



2. gyakorlat



Áttekintés

- Mérési bizonytalanság számítására szolgáló programok
 - NIST Uncertainty Machine
 - számpéldák
- Rendellenes hibaterjedés
 - számpélda

Mérési bizonytalanság számítására szolgáló programok

- [GUM Workbench](#) (Metrodata GmbH)
- [GUM_MC](#) (Jean-Marie Biansan, GPL)
- [Uncertainty Machine](#) (NIST, public domain)
- [GUMsim](#) (QuoData GmbH)
- DataMelt (<http://jwork.org/dmelt>)
- [Uncertainty Calculator](#) (John Denker)
- OpenTurns (LGPL, <http://www.openturns.org/>)

NIST Uncertainty Machine

- Web-es felület, R nyelvű programok, offline telepítés lehetséges (<https://uncertainty.nist.gov/>)
 - bemeneti mennyiségek megadása
 - szám, elnevezés, eloszlás (, korreláció)
 - Monte Carlo minták száma
 - Kimeneti mennyiség(ek) képletének megadása (R programnyelven)
 - számítás végrehajtása

Introduction

The NIST Uncertainty Machine is a Web-based software application to evaluate the measurement uncertainty associated with an output quantity defined by a measurement model of the form $y = f(x_0, \dots, x_n)$.

User's manual available [here](#).

[Load examples](#)

Drop configuration file here or click to upload

1. Select Inputs & Choose Distributions

Number of input quantities:

Names of input quantities:

x0

Correlations

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity:

Random number generator seed:

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

1. példa

- Detrekői 4.8 példa:

Határozzuk meg a kör kerületének és területének a középhibáját, feltételezve, hogy a sugárra végzett mérés $L = 10,000$ m eredménye és a mérés $\mu = 0,03$ m középhibája ismert

1. Select Inputs & Choose Distributions

Number of input quantities: 1

Names of input quantities:

L

L Gaussian (Mean, StdDev) 10 0.03

Correlations

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity: 1000000

Random number generator seed: 54

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

$2 * \pi * L$

$\pi * L^2$

- +

Run the computation

Shared Outputs

[Download binary R data file with Monte Carlo values all output quantities](#)

[Download a text file with Monte Carlo values of all output quantities](#)

[Download text file with numerical results](#)

[Download configuration file](#)

Output 1

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave = 62.832
sd = 0.189
median = 62.832
mad = 0.19

Coverage intervals

99%	(62.35, 63.32)	k =	2.6
95%	(62.462, 63.201)	k =	2
90%	(62.521, 63.141)	k =	1.6
68%	(62.643, 63.021)	k =	1

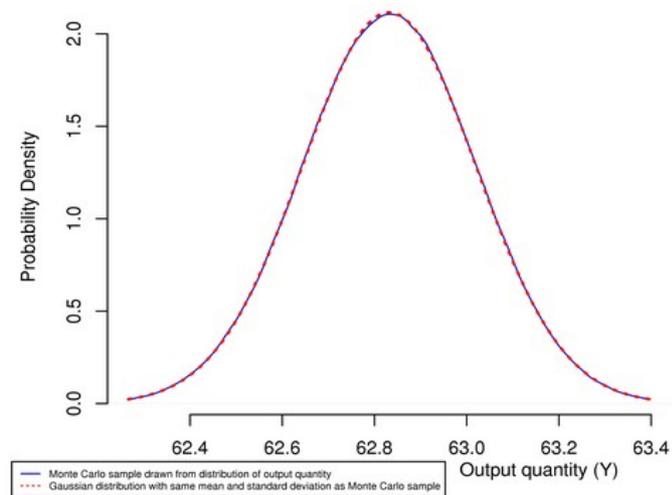
ANOVA (% Contributions)

	w/out Residual	w/ Residual
L	100	100
Residual	NA	0

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 62.832
u(y) = 0.188

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
L	6.3	100
Correlations	NA	0



[Download JPEG file of this plot](#)

Detrekői 4.8 példa eredmények

kerület középhibája: 0.188 m

Ouput 2

==== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave = 314.16
sd = 1.89
median = 314.16
mad = 1.9

Coverage intervals

99%	(309.3, 319)	k =	2.6
95%	(310.5, 317.9)	k =	2
90%	(311.1, 317.3)	k =	1.6
68%	(312.28, 316.05)	k =	1

ANOVA (% Contributions)

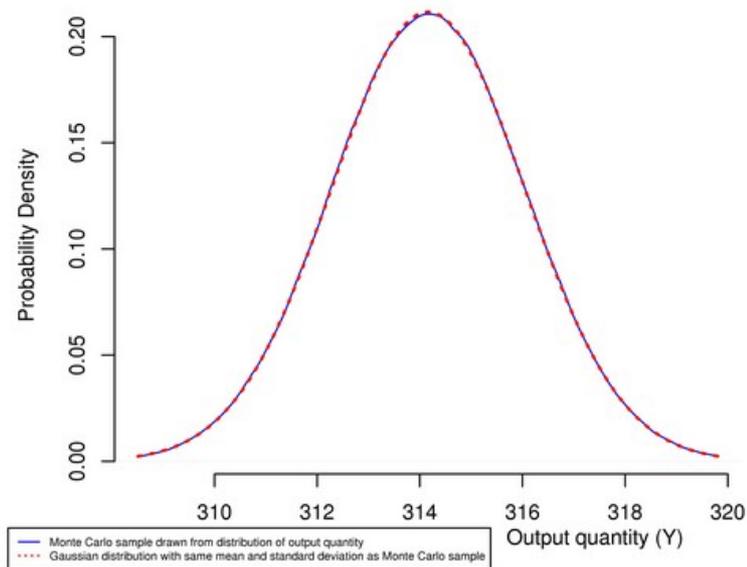
	w/out Residual	w/ Residual
L	100	100
Residual	NA	0

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 314.16
u(y) = 1.88

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
L	63	100
Correlations	NA	0

=====



Detrekői 4.8 példa eredmények
terület középhibája: 1.885 m

További lehetőségek

[Download binary R data file with Monte Carlo values all output quantities](#)

[Download a text file with Monte Carlo values of all output quantities](#)

[Download text file with numerical results](#)

[Download configuration file](#)

[Download JPEG file of this plot](#)

- Eredmények letölthetők kép formájában és szöveges fájlként (results.txt)
- Beállítás fájl letölthető és a példa újra futtatható: (config.um)

2. példa

- Detrekői 4.9 példa:

Határozzuk meg valamely egyenesen egy A pontból kiindulva acélszalaggal folyamatosan mért B és C pontok távolságának a középhibáját. A mérési eredmények:

$L_{AB} = 20,047 \text{ m}$, $L_{AC} = 40,020 \text{ m}$. A mérési eredményeket a

$\mu_{AB} = 6 \text{ mm}$ és a $\mu_{AC} = 8 \text{ mm}$ középhibák jellemzik. A két

mérés kapcsolatát az $r_{BC} = 0,4$ korrelációs együtthatóval

adjuk meg.

Names of input quantities:

LAB LAC

LAB Gaussian (Mean, StdDev) 20.047 0.006
LAC Gaussian (Mean, StdDev) 40.020 0.008

Correlations

LAB LAC
LAB 1 0.4
LAC 1 1

Gaussian Copula

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity: 1000000

Random number generator seed: 54

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

LAC - LAB

- +

Run the computation

1. Select Inputs & Choose Distributions

Number of input quantities: 2

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave = 19.973
sd = 0.00786
median = 19.973
mad = 0.0078

Coverage intervals

99% (19.953, 19.993)	k = 2.5
95% (19.958, 19.9884)	k = 1.9
90% (19.9601, 19.9859)	k = 1.6
68% (19.9651, 19.9809)	k = 1

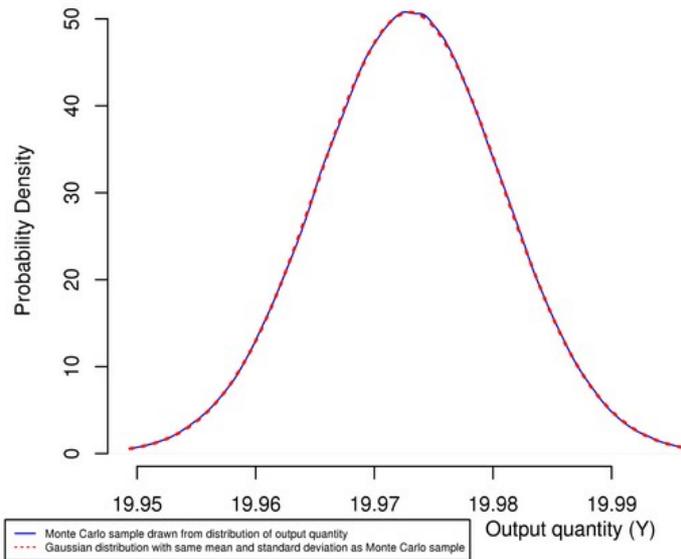
ANOVA (% Contributions)

	w/out Residual	w/ Residual
LAB	12.59	12.59
LAC	87.41	87.41
Residual	NA	0.00

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 19.973
u(y) = 0.00785

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
LAB	-1	58
LAC	1	100
Correlations	NA	-62



Detrekői 4.9 példa eredmények

BC távolság középhibája: 7.8 mm

2. példa, korreláció nélkül

- Detrekői 4.9 példa:

Határozzuk meg valamely egyenesen egy A pontból kiindulva acélszalaggal folyamatosan mért B és C pontok távolságának a középhibáját. A mérési eredmények:

$L_{AB} = 20,047 \text{ m}$, $L_{AC} = 40,020 \text{ m}$. A mérési eredményeket a $\mu_{AB} = 6 \text{ mm}$ és a $\mu_{AC} = 8 \text{ mm}$ középhibák jellemzik. A két mérés kapcsolatát ne vegyük figyelembe.

Names of input quantities:

1. Select Inputs & Choose Distributions

LAB LAC

Number of input quantities: 2

LAB Gaussian (Mean, StdDev) 20.047 0.006

LAC Gaussian (Mean, StdDev) 40.020 0.008

Correlations

	LAB	LAC
LAB	1	0.0
LAC		1

Gaussian Copula

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity: 1000000

Random number generator seed: 54

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

```
LAC - LAB
```

- +

Run the computation

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 1000000

ave = 19.973
sd = 0.01
median = 19.973
mad = 0.01

Coverage intervals

99%	(19.947, 19.999)	k =	2.6
95%	(19.953, 19.993)	k =	2
90%	(19.956, 19.989)	k =	1.6
68%	(19.963, 19.983)	k =	1

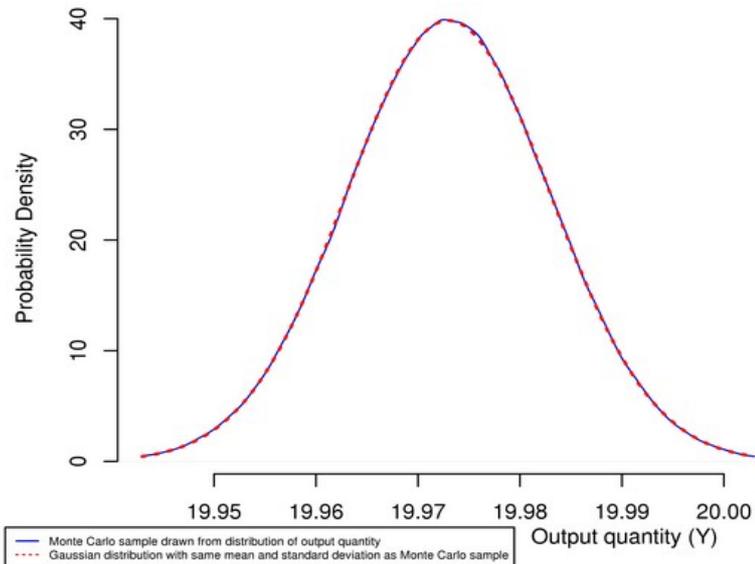
ANOVA (% Contributions)

	w/out Residual	w/ Residual
LAB	35.83	35.83
LAC	64.17	64.17
Residual	NA	0.00

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 19.973
u(y) = 0.01

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
LAB	-1	36
LAC	1	64
Correlations	NA	0



Detrekői 4.9 példa eredmények

BC távolság középhibája: 10.0 mm

3. példa

- Detrekői 4.13 példa:

Ismert koordinátájú A pontból giroteodolittal és távmérővel mérést végeznek az ismeretlen koordinátájú P pont meghatározására. A giroteodolittal mért azimut értéke:

$L_\alpha = 30^\circ 42' 06''$, a távmérővel mért távolságé pedig $L_t = 310,410$ m .

Az azimutot a $\mu_\alpha = 12''$, a távolságmérést a $\mu_t = 0.01$ m középhiba jellemzi. A két mérés függetlennek tekinthető. Határozzuk meg a P pont A ponthoz viszonyított koordinátáit és azok kovarianciamátrixát

1. Select Inputs & Choose Distributions

Number of input quantities: 2

Names of input quantities:

Lt

La

Lt Gaussian (Mean, StdDev) 310.410 0.01

La Gaussian (Mean, StdDev) 30.70166667 0.00333333

Correlations

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity: 500000

Random number generator seed: 54

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

`Lt*cos(La*pi/180)`

`Lt*sin(La*pi/180)`

- +

Run the computation

Ouput 1

==== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 266.9021
 sd = 0.013
 median = 266.902
 mad = 0.013

Coverage intervals

99% (266.87, 266.934) k = 2.5
 95% (266.877, 266.927) k = 2
 90% (266.881, 266.923) k = 1.7
 68% (266.89, 266.915) k = 0.99

ANOVA (% Contributions)

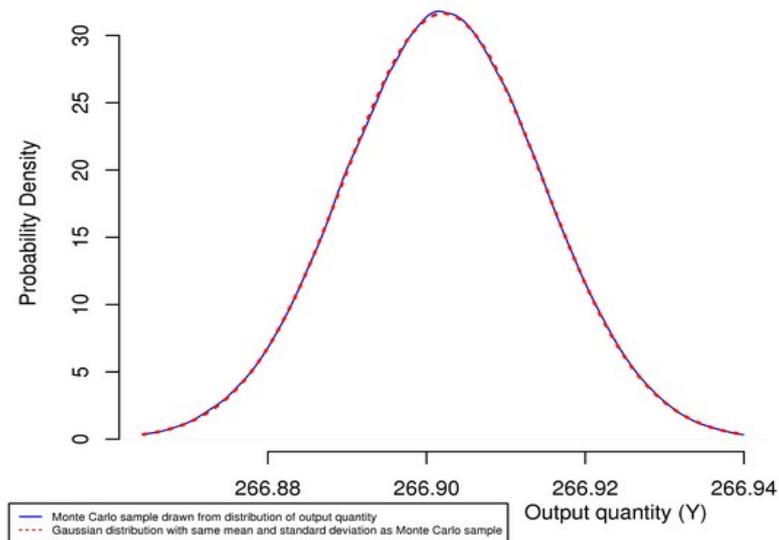
	w/out Residual	w/ Residual
Lt	46.48	46.48
La	53.52	53.52
Residual	NA	0.00

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 266.9021
 u(y) = 0.013

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
Lt	0.86	47
La	-2.80	53
Correlations	NA	0

=====



[Download JPEG file of this plot](#)

Detrekői 4.13 példa eredmények

X koordináta középhibája: 0.013 m

Ouput 2

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 158.485
sd = 0.016
median = 158.485
mad = 0.016

Coverage intervals

99%	(158.443, 158.527)	k =	2.6
95%	(158.453, 158.517)	k =	2
90%	(158.459, 158.512)	k =	1.6
68%	(158.469, 158.502)	k =	1

ANOVA (% Contributions)

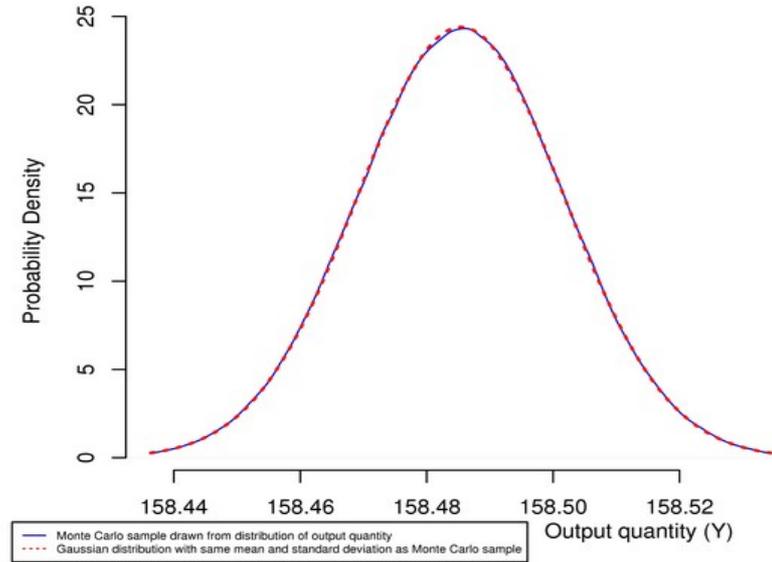
	w/out Residual	w/ Residual
Lt	9.77	9.77
La	90.23	90.23
Residual	NA	0.00

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 158.485
u(y) = 0.016

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
Lt	0.51	9.8
La	4.70	90.0
Correlations	NA	0.0

=====



Detrekői 4.13 példa eredmények

Y koordináta középhibája: 0.016 m

3. példa – kovariancia mátrix

- A NIST Uncertainty Machine nem számítja ki a kovariancia mátrixot
- A Monte Carlo számítás eredményei viszont letölthetők (values.txt) és ezekből a számítás elvégezhető

[Download binary R data file with Monte Carlo values all output quantities](#)

[Download a text file with Monte Carlo values of all output quantities](#)

[Download text file with numerical results](#)

[Download configuration file](#)

```
"y1" "y2"  
266.896465773678 158.510627930491  
266.901775051475 158.49156616866  
266.90907895783 158.444060010151  
266.883259174918 158.518634359747  
266.928823328455 158.484721799438  
266.88425496917 158.516710228299  
266.929457687034 158.457267899579  
266.877322252119 158.503631394655  
266.904873642514 158.482674759476  
...
```

Kovariancia mátrix számítása

- Python program

```
# -*- coding: utf-8 -*-
import numpy as np

data = np.loadtxt('values.txt', skiprows=1)
nd = data.shape[0]
nv = data.shape[1]
covmx = np.cov(data.T)
v = ['x', 'y']

print("Kovariancia mátrix Monte Carlo szimulációval")
print(" adatok száma: {:d}".format(nd))
print("kovariancia mátrix")
for i in range(nv):
    for j in range(nv):
        print("{0:2s}{1:2s}: {2:8.4e}".format(v[i],v[j],covmx[i,j]))
```

Kovariancia mátrix számítása

- számítási eredmények

```
python corr.py
```

```
Kovariancia mátrix Monte Carlo szimulációval  
adatok száma: 500000
```

```
kovariancia mátrix
```

```
x x : 1.5909e-04
```

```
x y : -9.9308e-05
```

```
y x : -9.9308e-05
```

```
y y : 2.6703e-04
```

Detrekői eredmények

Az \mathbf{F}_{YL}^* és az \mathbf{M}_{LL} mátrixokat a (4.67) összefüggésbe helyettesítve megkapjuk a koordináták \mathbf{M}_{YY} kovarianciamátrixát:

$$\mathbf{M}_{YY} = \mathbf{F}_{YL}^* \mathbf{M}_{LL} \mathbf{F}_{YL} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0,8598 & -158,486 \\ 0,5106 & 266,902 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,01^2 & 0 \\ 0 & \left(\frac{12}{\rho''}\right)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,8598 & 0,5106 \\ -158,486 & 266,902 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1,589 \cdot 10^{-4} & -0,993 \cdot 10^{-4} \\ -0,993 \cdot 10^{-4} & 2,671 \cdot 10^{-4} \end{bmatrix} [\text{m}^2].$$



Rendellenes hibaterjedés

- *Pontatlanabb mérések adhatnak-e pontosabb eredményeket?*

Rendellenes hibaterjedés

- *Pontatlanabb mérések adhatnak-e pontosabb eredményeket?*
- Igen!
A bemeneti mennyiség bizonytalansága **nő**,
mégis a számított mennyiség bizonytalansága **csökken!**
- számpélda P. Pernot et al. (2015) cikke alapján

Hibaterjedés: eredő bizonytalanság meghatározása

- A mérendő mennyiséget az egyes összetevők alapján számítással határozzuk meg. Az összetevők bizonytalanságai alapján a mérendő mennyiség eredő bizonytalanságát a standard bizonytalanságok terjedési törvényének segítségével határozzuk meg (hibaterjedés)
- Az X_i bemeneti mennyiségek (összetevők) és az Y mérendő, vagy kimeneti mennyiség kapcsolatát megadó függvény a fizikai törvényszerűségek alapján ismert:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

- A mérési folyamat során az X_i bemeneti mennyiségek x_i becslőit határozzuk meg. A becslők értékét a függvénybe helyettesítve megkapjuk a kimeneti mennyiség y becslőjét:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

- A becsült kimeneti mennyiség standard bizonytalansága (négyzete):

$$u_e^2(y) = \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial f}{\partial x_j} u(x_i, x_j)$$

- A kifejezés a [standard bizonytalanságok terjedési törvénye](#), amelyben az $u(x_i, x_j)$ a becslők becsült kovarianciája, a $\partial f / \partial x_i$ számok az [érzékenységi együtthatók](#)

Ez a törvény azonos a geodéziában jól ismert [hibaterjedés](#) törvényével

Nem lineáris függvény hibaterjedése

- n független valószínűségi változó függvénye

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

- variancia összetevők lineáris esetben (összegük 1)

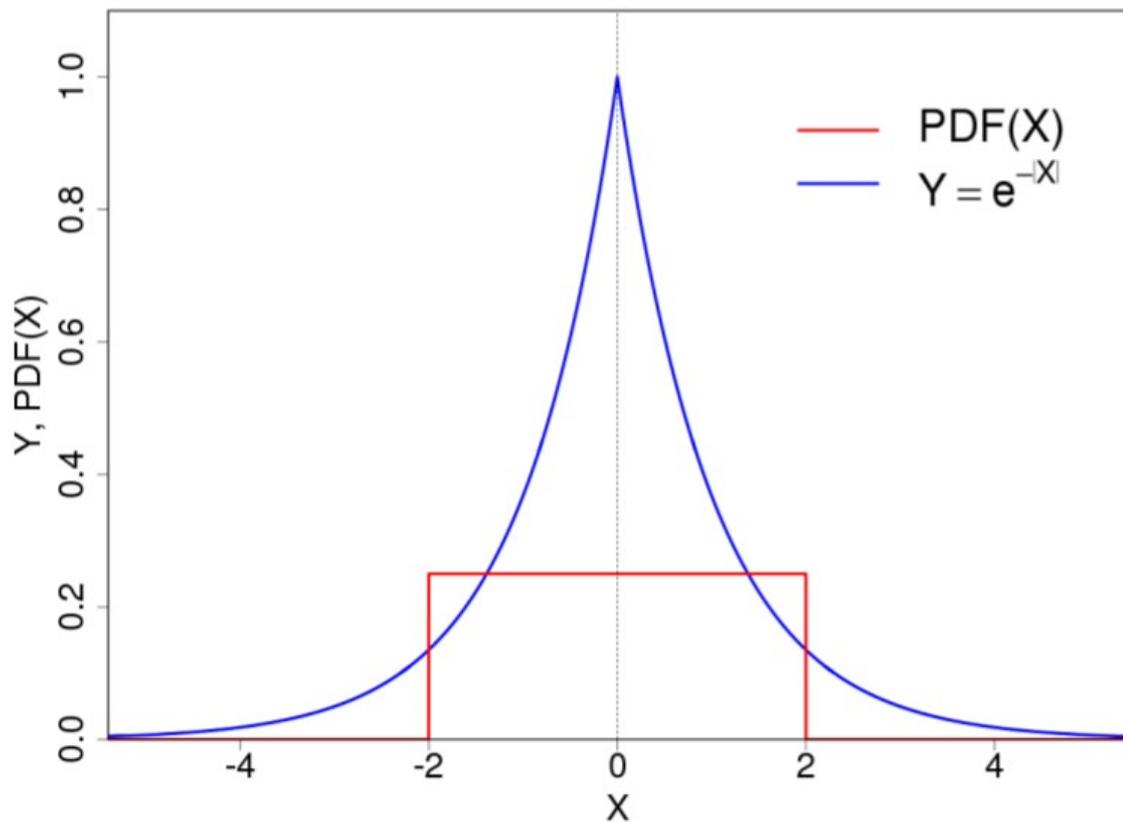
$$G_{X_i} = \frac{1}{u_Y^2} \left(\frac{\partial Y}{\partial X_i} \right)^2 u_{X_i}^2$$

$$G_{X_i} = \frac{E\left[(Y - u_Y) \frac{\partial Y}{\partial X_i} (X_i - u_{X_i})\right]}{u_Y^2}$$

- variancia összetevők (*variancia gradiensek*) nem lineáris esetben (összegük nem 1 és negatívak is lehetnek!)

Szám példa

- Bemeneti X mennyiség egyenletes eloszlású az $[-a, a]$ intervallumban (pl. a kvantálási zaj ilyen)
- A mérési függvény $Y = \exp(-|X|)$
- Monte Carlo szimuláció



Analitikus variancia gradiensek

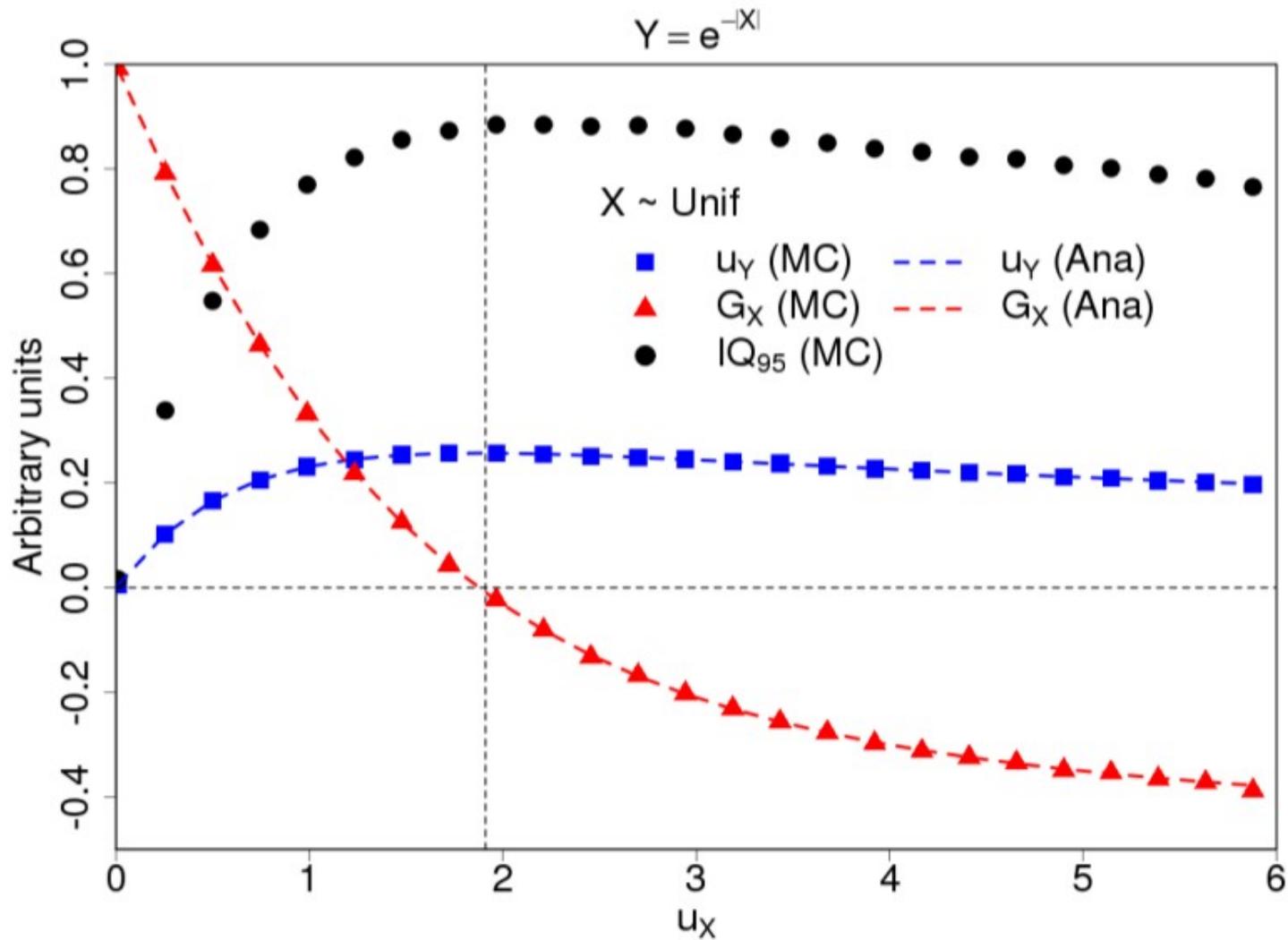
- Pernot et al. cikkében analitikus képletek találhatóak:

$$\bar{y} = \frac{1 - e^{-a}}{a} \quad (6)$$

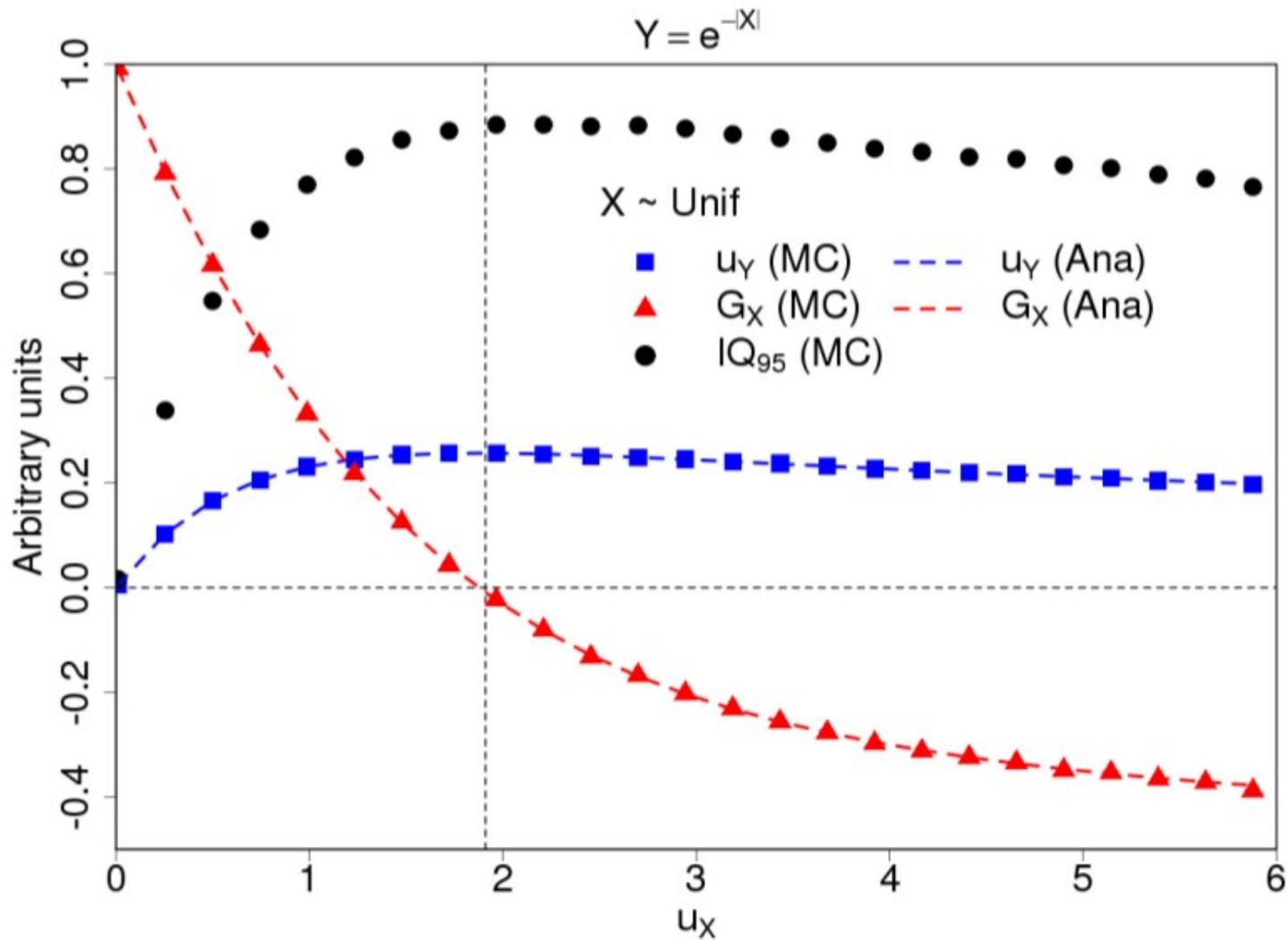
$$u_Y^2 = \frac{1 - e^{-2a}}{2a} - \bar{y}^2 \quad (7)$$

$$G_X = \frac{1}{2au_Y^2} \times \left[\frac{2a + 1}{2} e^{-2a} - 2\bar{y} ((a + 1)e^{-a} - 1) - \frac{1}{2} \right] \quad (8)$$

Kimeneti érték bizonytalansága



Kimeneti érték bizonytalansága



NIST Uncertainty Machine

- Az a fél szélességű egyenletes eloszláshoz tartozó mérési bizonytalanság:

$$u_X = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

1. Select Inputs & Choose Distributions

Number of input quantities: 1

Names of input quantities:

X

X Rectangular (Left Endpoint, Right Endpoint) -1.732 1.732

Correlations

2. Choose Options

Number of realizations of the output quantity: 500000

Random number generator seed: 80

Symmetrical coverage intervals

3. Write the Definition of Output Quantity

Definition of output quantity (R expression):

```
exp(-abs(x))
```

- +

Run the computation

Eredmények

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 0.40
sd = 0.232
median = 0.42
mad = 0.25

Coverage intervals

99%	(0.178, 0.991)	k =	1.8
95%	(0.185, 0.957)	k =	1.7
90%	(0.193, 0.916)	k =	1.6
68%	(0.23, 0.76)	k =	1.1

ANOVA (% Contributions)

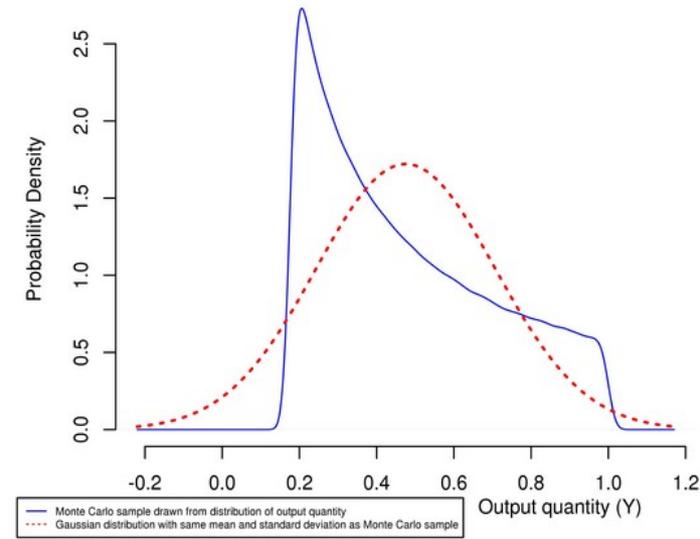
	w/out Residual	w/ Residual
X	100	0
Residual	NA	100

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 1
u(y) = 0

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
X	0	NA
Correlations	NA	NA

=====



- [Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity](#)
- [Download a text file with Monte Carlo values of output quantity](#)
- [Download text file with numerical results shown on this page](#)
- [Download JPEG file with plot shown on this page](#)
- [Download configuration file](#)

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 0.28
sd = 0.26
median = 0.18
mad = 0.18

Coverage intervals

99%	(0.0319, 0.983)	k =	1.9
95%	(0.034, 0.92)	k =	1.7
90%	(0.037, 0.84)	k =	1.6
68%	(0.054, 0.58)	k =	1

ANOVA (% Contributions)

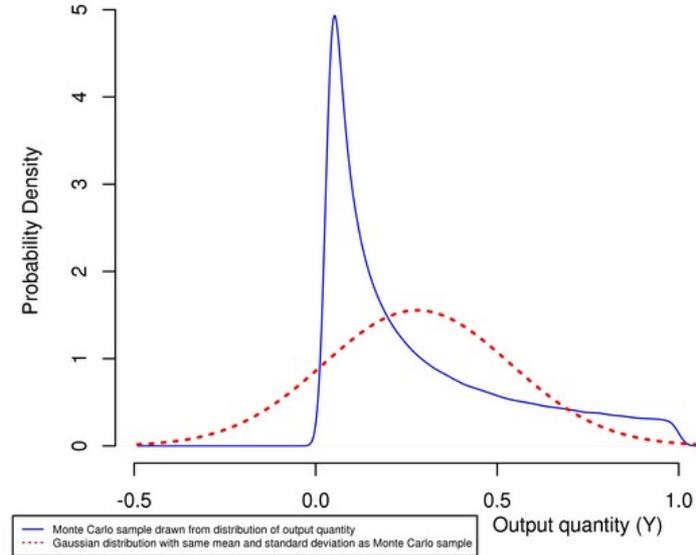
	w/out Residual	w/ Residual
X	100	0
Residual	NA	100

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 1
u(y) = 0

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
X	0	NA
Correlations	NA	NA

=====



[Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity](#)
[Download a text file with Monte Carlo values of output quantity](#)
[Download text file with numerical results shown on this page](#)
[Download JPEG file with plot shown on this page](#)
[Download configuration file](#)

Eredmények ($2u_x$)

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 0.19
sd = 0.24
median = 0.075
mad = 0.095

Coverage intervals

99%	(0.00569, 0.974)	k =	2
95%	(0.0063, 0.88)	k =	1.8
90%	(0.0072, 0.77)	k =	1.6
68%	(0.013, 0.44)	k =	0.88

ANOVA (% Contributions)

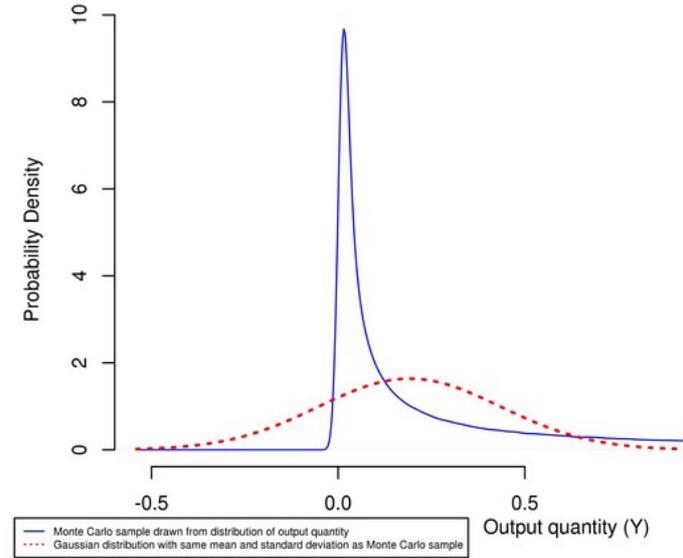
	w/out Residual	w/ Residual
X	100	0
Residual	NA	100

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 1
u(y) = 0

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
X	0	NA
Correlations	NA	NA

=====



[Download binary R data file with Monte Carlo values of output quantity](#)
[Download a text file with Monte Carlo values of output quantity](#)
[Download text file with numerical results shown on this page](#)
[Download JPEG file with plot shown on this page](#)
[Download configuration file](#)

Eredmények ($3u_x$)

===== RESULTS =====

Monte Carlo Method

Summary statistics for sample of size 500000

ave = 0.096
sd = 0.2
median = 0.006
mad = 0.008

Coverage intervals

99%	(3.2e-05,	0.95)	k =	2.4
95%	(4e-05,	0.77)	k =	2
90%	(5.2e-05,	0.59)	k =	1.5
68%	(0.00016,	0.19)	k =	0.48

ANOVA (% Contributions)

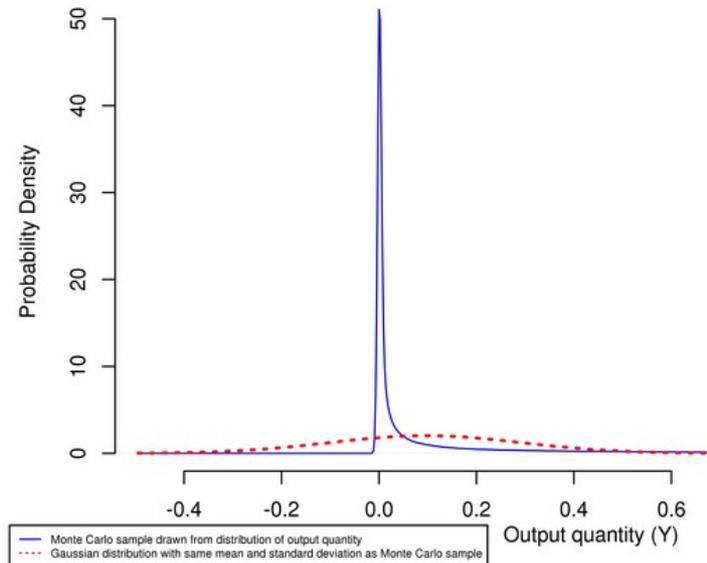
	w/out Residual	w/ Residual
X	100	0
Residual	NA	100

Gauss's Formula (GUM's Linear Approximation)

y = 1
u(y) = 0

	SensitivityCoeffs	Percent.u2
X	0	NA
Correlations	NA	NA

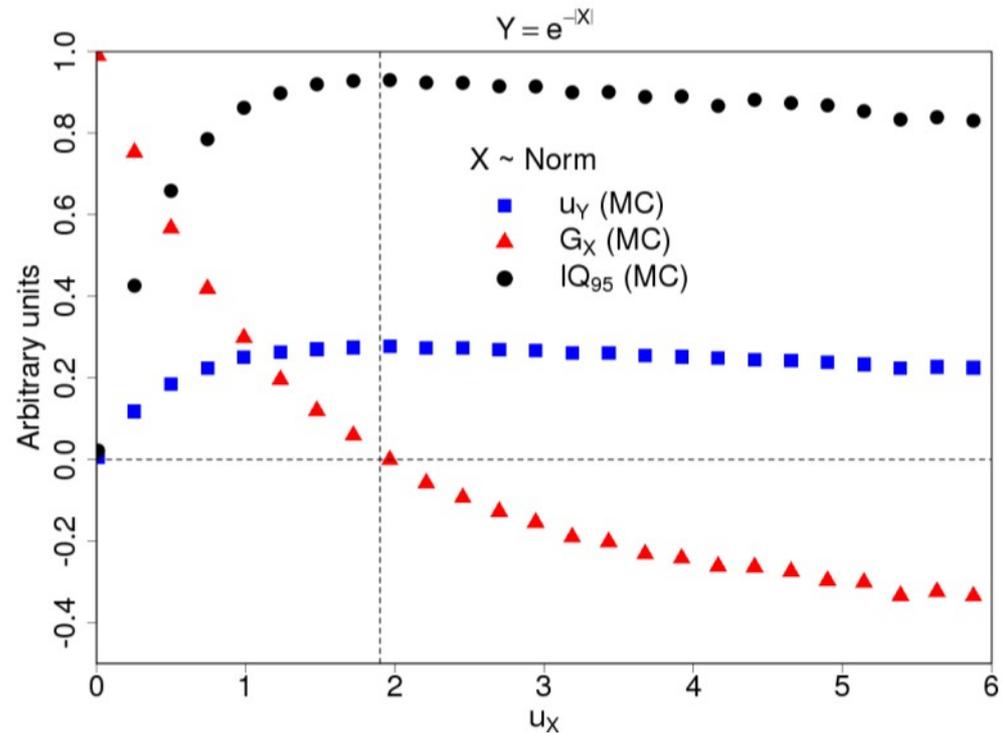
=====



Eredmények ($6u_x$)

Más mérési függvény, más eloszlással

- A mérési függvény $Y = \exp(-X^2)$
 - Hasonló paradox eredményeket kapunk
- Más az X eloszlás függvénye, pl. Gauss
 - Hasonló paradox eredményeket kapunk



Tanulságok

- Negatív variancia gradiensek (csökkenő kimeneti variancia növekvő bemeneti varianciára) sokféle modellben jelentkeznek
- Óvatosan kell bánni a szórással (középhiba) illetve a megbízhatósági intervallumokkal mint a mérési bizonytalanság jellemzőivel
- Fontos megvizsgálni a számított mennyiségek valódi eloszlását is, pl. Monte Carlo eljárással
 - Erre a célra már jó eszközökkel rendelkezünk (pl. NIST Uncertainty Machine)

Hivatkozás

- Pernot P, Désenfant M, Hennebelle F (2015): Model's output variance can increase when input variance decreases: a sensitivity analysis paradox? 17th Int. Congr. of Metrology

17th International Congress of Metrology, 02004 (2015)

DOI: 10.1051/metrology/201502004

© Owned by the authors, published by EDP Sciences, 2015

Model's output variance can increase when input variance decreases : a sensitivity analysis paradox ?

Pascal Pernot^{1,4,a}, Michèle Désenfant^{2,4}, et François Hennebelle^{3,4}

¹ *Laboratoire de Chimie Physique, UMR8000 CNRS/Univ. Paris-Sud, Orsay, France*

² *Laboratoire National de Métrologie et d'Essais (LNE), 1 rue Gaston Boissier, 75724 Paris Cedex 15, France*

³ *Laboratoire Electronique, Informatique et Image, UMR6306 CNRS/Université de Bourgogne, Avenue des Plaines de l'Yonne, 89000 Auxerre, France*

⁴ *Réseau "Mesures, Modèles et Incertitudes", Mission pour l'Interdisciplinarité - CNRS*