TolFun',1e-6))
> plot(x1(1),x1(2),'ro')
> % x1 = -4.1612
> %       2.7166
> x0 = [2; 2]
> x2 = fsolve(F,x0,
  optimset('TolFun',1e-6))
> % x1 = 0.9356
> %      1.1166
> plot(x2(1),x2(2),'ro')
> % Definiáljuk szimbolikusan az egyenletrendszert!
> fs = sym('[y^3 - 3*x^2 + 5*y^2 - 5;  y^3 - 2*x^3 - 10*x^2 + 9]')
> % Megoldás solve-val
> s=solve(fs)
> %     x: [9x1 sym]
> %     y: [9x1 sym]
> % Az eredmények kiíratása double típusú számként
> [double(s.x) double(s.y)]
> %   -4.1612 + 0.0000i   2.7166 + 0.0000i
> %   -1.1917 + 0.0000i   1.2202 + 0.0000i
> %   -0.8608 + 0.0000i  -1.4205 + 0.0000i
> %    0.7522 + 0.0000i  -1.3556 + 0.0000i
> %    0.9356 + 0.0000i   1.1166 + 0.0000i
> %   -4.4726 + 1.8307i  -2.8328 + 3.2770i
> %   -4.4726 - 1.8307i  -2.8328 - 3.2770i
> %    1.4855 + 3.3081i  -5.8058 + 0.6924i
> %    1.4855 - 3.3081i  -5.8058 - 0.6924i
> plot(s.x(1:5),s.y(1:5),'k*')
```

4. Adott az alábbi egyenletrendszer:

$$1{,}2\sin(x)\cdot y = 1$$
$$0{,}8\sin(y)\cdot x = 1$$

Ábrázolja az egyenletrendszert az $x = 0\ldots 2\pi$, $y = 0\ldots 2\pi$tartományon! Határozza meg az egyenletrendszer megoldásait a fenti tartományon a Matlab beépített numerikus módszerével! Ellenőrizze a megoldásokat visszahelyettesítéssel! Ábrázolja a megtalált megoldásokat!

```
> clear all; clc; close all;
>
> f1s = sym('1.2*sin(x)*y-1');
> f2s = sym('0.8*sin(y)*x-1');
>
> %f1 = @(x,y) 1.2*sin(x)*y-1
> %f2 = @(x,y) 0.8*sin(y)*x-1
>
> f1 = @(x,y) eval(f1s);
> f2 = @(x,y) eval(f2s);
>
> f = @(x) [f1(x(1), x(2));  f2(x(1), x(2))];
>
> clf;
> ezplot(f1s, [0 2*pi])
> hold on;
> ezplot(f2s, [0 2*pi])
>
> opt = optimset('Display', 'iter');
> x1 = fsolve(f, [1.6 0.8], opt);
> x2 = fsolve(f, [2.8 2.7], opt);
>
> plot(x1(1), x1(2), 'ro')
> plot(x2(1), x2(2), 'r*')
>
> x1
> x2
>
> % x1 =
> %      1.6810    0.8384
> % x2 =
> %      2.8258    2.6834
>
> f(x1)
> f(x2)
>
> % ans =
> %     1.0e-10 *
> %     -0.0152
> %     -0.8089
> % ans =
> %     1.0e-08 *
> %     -0.7832
> %     -0.8536
```



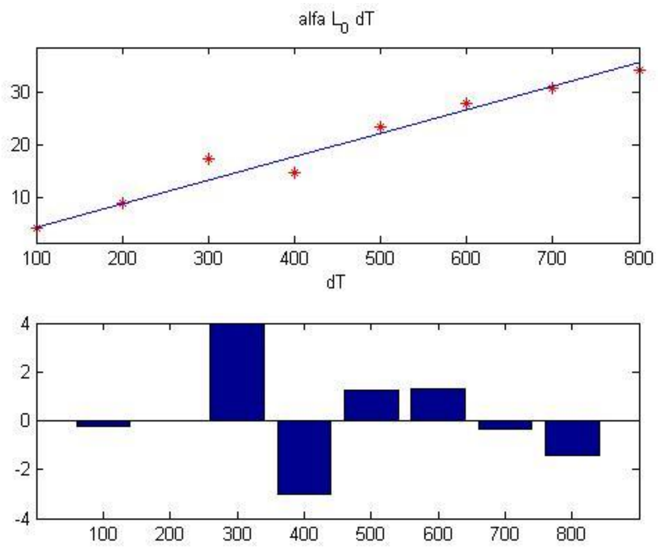
REGRESSZIÓ

5. Egy kísérletben méréseket végeztek a hőtágulási együttható meghatározására, ehhez egy 2.5 m hosszú rozsdamentes acélrudat sütőbe helyeztek. 20°C-tól kezdve 100°-onként növelték a hőmérsékletet egészen 820°C-ig, és mérték a hossz növekedését. ΔL hossznövekedés arányos ΔT hőmérséklet változással, az alábbi összefüggés szerint: $\Delta L = \alpha L_0 \Delta T$, ahol α a hőtágulási együttható, L_0 pedig a kezdeti hossz. Határozzuk meg lineáris regresszióval a hőtágulási együttható értékét az alábbi mérési eredmények alapján!

ΔT [°C]	100	200	300	400	500	600	700	800
ΔL [mm]	4.2	8.9	17.3	14.8	23.5	28	30.8	34.2

Rajzolja fel a regressziós egyenest és a maradék eltéréseket is egymás alá!

```
> % hotagulas dL=alfa*L0*dT
> clear all; close all; clc;
>
> dT = 100:100:800; dT=dT'
> dL = [4.2; 8.9; 17.3; 14.8; 23.5; 28; 30.8; 34.2]
> L0 = 2500
>
> figure(1)
> subplot(2,1,1)
> plot(dT, dL, 'r*')
>
> % egyenletrendszer felírása
> A = L0*dT
> b = dL
>
> alfa = A\b % 1.7800e-05
> f = @(dT) alfa*L0*dT
>
> hold on
> ezplot(f,[min(dT),max(dT)])
>
> e = dL-f(dT)
> subplot(2,1,2)
> bar(dT,e)
```

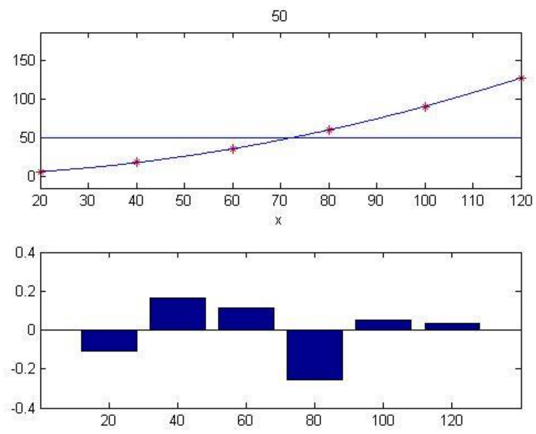


6. Nedves úton mérték egy autó féktávolságát a sebesség függvényében:

v [km/h]	20	40	60	80	100	120
d [m]	6	18	36	60	91	128

Határozza meg az adatokra legjobban illeszkedő másodfokú polinomot! Ábrázolja az adatokat és az illesztett polinomot egy ábrán, alatta egy külön ábrán pedig a maradék ellentmondásokat. Mekkora a maradék eltérések négyzetösszege, várható értéke és a korrigált empirikus szórása? Mennyi lesz a féktávolság 70 km/h-nál? Mekkora sebességnél lesz a féktávolság pont 50 m?

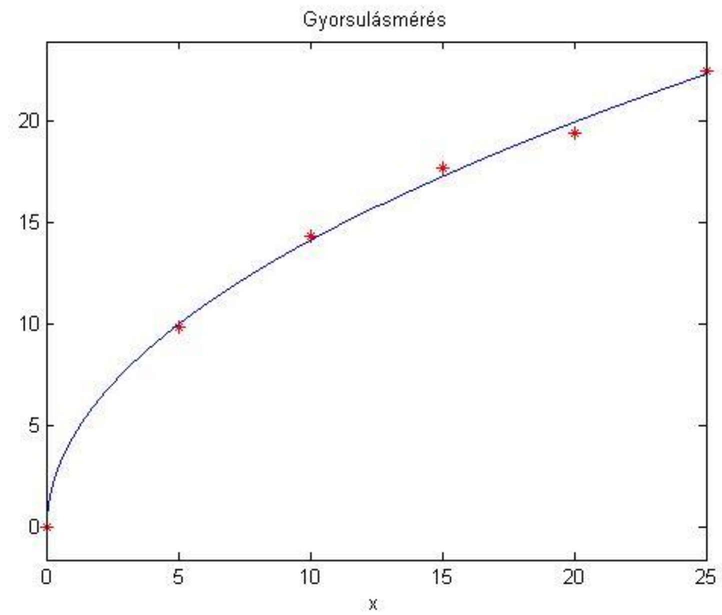
```
% Féktávolság nedves úton
  >  clear all; clc; close all;
  >
  >  v = [20; 40; 60; 80; 100; 120]
  >  d = [6; 18; 36; 60; 91; 128]
  >
  >  figure(1)
  >  subplot(2,1,1)
  >  plot(v,d,'r*')
  >
  >  % másodfokú polinom illesztése
  >  % d = a0 + a1*v + a2*v^2
  >  % A*x=b alakban
  >  A = [v.^0 v.^1 v.^2]
  >  b = d
  >  x = A\b % 0.7000  0.1123  0.0079
  >  f = @(v) x(1) + x(2)*v + x(3)*v.^2
  >  hold on; ezplot(f,[0 140])
  >  % más megoldás
  >  a = polyfit(v,d,2) %  0.0079    0.1123    0.7000
  >  f2 = @(v) polyval(a,v)
  >
  >  % féktávolság 70 km/h esetén
  >  f(70) % 47.2813 m
  >  % sebesség 50 m féktávolság esetén
  >  ezplot('50',[min(v), max(v)])
  >  x0 = 70 % kezdőérték az ábrából
  >  f50 = @(x) f(x)-50;
  >  v50 = fzero(f50,x0) %  72.1997
  >
  >  % hibák
  >  r = d - f(v)
  >  subplot(2,1,2)
  >  bar(v,r)
  >
  >  % hibák négyzetösszege
  >  S = sum(r.^2) %   0.1214
  >  % korrigált tapasztalati szórás
  >  n = length(v) % mérések száma
  >  np = 3 % becsült paraméterek száma: a0,a1,a2
  >  szoras = sqrt(S/(n-np)) %   0.2012
```



7. A nehézségi gyorsulás méréséhez a következő kísérletet végezték. Ledobtak egy labdát egy 30 m magas épületről, esés közben több helyen mérték a sebességét az épületre erősített szenzorokkal. A *v* sebesség a megtett *x* út között következő kapcsolat áll fenn: $v^2 = 2gx$, ahol g a nehézségi gyorsulás. A mért adatok a következőek:

x [m]	0	5	10	15	20	25
v [m/s]	0	9.85	14.32	17.63	19.34	22.41

```
> % nehézségi gyorsulás meghatározása
> % v^2 = 2*g*x
> % Új változók: Y=v^2, X=x; a1 = 2*g
> % Y = a1*X
> clear all; close all; clc;
> x = [0; 5; 10; 15; 20; 25]
> v = [0; 9.85; 14.32; 17.63; 19.34; 22.41]
> figure(1)
> plot(x,v,'r*')
> Y = v.^2; X = x;
> % lineáris egyenletrendszer megoldása
> a1 = X\Y % 19.8065
> % nehézségi gyorsulás
> g = a1/2 % 9.9032
> % tényleges érték: 9.81
> f =@(x) sqrt(2*g*x)
> hold on;
> ezplot(f,[0 25])
> title('Gyorsulásmérés')
```



8. Az abszolút 0 fok meghatározására végeztek kísérletet. A kísérletben egy tartályban lévő gázt jeges vízbe merítettek (0°C), megmérték a gáz nyomását, majd 10 fokonként emelték a hőmérsékletet, mérve a nyomást is. A Gay-Lussac gáztörvény szerint állandó nyomáson egy adott tömegű gáz térfogata az abszolút hőmérsékletével egyenes arányban változik. Lineáris kapcsolat van a nyomás és a hőmérséklet között állandó térfogat esetén. A mért eredmények a következőek:

T [°C]	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
p [atm.]	0.94	0.96	1.0	1.05	1.07	1.09	1.14	1.17	1.21	1.24	1.28

Extrapolációval határozzuk meg az abszolút 0 fokot, ahol a nyomás nulla lesz!

```
> clear all; close all; clc;
> T = 0:10:100; T = T';
> p = [0.94; 0.96; 1.0; 1.05; 1.07; 1.09; 1.14; 1.17; 1.21; 1.24; 1.28]
> figure(1);
> plot(T,p,'r*')
> % p = a1*T + a0 (y=m*x+b egyenes egyenlete)
> A = [T.^1 T.^0]; b = p
> x = A\b
> a1 = x(1) % 0.0034
> a0 = x(2) % 0.9336
>
> f = @(T) a1*T+a0
> hold on;
> ezplot(f,[min(T), max(T)])
> % hibák
> e = p - f(T)
> norm(e)
>
> % más megoldás beépített függvénnyel: polyfit, polyval
> x2 = polyfit(T,p,1) % 0.0034 0.9336
> e2 = p - polyval(x2,T)
> norm(e2)
> f2 = @(T) polyval(x2,T)
>
> % Abszolút nulla fok megkeresése extrapolációval
> figure(2)
> plot(T,p,'r*'); hold on;
> ezplot(f,[-300, 100])
> ezplot('0',[-300, 100])
>
> absz_nulla = fzero(f,-250)
> %  -273.1383
> % vagy átrendezve f=0-t: T = -a0/a1
> absz_nulla = -a0/a1 %  -273.1383
> % tényleges absz. nulla: 273.15°C
>
> % ellenőrzés
> f(absz_nulla)
> f2(absz_nulla)
```