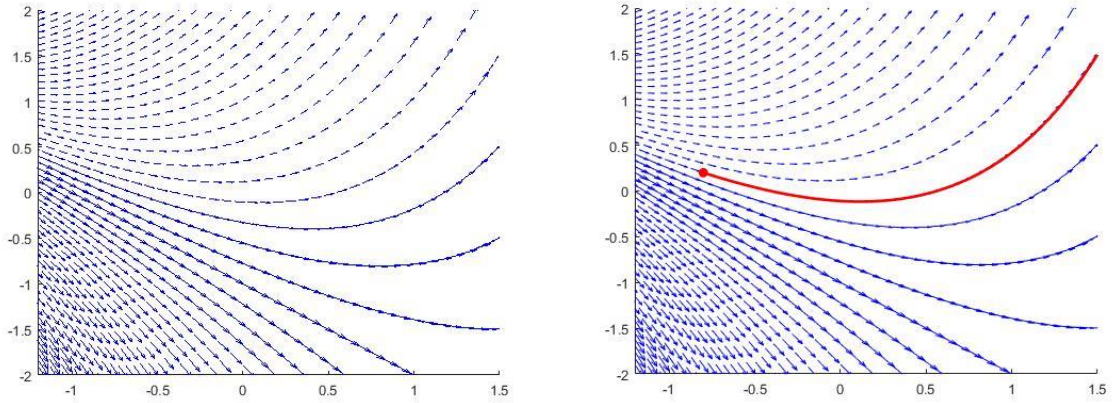
17. DIFFERENCIÁLEGYENLETEK – KEZDETI ÉRTÉK PROBLÉMA

A differenciálegyenlet egy olyan egyenlet, amely az ismeretlen függvény deriváltjait is tartalmazza. A megoldás itt nem egy konkrét érték lesz, hanem egy olyan függvény, amely kielégíti a differenciálegyenlet rendszert. Közönséges differenciálegyenlet esetén ez egy egyváltozós függvény.

Az egyértelmű megoldás érdekében meg kell adni egy (vagy több) pontot, amelyen a megoldásfüggvény áthalad. Nézzünk egy egyszerű példát, adott a következő differenciálegyenlet: $\frac{dy}{dx} = y + x$, keressük azt a függvényt, amelyik kielégíti ezt a feltételt. A lenti ábra bal oldalán ábrázolt összes függvény kielégíti ezt a feltételt. Ez a differenciálegyenlet trajektória vagy iránymezője (phase portrait). Ha azonban azt a megoldást keressük, ami áthalad az $x = -0.8, y = 0.2$ ponton, akkor már egyetlen függvény lesz a megoldásunk (jobb oldali ábrán pirossal jelölve).



Kezdeti érték probléma esetén ismerjük a függvény és deriváltja(i) értékét a kezdőpontban, ezek alapján próbáljuk meghatározni a függvényt. Peremérték feladatok esetében legalább az egyik érték (a függvény és deriváltjainak értékei közül) nem a kezdőpontban, hanem a végpontban adott. Ez azzal bonyolítja a feladatot, hogy meg kell határoznunk azt a kezdeti értéket is, ahonnan elindulva a végpontban megadott értéket kapjuk.

Lineáris differenciálegyenletben a keresett függvénynek vagy deriváltjának csak a lineáris kifejezése szerepel. Például:

$$e^x \frac{dy}{dx} + a \cdot x^2 + x^4 \cdot y = 0 - \text{lineáris differenciálegyenlet}$$

$$\frac{dy}{dx} + a \cdot x \cdot y + b \cdot y^2 = 0 - \text{nemlineáris differenciálegyenlet}$$

Az egyenlet n-ed rendű, ha abban az ismeretlen függvény legmagasabb deriváltja az n-edik derivált. A megoldásfüggvény meghatározása sokszor - különösen nemlineáris esetben - csak numerikusan lehetséges. Ebben az esetben a függvényt nem analitikusan kapjuk meg, hanem diszkrét pontokban a függvény értékeket, numerikus integrálással. A cél olyan numerikus eljárások alkalmazása, amelyek előírt lokális hiba mellett minél kevesebb lépéssel, pontosabb függvénykiértékeléssel képesek meghatározni a megoldásfüggvény pontjait.

ELSŐRENDŰ KÖZÖNSÉGES DIFFERENCIÁLEGYENLET-KEZDETIÉRTÉK PROBLÉMA

Elsőrendű differenciálegyenlet általános alakja (legyen *t* a független változó):

$$y' = \frac{dy}{dt} = f(t,y) \qquad \text{és} \qquad y(t_0) = y_0$$

ahol y', az első derivált, a függvény érintőjének a meredeksége egy adott pontban.

Egyváltozós esetben egy független változónk van, ez most t, és egy függő változó, ezt most y -nal jelöltük. $f(t,y)$ függvény írja le az első deriváltat. Amennyiben a differenciálegyenlet bal oldalán nem csak az első derivált szerepel, akkor a megoldás előtt át kell rendezni az egyenletet a fenti alakra, itt nem a nullára rendezett alak kell, mint pl. a nemlineáris egyenletrendszerek megoldásánál. Pl. a korábbi példa átrendezve a kívánt alakra:

$$e^x \frac{dy}{dx} + a \cdot x^2 + x^4 \cdot y = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{e^x} \cdot (a \cdot x^2 + x^4 \cdot y)$$

Magasabb rendű differenciálegyenlet esetén a legmagasabb rendű deriváltat kell kiemelni a bal oldalra. Elsőrendű kezdeti érték probléma esetén kezdeti feltételként ismert, hogy a megoldás áthalad a (t_0, y_0) ponton.

EULER-MÓDSZER

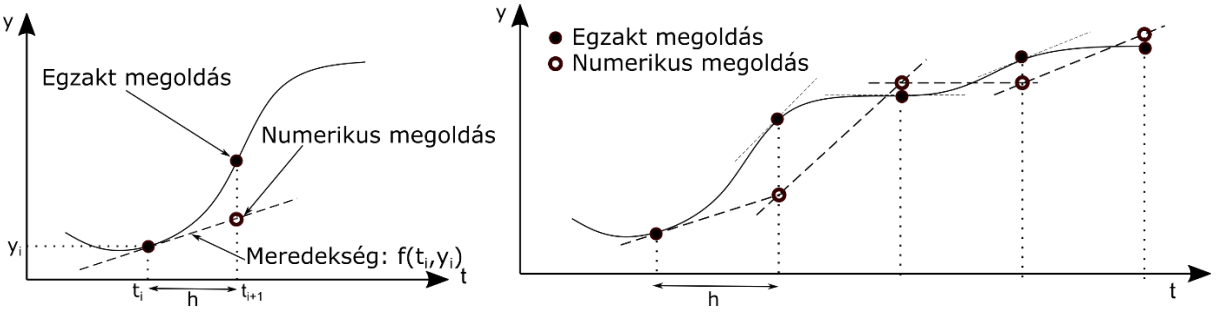
Szeretnénk meghatározni egy megadott intervallumban, az általunk felvett lépésközönként (h) az eredeti függvény értékeit. Az első derivált értéke, vagyis az érintő egyenes meredeksége, a kezdőpontban számítható az $f(t,y)$ képlettel az ismert t_0, y_0 koordinátákból. Ha ismerjük a függvény értékét a szakasz kezdőpontjában és az érintő meredekségét, akkor a szakasz végén a függvény értékét közelíthetjük az ismert kezdőponton áthaladó érintő (m meredekségű) egyenessel. Az adott h szakaszon a függvény meredekségét (m) állandónak tekintjük.

Az Euler-módszer esetén feltételezzük, hogy $m = f(t,y)$ értéke állandó az integrálási részintervallumokban $(h = t_{i+1} - t_i)$ és értéke az intervallum elején kiszámolható értékkel egyezik meg.

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t,y) \cdot dt \approx y_i + f(t_i, y_i) \cdot h = y_i + m_i \cdot h$$

$$t_{i+1} = t_i + h$$

ahol m a szakasz kezdőpontjában kiszámolt, az adott szakaszon állandónak tekintett meredekség. A módszer lokális hibája O(h^2), globális hibája pedig O(h), azaz a módszer elsőrendű.



Nézzük meg, hogyan oldhatjuk meg az Euler-módszert Matlab-ban (**euler.m**)!

```
function [t,y] = euler (f, y0, a, b, h)
n = round((b - a)/h);
t(1) = a;
y(1) = y0;
for i = 1 : n
    y(i + 1) = y(i) + h*f(t(i), y(i));
    t(i + 1) = t(i) + h;
end
```

A fenti függvény bemenő paraméterei:

- f – az elsőrendű differenciál egyenlet
- y0 – a megoldás függvény értéke a kezdőpontban
- a – az intervallum eleje
- b – az intervallum vége
- h – lépésköz nagysága a számításhoz

ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSA EULER-MÓDSZERREL

Nézzünk egy példát rá! Egy víztorony R=10 m sugarú gömb alakú tartályán alul, h=0 magasságban elhelyezkedő r=5 cm sugarú nyíláson keresztül elkezdik leengedni a benne tárolt (kb. 4000 m^3) vizet. A leengedés kezdetekor ($t = 0$) a vízszint magassága a tartályban 17.44 m. A nyílás kifolyási tényezője $\mu = 0.85$.

1) Mekkora lesz a vízszint a tartályban 12 óra múlva?
2) Mennyi idő alatt ürül ki a tartály?

A víztorony pillanatnyi vízszintjét (a tartály aljától mérve) a következő elsőrendű közönséges differenciálegyenlettel írhatjuk le:

$$f(t,h) = \frac{dh}{dt} = -\frac{\mu\, r^2 \sqrt{2\, g\, h}}{2\, h\, R - h^2}$$

ahol $R = 10\ m, r = 0.05\ m, g = 9.81 \frac{m}{s^2}, \mu = 0.85$.

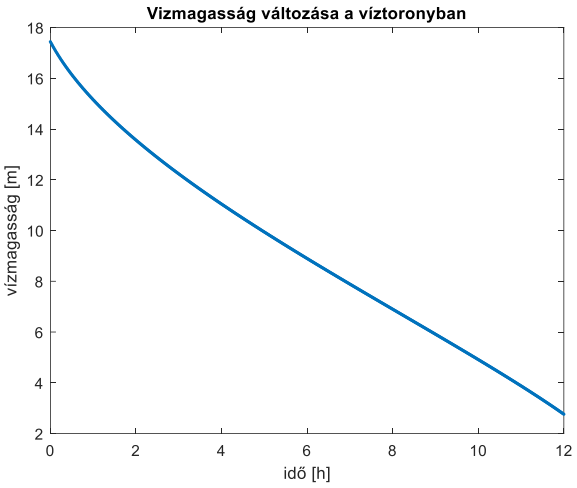
1) Mekkora lesz a vízszint a tartályban 12 óra múlva?

Egy elsőrendű differenciálegyenletnél a megoldás első lépése mindig az, hogy kifejezzük az első deriváltat a többi változó függvényében, ha eredetileg nem így volt megadva. Ez lesz az *f* függvényünk.

Írjuk be a feladatot Matlab-ba és oldjuk meg Euler módszert használva, 60 másodperces lépésközzel! Előfordulhat, hogy az első derivált *f* függvényében nem szerepel a független változó (ami most *t*), de a megoldáshoz a Matlab-ban a

differenciálegyenlet függvényének megadásakor az ismeretlenek között mindig meg kell adni a független változót is. Ez a helyzet most is, *t* csak a változók felsorolásánál szerepel, a függvényben nem.

```
> R = 10; r = 0.05; g = 9.81; mu = 0.85;
> % Derivált függvény megadása
> f = @(t,h) -mu*r^2*sqrt(2*g*h)./(2*h*R-h.^2)
> % Kezdeti feltétel, tartomány
> h0 = 17.44; t0 = 0; tv = 12*3600 % 12 óra = 43200 s
> % lépésköz 60 s
> d = 60;
>
> % megoldás Euler-módszerrel
> [T, H] = euler(f, h0, t0, tv, d);
> figure(1)
> % Megjelenítés, időpontok órában
> plot(T/3600,H);
> xlabel('idő [h]')
> ylabel('vízmagasság [m]')
> title('Vizmagasság változása a
  víztoronyban')
```



A H vektor utolsó eleme megadja, hogy mennyi volt a vízszint 12 óra elteltével:

```
> H(end) % 2.7712 m
```

Az Euler módszer elsőrendű, azaz O(*h*) hibájú módszer. Nézzük meg, tudunk-e ennél pontosabb módszert használni!

EULER MÓDSZER JAVÍTÁSAI (HEUN-, KÖZÉPPONTI-, RUNGE-KUTTA-MÓDSZER)

Hasonlóképp becsüli a függvény értékeket az Euler, a Heun, a Középponti és a Runge-Kutta módszer is, a különbség csupán a meredekség kiszámításának módjában van. Euler módszernél a lépésköz elején számoljuk ki a derivált értékét és ezt használjuk meredekségnek (lásd a korábbi ábrákat).

A **Heun módszernél** a meredekség az intervallum elején (m_i) és végén (m_{i+1}) számolt meredekségek átlaga. Ahhoz azonban, hogy a meredekséget az intervallum végén ki tudjuk számolni, ismerni kell az ottani függvény értéket is, mivel $m_{i+1} = f(t_{i+1}, y_{i+1})$. Ezért először egy ún. prediktor lépésként Euler módszerrel számítják a végpontbeli közelítő függvény értéket és ezt használják a meredekség meghatározásához. A két meredekség átlagát használva számítható a tényleges függvényérték a végpontban.

1) Prediktor lépés (Euler módszer): $y_{i+1}^{(0)} = y_i + m_i \cdot h = y_i + f(t_i, y_i) \cdot h,$
2) Korrektor lépés: $t_{i+1} = t_i + h, \qquad m_{i+1} = f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)$

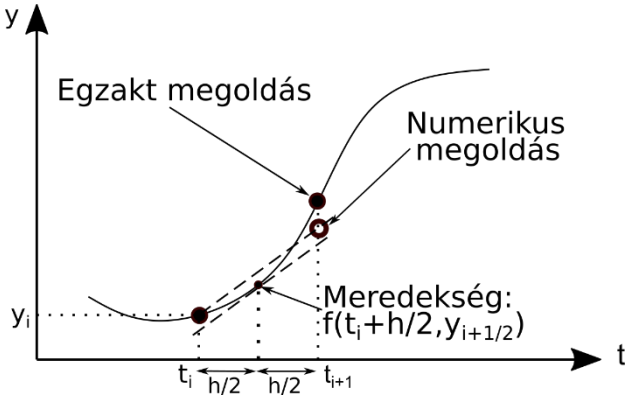
$$y_{i+1} = y_i + \frac{(m_i + m_{i+1})}{2} \cdot h = y_i + \frac{f(t_i, y_i) + f\left(t_{i+1}, y_{i+1}^{(0)}\right)}{2} \cdot h$$

A módszer lokális hibája $O(h^3)$ és globális hibája $O(h^2)$ azaz a módszer másodrendű hibájú, egy nagyságrenddel pontosabb, mint az Euler-módszer.

A **középponti módszer** esetén a felezőpontban számoljuk ki a deriváltat, és ez lesz az állandónak tekintett meredekség az egész intervallumra. Ehhez először ki kell számolni az előzetes függvényértéket a felezőpontban Euler módszerrel és utána tudjuk számolni ebben a pontban a meredekséget, amivel a végpontbeli függvényértéket kapjuk.

1) Felezőpont függvényértéke (Euler módszer): $y_{i+\frac{1}{2}} = y_i + m_i \cdot \frac{h}{2} = y_i + f(t_i, y_i) \cdot \frac{h}{2}$,
2) Meredekség a felezőpontban: $t_{i+\frac{1}{2}} = t_i + \frac{h}{2}$, $m_{i+\frac{1}{2}} = f\left(t_{i+\frac{1}{2}}, y_{i+\frac{1}{2}}\right)$
3) Függvényérték a végpontban: $y_{i+1} = y_i + m_{i+\frac{1}{2}} \cdot h$

A módszer lokális hibája $O(h^3)$ és globális hibája $O(h^2)$, azaz hasonlóan a Heun módszerhez, ez is egy nagyságrenddel pontosabb, mint az Euler-módszer.



Tovább lehet pontosítani az Euler-módszert, ha több pontban számoljuk ki a deriváltat, és ezek súlyozott átlaga lesz az állandónak tekintett meredekség. Ez a legelterjedtebb, negyedrendű hibájú **Runge-Kutta módszer**, amelynek globális csonkítási hibája: $O(h^4)$. Matlab-ban ezt valósítja meg a beépített **ode45** függvény.

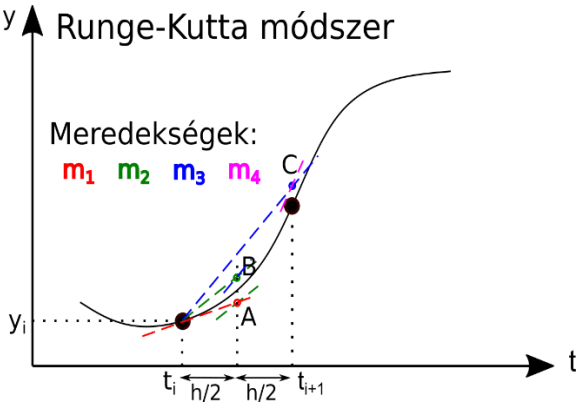
$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6} \cdot (m_1 + 2m_2 + 2m_3 + m_4) \cdot h$$

$m_1 = f(t_i, y_i)$ - meredekség a kezdőpontban → A pont számítása ezzel

$m_2 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + m_1 \cdot \frac{h}{2}\right)$ - meredekség az A pontban → B pont számítása ezzel

$m_3 = f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + m_2 \cdot \frac{h}{2}\right)$ - meredekség a B pontban → C pont számítása ezzel

$m_4 = f(t_i + h, y_i + m_3 \cdot h)$ - meredekség a C pontban



$$\boldsymbol{m_1} = f(t_i, y_i)$$

$$y_A = y_i + m_1 \cdot \frac{h}{2} \rightarrow \boldsymbol{m_2} = f(t_i + \frac{h}{2}, y_A)$$

$$y_B = y_i + m_2 \cdot \frac{h}{2} \rightarrow \boldsymbol{m_3} = f(t_i + \frac{h}{2}, y_B)$$

$$y_C = y_i + m_3 \cdot h \rightarrow \boldsymbol{m_4} = f(t_i + h, y_C)$$

ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSA RUNGE-KUTTA-MÓDSZERREL

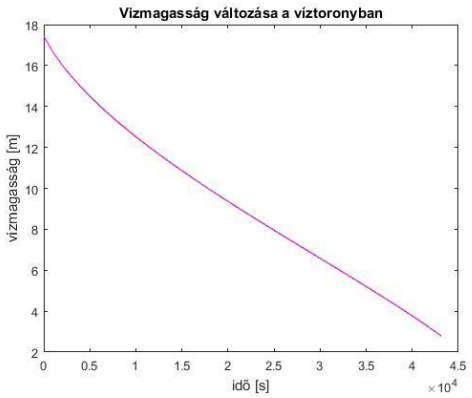
Oldjuk meg az előbbi víztornyos feladatot Runge-Kutta módszerrel is! Ehhez használjuk a Matlab beépített **ode45** parancsát!

Ennek legegyszerűbb hívása a következő:

```
>       [TOUT,YOUT] = ode45(ODEFUN,TSPAN,Y0)
```

ahol ODEFUN egy függvényhivatkozás $y' = f(t, y)$ függvényre. TSPAN lehet a [T_0 T_V] intervallum megadása a végpontokkal, vektor megadott lépésközökkel, illetve tetszőleges pontok egy vektorban. Y_0 az y függvény kezdeti értéke.

```
> % Megoldás Runge-Kutta-módszerrel
> [T1, H1] = ode45(f, [0,43200], h0);
> H1(end) % 2.7779 m
> % vagy lépésköz megadásával
> [T2, H2] = ode45(f, 0:60:43200, h0);
> H2(end) % 2.7713 m
> hold on;
> plot(T1,H1,'r')
> plot(T2,H2,'m')
```



Ebben az esetben nincs látható különbség a módszerek között, a végeredményben is csak pár mm az eltérés a vízszintben. Érdekes megnézni, hogyan vette fel az algoritmus a lépésközöket, abban az esetben, amikor csak kezdő és végső időpontot adtunk meg:

```
> diff(T1)
> min(diff(T1)) % 995.1333
> max(diff(T1)) % 1.1649e+03
```

Tehát a lépésköz 995 és 1165 másodperc között változott. Sűrűbb lépésköz választása általában pontosítja az eredményt, viszont megnöveli a számítás időszükségletét.

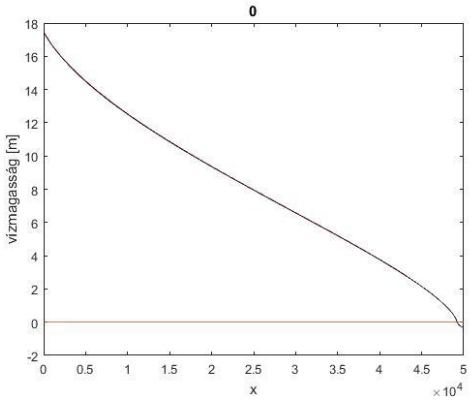
Amennyiben tetszőleges időpontban szeretnénk megadni a víztartályban lévő aktuális vízszintet, akkor ezt megtehetjük a egyrészt úgy, hogy egy spline görbét illesztünk a pontokra, másrészt úgy is, hogy egy kimenettel hívjuk meg a függvényt, ami egy struktúra típus lesz. És ezzel a struktúra típusú megoldással használható a **deval** parancs, ami képes visszaadni a keresett függvény (és szükség esetén a deriváltjai) értékét a megadott pontban. Pl., ha arra vagyunk kíváncsiak, hogy 3 óra, vagyis 3*3600 másodperc múlva mekkora lesz a vízszint, azt a következőképpen is megtehetjük:

```
> % vízszint 3 óra (3*3600 másodperc) múlva
> sol = ode45(f,[t0,tv],h0)
> %   struct with fields:
> %      solver: 'ode45'
> %     extdata: [1×1 struct]
> %           x: [0 3980.5 8300.5 12621 16941 21261 25581 29901 34221
  38541 43200]
> %           y: [17.44 14.985 13.154 11.634 10.274 9.009 7.7984 6.6133
  5.4265 4.2044 2.7779]
```

```
>  %       stats: [1×1 struct]
>  %       idata: [1×1 struct]
>  deval(sol,3*3600) %  12.249 m
```

2) Számítsuk ki, hogy a tartály teljes kiürüléséhez hány órára van szükség!

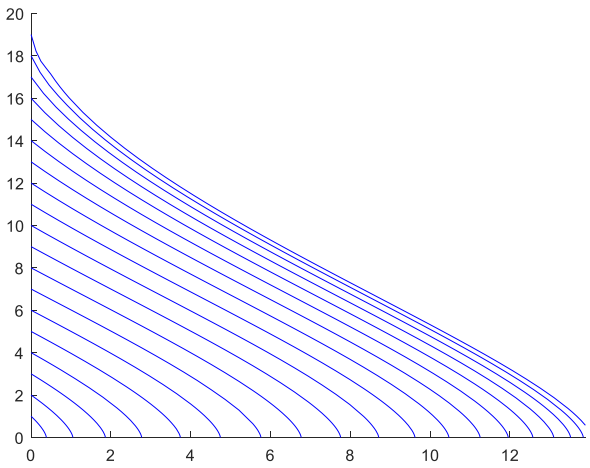
Azt láttuk, hogy 12 óra után még kb. 2.8 m volt a vízszint, tehát ennyi idő kevés volt a teljes kiürüléshez. Ezért először számítsuk ki hosszabb időre a lefolyás alakulását, mondjuk az előbbi 43200 másodperc helyett 50000 másodpercre. Vigyázzunk, mivel negatív *h* esetén komplex számokat kapunk megoldásként! A megoldáshoz illesszünk spline görbét a pontjainkra és zérushely kereséssel határozzuk meg a kiürülés időpontját!




```
>  % Lépésköz megadásával
>  [T3, H3] = ode45(f, 0:60:50000, h0)
>  plot(T3,H3,'k')
>  plot([0,50000],[0,0])
>  % képzetes rész elhagyása
>  H3 = real(H3);
>  % spline illesztés
>  sp =@(t) spline(T3,H3,t)
>  fplot(sp,[0,50000])
>  % Hány óra múlva lesz 0 a
   vízmagasság?
>  x0 = fzero(sp,49000) % 4.9192e+04 s
>  x0 = x0/3600 % 13.6644 h
```

Hogyan alakul a kiürülés különböző kezdeti magasságok esetén? Rajzoljuk fel a trajektória vagy iránymezőt, a maximális 20 méteres kiinduló vízszinttől egészen 1 méteres vízszintig. Az x tengelyt órában ábrázoljuk!

```
>  % Trajektória vagy iránymező
>  figure(2); hold on;
>  for i=20:-1:1
>      [T, H] = ode45(f, [0,50000], i);
>      plot(T/3600,H,'b')
>  end
>  axis([0 50000/3600 0 20])
```



ELSŐRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET RENDSZER MEGOLDÁSA

Sok esetben egy adott folyamat több változóval írható le, amelyek egymást is befolyásolhatják. Ilyen esetekben nem egy differenciálegyenletet, hanem egy differenciálegyenlet rendszert kell megoldanunk. Legyenek a függő változóink $y_1, y_2, \dots, y_n$, a független változónk pedig t. Általános esetben egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszer felírása:

$$\frac{dy_1}{dt} = f_1(t, y_1, y_2, y_3 \dots, y_n)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = f_2(t, y_1, y_2, y_3 \dots, y_n)$$

$$\dots$$

$$\frac{dy_n}{dt} = f_n(t, y_1, y_2, y_3 \dots, y_n)$$

A kezdeti értékek pedig az [a,b] tartományon:

$$y_1(a) = Y_1,\ y_2(a) = Y_2, \cdots, y_n(a) = Y_n,$$

Ezen egyenletrendszerek egy része megoldható a korábban ismertetett explicit módszerek általánosításával: $t_{i+1} = t_i + h$, Euler módszer esetében például:

$$y_{1,i+1} = y_i + f_1(t, y_1, y_2, y_3 \dots, y_n) \cdot h$$

$$\dots$$

$$y_{n,i+1} = y_i + f_n(t, y_1, y_2, y_3 \dots, y_n) \cdot h$$

Hasonlóképp általánosíthatóak az Euler módszer javításai és a Runge-Kutta módszer is. Nézzünk egy egyszerű kétváltozós példát erre.

A megoldást a [0, 1.2] tartományon keressük, *h*=0.4 lépésközönként.

$$\frac{dx}{dt} - x\,t + y = 0; \qquad x(0) = 1$$

$$\frac{dy}{dt} - y\,t - x = 0; \qquad y(0) = 0.5$$

Először rendezzük át az egyenleteket, hogy a baloldalon csak az első deriváltak szerepeljenek:

$$\frac{dx}{dt} = x\,t - y = f_1(t, x, y)$$

$$\frac{dy}{dt} = y\,t + x = f_2(t, x, y)$$

Itt két egyenletünk van, f_1 az egyik változó t szerinti első deriváltja, f_2 pedig a másik változó első deriváltja. Oldjuk meg a feladatot a Matlab beépített Runge-Kutta módszerével! A megadott x,y változók helyett vektorváltozót szükséges használni a Matlab beépített függvényeinek a hívásakor, legyen pl.

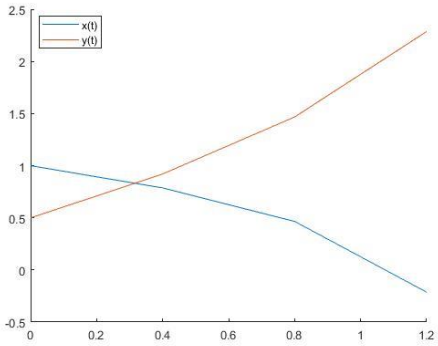
$v = [x; y]$, tehát $v_1 = x, v_2 = y$

Amennyiben nem túl bonyolult az egyenletrendszerünk, akkor megadhatjuk az egyenletrendszert egysoros függvényként a következőképp:

```
> f1 = @(t,v) v(1)*t-v(2)
> f2 = @(t,v) v(2)*t+v(1)
> F = @(t,v) [f1(t,v); f2(t,v)]
```

A megoldáshoz meg kell adni még a kezdőértékeket, értelmezési tartományt, lépésközt is.

```
> t = 0:0.4:1.2
> x0 = 1; y0 = 0.5; % kezdeti értékek
> [T,V] = ode45(F,t,[x0;y0])
> X = V(:,1); Y = V(:,2);
> figure(1); hold on; plot(T,X,T,Y)
> legend('x(t)','y(t)','Location','best')
```



Több változó vagy bonyolultabb összefüggések esetében már célszerű lehet külön fájlban megírni a differenciálegyenlet rendszert. Nézzük meg így is a megoldást. Írjuk meg egy külön **diffrsz.m** fájlba az elsőrendű differenciálegyenlet rendszert!

```
> function F = diffrsz(t,v)
>     f1 = v(1)*t - v(2);
>     f2 = v(2)*t + v(1);
>     F = [f1; f2];
> end
```

Figyeljünk oda, ha külön *.m fájlban adtuk meg a differenciálegyenlet rendszert, akkor a meghívásakor a függvény neve elé kell írni egy @ jelet!

```
> [T, V] = ode45(@diffrsz, t, [x0; y0])
```

MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Egy másodrendű közönséges differenciálegyenlet *t* független és *y* függő változóval a következő alakba írható:

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$$

Az egyenlet megoldható [a,b] intervallumon, ha van két ismert feltételünk. Amennyiben a két megadott érték a tartomány elején van, akkor kezdeti érték feladatról beszélünk. A két kezdeti feltétel az y és $\frac{dy}{dt}$ értéke a kezdőpontban. Jelölje ezeket az értékeket A és B.

$$y(a) = A; \qquad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=a} = B$$

Magasabb rendű differenciálegyenlet megoldása egy egyszerű transzformációval visszavezethető elsőrendű differenciálegyenlet rendszer megoldására, ezt hívjuk **átviteli elvnek**. Másodrendű differenciálegyenlet átalakítható két elsőrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszerré. Ez az elsőrendű egyenletrendszer utána az előzőekhez hasonlóan megoldható.

A feladat megoldásához az első lépés, hogy kifejezzük a második deriváltat, amennyiben nem ilyen formában van megadva az egyenlet. A második deriváltat

$f\left(t, y, \frac{dy}{dt}\right)$ függvényeként írjuk fel, ahol t a független változó, y a keresett függvény, $\frac{dy}{dt}$ pedig az első deriváltat (másodrendű esetben csak az első deriváltat kell, magasabb rendű esetben az összes alacsonyabb rendű deriváltat). Természetesen nem biztos, hogy ezek mindegyikétől függ a második deriváltat, de mindig ilyen alakban írjuk fel a Matlab-ban. A függő változó és deriváltja helyett vezessünk be egy új vektorváltozót (w)!

$$w = \begin{pmatrix} y & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Használjuk y és $\frac{dy}{dt}$ helyett w elemeit új változókként: $w_1 = y$ és $w_2 = \frac{dy}{dt}$. Ekkor két egyenletet kell felírnunk a két új változó első deriváltjaira, és ezekhez kell megadni a kezdőértékeket:

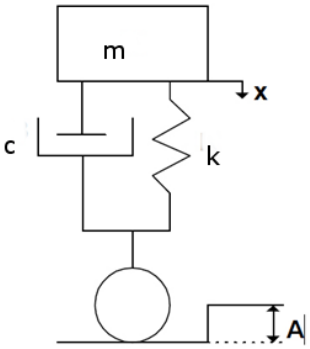
$$f_1 = \frac{dw_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = w_2; \qquad w_1(a) = A$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = f(t, w_1, w_2); \qquad w_2(a) = B$$

Ezekkel a definíciókkal a másodrendű differenciálegyenlet felírható két elsőrendű differenciálegyenletből álló egyenletrendszerként! Oldjunk meg egy ilyen másodrendű differenciálegyenletet!

MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET MEGOLDÁSA MATLAB-BAN

Egy autó rugózásának szimulációját végezzük az alábbi egyszerű modell alapján, ahol az autó éppen áthalad egy *A* magasságú akadályon. A modellben *m* az autó tömege, *k* a rugómerevség (a rugóban fellépő erő arányos az elmozdulással), *c* a csillapítási tényező (a csillapító erő arányos a tömeg sebességével). Az adatok: $m = 1000\ kg; k = 1000\frac{kg}{s^2}; c = 500\frac{kg}{s}; A = 0.1\ m$. A kiinduló időpontban mind az autó függőleges helyzete, mind a függőlege sebessége 0. A vizsgált időintervallum 15 másodperc.



Csillapított szabad rezgésnél a tömegre ható erőket összegezve az alábbi közönséges differenciálegyenletet kapjuk az autó függőleges mozgására:

$$m\,\ddot{x} + c\,\dot{x} + k\,x = 0$$

Ahol x az autó magassági helyzete, $\dot{x}$ az idő szerinti első derivált, tehát az autó függőleges sebessége, $\ddot{x}$ pedig az idő szerinti második derivált, vagyis az autó függőleges gyorsulása. Áttérve az autó koordináta rendszerére a függőleges irányú mozgás mozgásegyenlete (figyelembe véve az ábra alapján, hogy az x tengely lefelé pozitív):

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,(x - A) = 0$$

A kezdeti feltételek, hogy a kezdeti függőleges helyzet és a kezdeti függőleges sebesség is nulla, mielőtt az akadályhoz érne az autó:

$$x(0) = 0; \qquad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{x=0} = 0$$

Első lépésként fejezzük ki a második deriváltat $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)$-t az egyenletből!

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}\left(k\,A - k\,x - c\,\frac{dx}{dt}\right) = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}\right)$$

Alakítsuk át a másodrendű differenciálegyenletet elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré! Vezessünk be egy új vektor változót a függő változó és deriváltjai helyett:

$$w = \begin{pmatrix} x & \frac{dx}{dt} \end{pmatrix}$$

Használjuk a $w_1 = x$ és $w_2 = \frac{dx}{dt}$ új változókat az egyenletünkben! Két egyenletet kell felírnunk, a két új változó első deriváltjaira, és ezekhez kell megadni a kezdőértékeket:

$$f_1 = \frac{dw_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = w_2; \qquad w_1(0) = 0$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{m}(k\,A - k\,w_1 - c\,w_2); \qquad w_2(0) = 0$$

Írjuk meg a differenciálegyenlet rendszert egy külön **autodiff.m** fájlban Matlab-ban! Legyen w egy vektorváltozó: $w = [w_1, w_2]$, tehát $w(1) = x$ a függőleges pozíció és $w(2) = \frac{dx}{dt}$ pedig a függőleges sebesség.

```
> function f = autodiff(t,w)
>    %  A mozgásegyenlet konstansai
>    m=1000; k=1000; A=0.1; c=500;
>    f1 = w(2);
>    f2 = 1/m*(k*A - k*w(1) - c*w(2));
>    f = [f1; f2];
> end
```

Figyeljük meg, hogy a bemenő változók között szerepel a *t* változó is, még akkor is, ha f_1, f_2 kifejezésben közvetlenül nem! Oldjuk meg a feladatot a Matlab beépített, Runge-Kutta módszert használó, **ode45** parancsával, 10^{-4} abszolút és relatív pontossággal, 0-15 másodpercre!

Az **ode45** opcionális paramétereit eddig még nem alkalmaztuk, de lehetőségünk van több érték beállítására az **odeset()** függvényt használva. A fontosabbak:

- RelTol = skalár relatív hibakorlát, amelyik az y minden komponensére érvényes
- AbsTol= skalár vagy vektor abszolút hibakorlát, amelyik a megoldásfüggvényekre egységesen vagy külön-külön érvényes
- MaxStep = maximális megengedett lépésköz
- InitialStep = javasolt kezdő *t* lépésköz

A megoldást készítsük el a **rezgomozgas.m** fájlba (fontos, hogy a megoldást tartalmazó fájl és a differenciálegyenlet rendszert tartalmazó fájl ugyanabban a könyvtárban legyen!):

```
> % Csillapított rezgés
> clc; clear all; close all;
> %  Megoldás Runge-Kutta módszerrel (ode45, odeset)
> options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
> % legyen az időintervallum [0, 15] másodperc
> x0=0; % kezdeti pozíció
> v0=0; % kezdeti függőleges sebesség
> [T,W]=ode45(@autodiff,[0,15],[x0; v0],options);
```

A megoldásként kapott W mátrix első oszlopában vannak az elmozdulás értékek ($w(1) = x$) és a második oszlopában az első deriváltak ($w(2) = \frac{dx}{dt}$), vagyis a sebesség értékek.

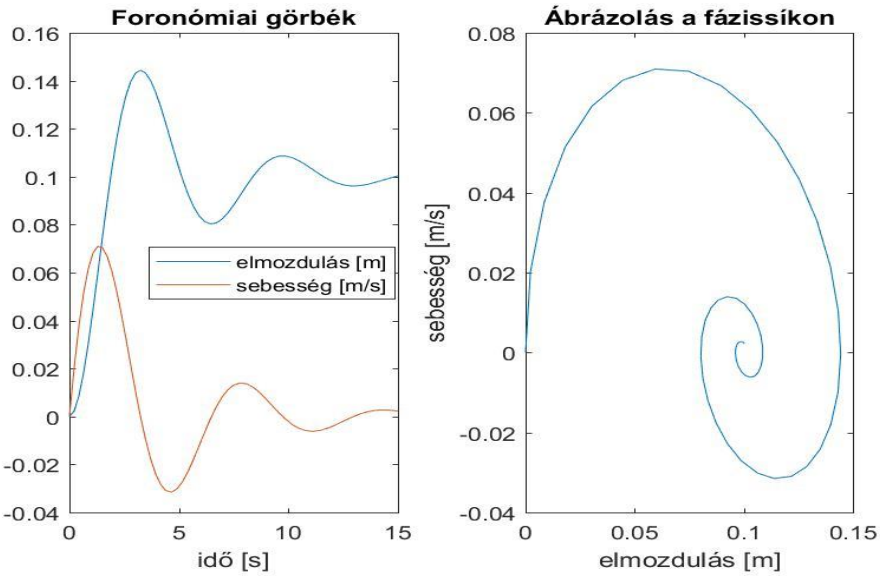
Mivel nem túl bonyolult egyenletrendszerről van szó a feladat megoldható lett volna egysoros függvény használatával is a következőképp:

```
> % Más megoldás egysoros függvény használatával
> m=1000; k=1000; A=0.1; c=500;
> dwdt = @(t,w) [w(2); 1/m*(k*A - k*w(1) - c*w(2))]
> options = odeset('RelTol', 1e-4, 'AbsTol',[1e-4 1e-4]);
> x0=0; v0=0;
> [T1,W1]=ode45(dwdt,[0,15],[x0; v0],options);
```

Megjegyzések: Mindkét megoldás egyenértékű, külön fájlban megírva a differenciálegyenlet rendszert szemléletesebb. Figyeljünk arra, hogy a differenciálegyenlet rendszerben nem szerepel külön a *t* paraméter, mégis meg kell adni a bemenő változóknál a differenciálegyenlet megoldásához! Ugyancsak fontos, ha a differenciálegyenlet rendszert külön fájlban adtuk meg, kell a neve elé írnunk egy @ jelet, ha egysoros függvényként, akkor nem.

Az elmozdulás, sebesség, gyorsulás értékek idő függvényében történő ábrázolását foronómiai görbéknek nevezik, a sebességek ábrázolását az elmozdulás függvényében (ahol az idő a görbe paramétere lesz) pedig fázis síkon történő ábrázolásnak. Rajzoljuk fel két egymás melletti ábrába a foronómiai görbéket és a fázissíkon a sebességeket az elmozdulás függvényében!

```
> % A kocsiszekrény elmozdulása és sebessége az idő függvényében
> subplot(1,2,1)
> x = W(:,1); % függőleges elmozdulás
> v = W(:,2); % függőleges sebesség
> plot(T,x,T,v)
> legend('elmozdulás [m]', 'sebesség [m/s]','Location','Best')
> xlabel('idő [s]'); title('Foronómiai görbék')
> %  Ábrázolás a fázissíkon - sebesség az elmozdulás függvényében
> subplot(1,2,2); plot(x,v)
> xlabel('elmozdulás [m]'); ylabel('sebesség [m/s]')
> title('Ábrázolás a fázissíkon')
```



MÁSODRENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET SZIMBOLIKUS MEGOLDÁSA MATLAB-BAN[1]

Bizonyos egyszerűbb differenciálegyenlet esetében lehetőség van szimbolikus megoldásra is a Matlab-ban, a 'Symbolic toolbox' **dsolve** parancsát használva. Sajnos azonban ez gyakran nem vezet eredményre, ilyenkor csak a numerikus megoldás jöhet szóba (pl. a korábban ismertetett víztartály differenciál egyenlete esetében is).

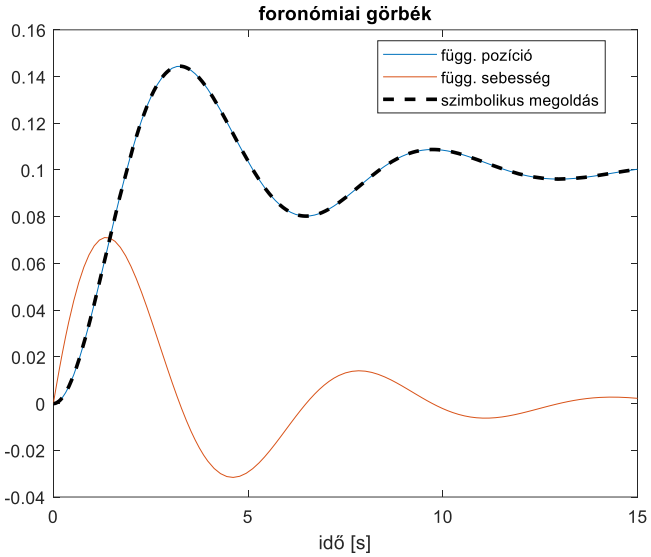
Ebben az utoljára ismertetett másdofokú differenciálegyenlet esetében ($\frac{d^2x}{dt^2} + c\,\frac{dx}{dt} + k\,(x - A) = 0$) azonban működik a szimbolikus megoldás is. Az általános megoldást lásd a következőkben!

```
> % szimbolikus megoldás általánosan
> m = 1000; k = 1000; A = 0.1; c = 500;
> syms x(t)
> % Definiáljuk az egyenlet rendszert!
> % m*x"+ c*x' + k*(x-A) = 0
> ode = m*diff(x,t,2) + c*diff(x,t) + k*(x-A) == 0
> xSol(t) = dsolve(ode)
> % C1*exp(-t/4)*cos((15^(1/2)*t)/4) - C2*exp(-t/4)*sin((15^(1/2)*t)/4)
  + 1/10
```

Kezdeti feltételek megadásával a konkrét megoldás pedig így kapható meg:

```
> cond1 = x(0) == 0;
> Dx = diff(x)
> cond2 = Dx(0) == 0;
> conds = [cond1 cond2];
> xSol(t) = dsolve(ode,conds)
> % 1/10 - (15^(1/2)*exp(-t/4)*sin((15^(1/2)*t)/4))/150 - (exp(-
  t/4)*cos((15^(1/2)*t)/4))/10
> xf = matlabFunction(xSol(t))
> figure(1); hold on; fplot(xf,[0,15],'k--','LineWidth',2)
> legend('függ. pozíció','függ. sebesség', 'szimbolikus megoldás',
  'Location','best')
```

[1] Otthoni átnézésre



MAGASABB RENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLETEK

Harmad-, negyed- vagy magasabb rendű differenciálegyenleteket szintén vissza lehet vezetni elsőrendű differenciálegyenlet rendszerre, hasonlóan a másodrendű esethez, új változók bevezetésével. Természetesen annyi kezdőértékre lesz szükségünk, ahány egyenletet felírunk, harmadrendű esetben 3, negyedrendű esetben 4 stb.

Egy *n*-ed rendű differenciálegyenlet általánosan:

$$\frac{d^n y}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \ldots, \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}\right), \qquad a \le t \le b$$

Kezdeti feltételek:

$$y(a) = A_1;\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=a} = A_2;\ \left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=a} = A_3; \ldots; \left.\frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}\right|_{t=a} = A_n;$$

Vezessünk be egy n elemű új vektorváltozót:

$$w = \left(y \quad \frac{dy}{dt} \quad \frac{d^2y}{dt^2} \quad \ldots \quad \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

Írjuk fel a következő elsőrendű differenciálegyenlet rendszert *w* elemeire a hozzájuk tartozó kezdeti feltételekkel együtt ($y = w_1$):

$$f_1 = \frac{dw_1}{dt} = \frac{dy}{dt} = w_2; \qquad w_1(a) = A_1$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = w_3; \qquad w_2(a) = A_2$$

... ...

$$f_{n-1} = \frac{dw_{n-1}}{dt} = \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} = w_n; \qquad w_{n-1}(a) = A_{n-1}$$

$$f_n = \frac{dw_n}{dt} = \frac{d^ny}{dt^n} = f\left(t, y, \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{(n-1)}y}{dt^{(n-1)}}\right); \qquad w_n(a) = A_n$$

Példaként oldjuk meg a következő harmadrendű differenciálegyenletet a [0,1] intervallumon!

$$2x - 3y + 4\,\frac{dy}{dx} + x\,\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{d^3y}{dx^3} = 0$$

Ahol a következő kezdeti feltételek adottak:

$$y(0) = 3;\ \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0} = 2;\ \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0} = 7;$$

Első lépés, hogy fejezzük ki a legmagasabb deriváltat!

$$\frac{d^3y}{dx^3} = 2x - 3y + 4\,\frac{dy}{dx} + x\,\frac{d^2y}{dx^2}$$

Alakítsuk át a harmadrendű differenciálegyenletet egy elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré, ami 3 egyenletet tartalmaz! A harmadik deriváltat felírhatjuk $f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}\right)$ függvényeként. A függő változó és deriváltjai helyett vezessünk be egy új vektorváltozót!

$$w = \begin{pmatrix} y & \frac{dy}{dt} & \frac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$$

Tehát: $w_1 = y, w_2 = \frac{dy}{dx}, w_3 = \frac{d^2y}{dx^2}$. Az elsőrendű differenciálegyenlet rendszerben az újonnan bevezetett változók első deriváltjait kell megadjuk! 3 változónk van, tehát 3 egyenletet kell felírnunk.

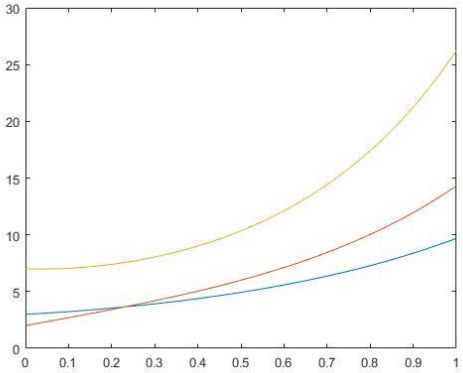
$$f_1 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{dy}{dx} = w_2; \qquad w_1(0) = 3$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = w_3; \qquad w_2(0) = 2$$

$$f_3 = \frac{dw_3}{dx} = \frac{d^2y}{dx^2} = 2x - 3w_1 + 4\,w_2 + x\,w_3; \qquad w_3(0) = 7$$

Matlab-ban ennek a felírása a **diff3.m** fájlban, *w=[w1,w2,w3]:*

```
> function dwdx = diff3(x,w)
>    f1 = w(2);
>    f2 = w(3);
>    f3 = 2*x - 3*w(1) +4*w(2) + x*w(3);
>    dwdx = [f1; f2; f3];
> end
```



Megoldása a [0,1] intervallumon:

```
> w10=3; w20=2; w30=7;
> [X,W]=ode45(@diff3,[0,1],[w10; w20; w30])
> figure(1);
> plot(X,W(:,1),X,W(:,2),X,W(:,3))
```

MAGASABB RENDŰ DIFFERENCIÁLEGYENLET RENDSZEREK

Egy magasabb rendű differenciálegyenlet rendszer hasonlóképp felírható új változók bevezetésével elsőrendű differenciálegyenlet rendszerré. Nézzünk például egy másodrendű differenciálegyenlet rendszert!

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F_1\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

Definiáljunk egy új vektorváltozót a függő változók és deriváltjaik helyett!

$$w = \begin{pmatrix} x & y & \frac{dx}{dt} & \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$$

Tehát: $w_1 = x;\ w_2 = y;\ w_3 = \frac{dx}{dt};\ w_4 = \frac{dy}{dt};$ A négy új változónak megfelelő 4 egyenletből álló lineáris egyenletrendszer a következő lesz:

$$f_1 = \frac{dw_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = w_3$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dy}{dt} = w_4$$

$$f_3 = \frac{dw_3}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = F_1\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$f_4 = \frac{dw_4}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = F_2\left(t, x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

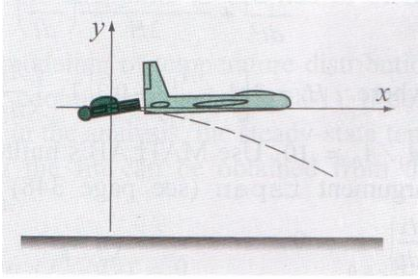
A megoldása az előzőek szerint történhet!

GYAKORLÓ FELADAT

Egy ejtőernyős kiugrik egy egyenesen, vízszintesen haladó repülőből. Az ejtőernyős mozgása közelítőleg az alábbi egyenletrendszerrel írható le:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{\gamma}{m}\left(\frac{dy}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$



ahol x és y az ejtőernyős pozíciója, az ábrán látható koordináta rendszernek megfelelően.

$m = 80\ kg; g = 9.81 m/s^2;\ \gamma\ = 5.38\ Ns^2/m^2$

A kezdeti feltételek:

$$x(0) = 0; y(0) = 0;\ \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0} = 134\ m/s;\ \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0} = 0;$$

Határozza meg az ejtőernyős mozgásának pályáját az első 5 másodpercben. A két másodfokú közönséges differenciál egyenletet vezesse vissza 4 elsőfokú közönséges differenciál egyenletre és oldja meg a feladatot tetszőleges módszerrel.

a) Vezesse vissza a feladatot új változók bevezetésével 4 elsőrendű differenciál egyenletre, és írja meg a rendszert reprezentáló Matlab függvényt! (Ez lehet egysoros függvény is, vagy külön függvényben is megadva)
b) Oldja meg az egyenletrendszert tetszőleges módszerrel az első 5 másodpercre, felhasználva a 4 kezdeti értéket!
c) Rajzolja fel az ejtőernyős pályáját az xy koordináta rendszerben! Két másik ábrába rajzolja fel a következő foronómiai görbéket: x,y elmozdulás és v_x, v_y sebességek az idő függvényében!
d) Mennyi 5 másodperc után az elmozdulás és a sebesség a két koordináta tengely irányában?
e) Mennyi a függőleges elmozdulás 2.25 másodperc után?
f) Az ejtőernyős 1500 m-es magasságban nyitja ki az ejtőernyőjét. Mikor éri el ezt a magasságot, ha a repülőgép az ugráskor 2000 m-en haladt? (Ehhez modellezze hosszabb intervallumra, pl. egy percre az ejtőernyős pályáját!)

Megoldás

a) Írjuk fel az elsőrendű differenciálegyenlet rendszert. Ehhez vezessünk be egy vektorváltozót (w) az ismeretlen x,y pozíciókra és az első deriváltjaikra. Ezek első deriváltjai adják az elsőrendű differenciálegyenlet rendszert.

$$w = \left(x, y, \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$$

$$f_1 = \frac{dw_1}{dt} = \frac{dx}{dt} = w_3$$

$$f_2 = \frac{dw_2}{dt} = \frac{dy}{dt} = w_4$$

$$f_3 = \frac{dw_3}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\gamma}{m}\left(\frac{dx}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = -\frac{\gamma}{m}w_3\sqrt{{w_3}^2 + {w_4}^2}$$

$$f_4 = \frac{dw_4}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = -g - \frac{\gamma}{m}\left(\frac{dy}{dt}\right)\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = g - \frac{\gamma}{m}w_4\sqrt{{w_3}^2 + {w_4}^2}$$

Írjuk fel Matlab-ban az egyenletrendszert, most egysoros függvényként:

```
> %% diff1 - ejtőernyős mozgása
> clc; clear all; close all;
> % elsőrendű diff. egyenlet rendszer anonymous függvényként
> g = 9.81; gamma = 5.38; m = 80;
> ernyodiff = @(t,w) [w(3);
>                     w(4);
>                    -(gamma/m)*w(3)*sqrt(w(3)^2+w(4)^2);
>                    -g-(gamma/m)*w(4)*sqrt(w(3)^2+w(4)^2)
```

b) Oldjuk meg a feladatot!

```
> % kezdeti értékek
>  x0 = 0; y0 = 0; % kezdeti x,y pozíciók
>  vx0 = 134; vy0 = 0; % kezdeti x,y sebességek
>
>  % Egyenletrendszer megoldása beépített függvénnyel az első 5
  másodpercben
> [T,W]=ode45(ernyodiff,[0,5],[x0; y0; vx0; vy0])
> X = W(:,1); Y = W(:,2); % pozíciók
> VX = W(:,3); VY = W(:,4); % sebességek
```

c) Rajzoljuk fel a megoldásokat!

```
> % Az ejtőernyős pályája xy koordináta rendszerben
> figure(1); plot(X,Y)
> title('Az ejtőernyős pályája az első 5 másodpercben')
> % x,y koordináta az első 5 másodpercben
> figure(2); plot(T,X,T,Y);
> legend('x koordináta','y koordináta','Location','best')
> title('Az x,y irányú elmozdulás az idő függvényében')
> % x,y irányú sebesség az első 5 másodpercben (foronómiai görbék)
> figure(3); plot(T,VX,T,VY);
> legend('x irányú sebesség','y irányú sebesség','Location','best')
> title('Az x,y irányú sebesség az idő függvényében')
```

d) Elmozdulás és sebesség 5 másodperc után

```
> % Elmozdulás és sebsesség 5 másodperc után a koordináta tengelyek
  irányában
> disp('vízszintes elmozdulás 5s után: '); disp(X(end)) % 50.1310
> disp('függőleges elmozdulás 5s után: '); disp(Y(end)) % -44.2489
> disp('vízszintes sebesség 5s után: '); disp(VX(end)) % 0.5648
> disp('függőleges sebesség 5s után: '); disp(VY(end)) % -12.0214
```

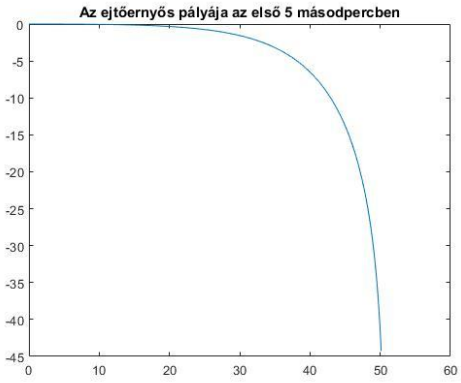
e) Mennyi a függőleges elmozdulás 2.25 másodperc után?

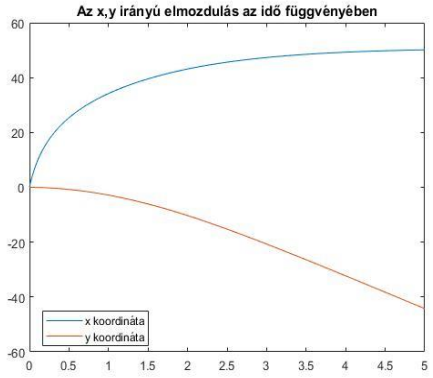
```
> % Mennyi függőleges elmozdulás 2.25 másodperc után?
> ysp = @(x) spline(T,Y,x);
```

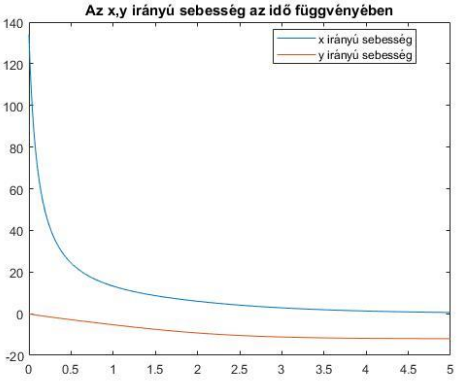
```
> ysp(2.25) % -12.7098 y irányú elmozdulás 2.25 másodperc után
```

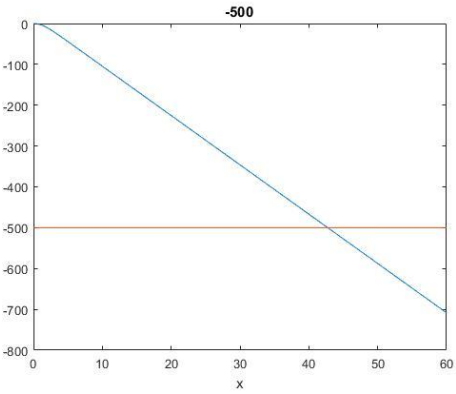
f) A függőleges elmozdulás: (2000 m-ről 1500 m-re): y=-500 m. Ehhez számoljuk ki hosszabb intervallumon, mondjuk 1 perc esetén, az elmozdulás értékeket!

```
> % A függőleges elmozdulás mikor lesz -500 m?
> [T,W]=ode45(ernyodiff,[0,60],[x0; y0; vx0; vy0])
> X = W(:,1); Y = W(:,2); % pozíciók
> VX = W(:,3); VY = W(:,4); % sebességek
> Y(end) %  -708.4927 m, y pozíció 1 perc után
> figure(4); plot(T,Y);
> ysp = @(t) spline(T,Y,t);
> hold on; plot(xlim,[-500 -500])
> % ysp(t) = -500 megoldása
> h = @(t) ysp(t) + 500;
> nyitas = fzero(h,40) %  42.7377 s
```









A FEJEZETBEN HASZNÁLT ÚJ FÜGGVÉNYEK

ode45	-	Közönséges differenciálegyenlet rendszer kezdeti érték problémájának megoldása Runge-Kutta módszerrel
odeset	-	Közönséges differenciálegyenlet kezdeti érték feladatát megoldó függvények opcionális paramétereinek megadása (pl. RelTol, AbsTol, MaxStep, InitialStep)
deval	-	Struktúra típusként megadott differenciálegyenlet megoldás értékének kiszámítása tetszőleges helyen
dsolve	-	Differenciálegyenlet szimbolikus megoldása