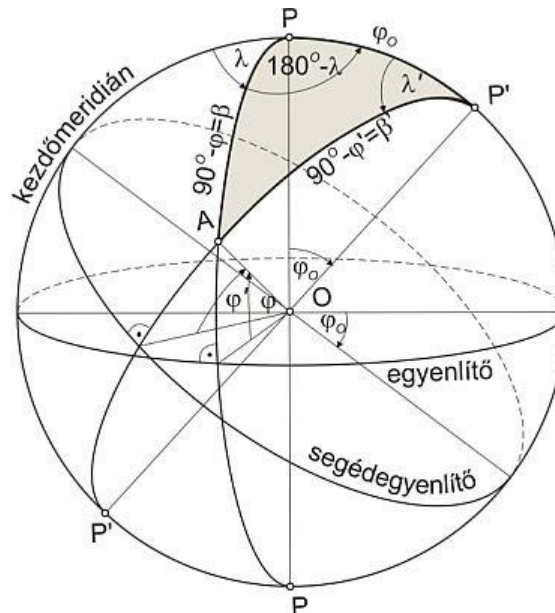


Vetülettan - 2. előadás vázлата

1 SEGÉD FÖLDRAJZI KOORDINÁTÁK



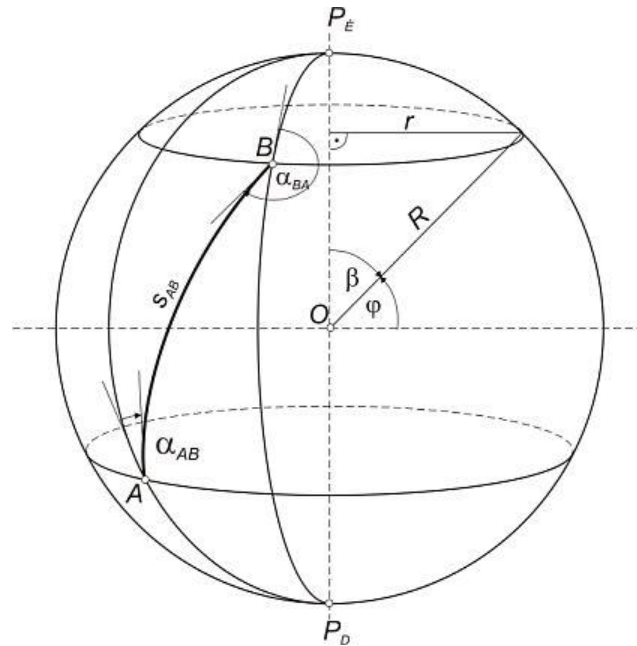
Gömbi segéd földrajzi koordináták

Nem a pólusokat összekötő átmérőhöz, hanem egy másik átmérőjéhez kell adatainkat viszonyítani. Fogalmak:

- *segédpólus*
- *segédegyenlítő*
- *segédmeridiánok*
- *segédparalelkörök*
- *segédfokhálózat*
- *segéd földrajzi koordináták: a segéd földrajzi szélesség (φ') és a segéd földrajzi hosszúság (λ'). A segéd földrajzi szélesség pótszögét (β') segédpólustávolságnak nevezzük.*

2 AZIMUT

Valamely gömbi főkör ívének α *azimutja* az ív egy tetszőleges pontjában az a szög, amit az ív és a meridián érintői zárnak be egymással az adott pontban. Az azimutot a meridián *északi ágától* kiindulva az óramutató járásával megegyező irányban számítjuk 0° -tól 360° -ig (2.1. ábra bal oldali része).



Azimutok és egy paralelkör sugara

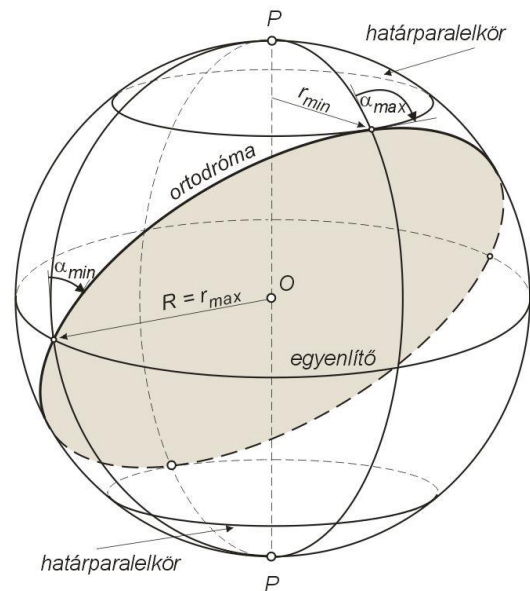
3 ORTODRÓMA ÁLTALÁNOS EGYENLETE

A geodéziai vonal (ortodróma, legnagyobb gömbi kör, főkörív) – minden forgásfelületen érvényes általános egyenlete:

$$r \sin \alpha = k \text{ (konstans)}$$

ahol r a ponton átmenő paralelkör sugara, α pedig a geodéziai vonal azimutja a pontban. (Ez *Clairaut tétele*). Ez az egyenlet leírja az ortodróma azimutjának változását.

- $r_{max} = R$ (egyenlítő) $\rightarrow \alpha_{min}$ az egyenlítőn van, $\sin \alpha_{min} = k/R$, ebből számítható, hogy mekkora azimut alatt metszi az ortodróma az egyenlítőt.
- A pólus felé haladva a paralelkör sugara (r) csökken, az azimut (α) nő.
- $\alpha_{max} = 90^\circ$ a határparalelkőrnél (itt az azimut 90° -ot ér el, a gömbi főkör érinti a ponton átmenő paralelkört, de át már nem metszi)
- A k konstans a határparalelkör sugara, mivel $\sin 90^\circ = 1 \rightarrow r \cdot 1 = k$
- Az ortodróma az egyenlítő és a határparalelkör között mindegyik gömbnegyedben szimmetrikusan halad, amíg vissza nem ér a kezdőpontba.
- A meridiánok is ortodrómák (legnagyobb gömbi körök, síkjuk átmegy az origón), azimutjuk állandó 0° vagy 180° , határparalelkőreik a pólusok, mivel $r \cdot \sin 0^\circ = 0$.

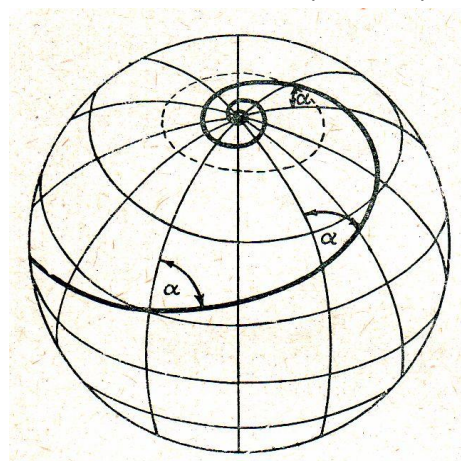


- Az egyenlítő is ortodróma (legnagyobb gömbi kör, síkja átmegy az origón), azimutja állandó 90° vagy 270° , határpáralelköre ön maga: $k = R \cdot \sin 90^\circ = R$.
- A páralelkör nem ortodróma, nem legnagyobb gömbi kör, síkja nem megy át az origón.

4 LOXODRÓMA

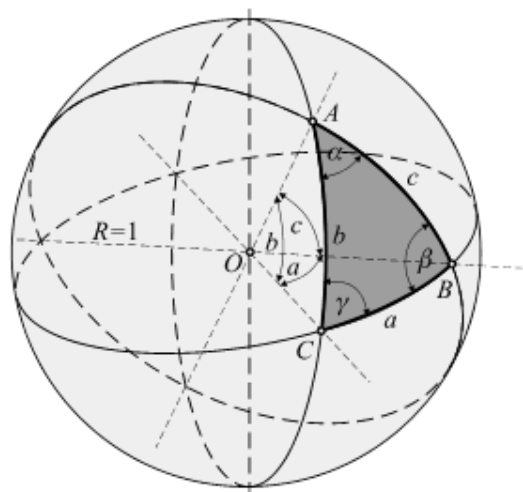
A forgásfelületek másik nevezetes vonala a *loxodróma*. A loxodróma olyan folytonos görbe vonal, amely minden pontjában azonos szöget zár be a meridián irányával, tehát azimutja állandó: $\alpha = k$ (konstans)

- A meridián loxodróma ($\alpha = 0^\circ$), az egyenlítő és a páralelkörök is loxodrómák ($\alpha = 90^\circ$).
- Más irányban a loxodróma olyan csavarvonal, amely aszimptotikusan közeledik a pólushoz.
- Tengeri hajózásban van jelentősége, régebben általában loxodrómán hajóztak, mert így csak állandó azimutot kellett tartani.
- Hosszú úton a loxodróma jóval hosszabb lehet az ortodrómánál, viszont az ortodróma azimutja pontról pontra változik, ezért nehéz követni. Ilyenkor az ortodrómát szakaszokra bontották, és a szakaszokon belül loxodrómával helyettesítették. A repülésben is hasonló gyakorlatot követtek.



5 GÖMBHÁROMSZÖG, GÖMBI SZÖGFELESLEG

- A gömbháromszög mindegyik oldalának egy-egy *főkörív* felel meg. Csúcsai ezek metszéspontjai.
- A gömbháromszög a, b, c oldalán az origót a csúcsokkal összekötő három félegyenes által páronként bezárt szöget értjük.
- Az a, b, c oldalakkal szemközti szögek a gömbháromszög szögei: α, β, γ .
- Mind az oldalakat, mind a szögeket *szögértékben* fejezzük ki.



A gömbháromszög szögeinek összege mindig nagyobb 180° -nál:

$$180^\circ < \alpha + \beta + \gamma < 540^\circ$$

- Az $\varepsilon = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$ különbséget a gömbháromszög **gömbi szögfeleslegének** nevezzük.

- Az ε számítható a gömbháromszög területéből is: $\varepsilon = \frac{F}{R^2} \rho$

ahol F a gömbháromszög területe, R a gömb sugara, ρ pedig az analitikus szögegységnek megfelelő fok- vagy másodperc-érték ($\rho^\circ = \frac{180^\circ}{\pi}$, $\rho'' = \frac{180}{\pi} 3600'' = 206\,264,806\,2471''$.)

- A teljes gömb gömbi szögfeleslege: $\varepsilon = \frac{F}{R^2} = \frac{4R^2\pi}{R^2} = 4\pi = 720^\circ$.

- Ha ismerjük a gömbháromszög két oldalát és a közbezárt szöget:

$$\tan \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \sin \gamma}{1 + \tan \frac{a}{2} \tan \frac{b}{2} \cos \gamma} .$$

- A gömbháromszög 3 oldalának ismeretében:

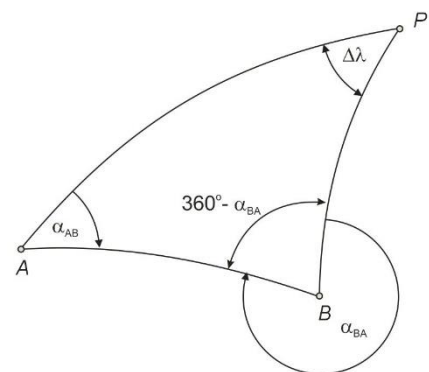
$$\tan \frac{\varepsilon}{4} = \sqrt{\tan \frac{s}{2} \tan \frac{s-a}{2} \tan \frac{s-b}{2} \tan \frac{s-c}{2}} , \text{ ahol } s = \frac{a+b+c}{2} .$$

- Magyarország egész területére: $\varepsilon = 7'52''$
- Gömbi kétszög esetében: $\varepsilon = 90^\circ + 90^\circ + \Delta\lambda - 180^\circ = \Delta\lambda$
- Félgömb szögfeleslege: 2π

6 VALÓDI GÖMBI MERIDIÁN KONVERGENCIA

Ellenazimut meghatározása: Két pontot összekötő ortodrómának a két pontnál jelentkező azimutja – a meridiánok pólus felé konvergálása miatt – általában nem 180° -kal különbözik egymástól, hanem $180^\circ + \gamma$ -val, ahol γ a két pont között fellépő **valódi gömbi meridiánkonvergencia**.

- $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \gamma$
- γ poláris gömbháromszögből számítható!
- Levezetés: $\alpha_{AB} + 360^\circ - \alpha_{BA} + \Delta\lambda = 180^\circ + \varepsilon$
átrendezve: $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \Delta\lambda - \varepsilon$
- tehát a valódi gömbi meridiánkonvergencia:
 $\gamma = \Delta\lambda - \varepsilon$.



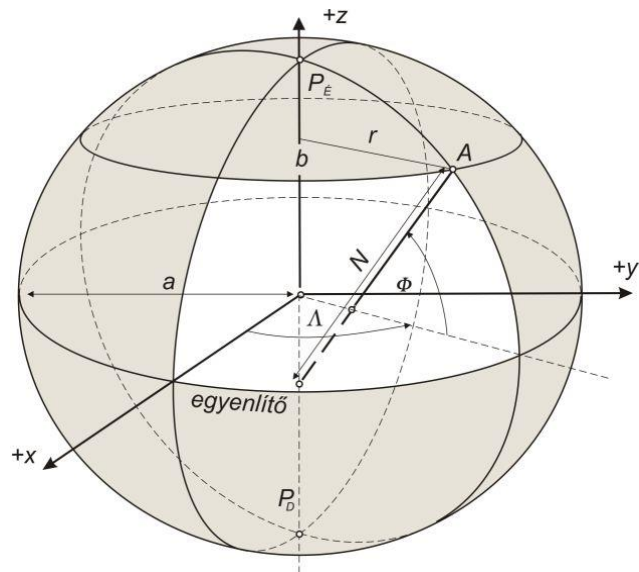
7 ELLIPSZOID ALAPFOGALMAI

7.1 FORGÁSI ELLIPSZOID MÉRETE ÉS ALAKJA

Ha az ellipszist a kistengelye körül körbe forgatjuk, akkor az forgási ellipszoidot kapunk. Az ellipszoid meghatározásához **két adat szükséges**, amelyek egyikének méret meghatározónak kell lennie.

Az ellipszoid méretére és alakjára az alábbi adatok jellemzők:

- fél nagytengely: a ,
- fél kistengely: b ,
- lapultság: $f = \frac{a-b}{a}$,
- első numerikus excentricitás: $\varepsilon = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$,
- második numerikus excentricitás: $\varepsilon' = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{b^2}}$,



Köztük lévő összefüggések:

$$\varepsilon'^2 = \frac{\varepsilon^2}{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon'^2}{1 + \varepsilon'^2},$$

$$(1 - \varepsilon^2)(1 + \varepsilon'^2) = 1,$$

$$f = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \varepsilon^2 = 2f - f^2$$

Ellipszoidi számításokban gyakran előfordulnak a következő jelölések is:

$$c = \frac{a^2}{b}, \quad \eta^2 = \varepsilon'^2 \cos^2 \Phi, \quad V = \sqrt{1 + \eta^2}.$$

8 EGYÉB ELLIPSZOIDI FOGALMAK

- Kezdőmeridiánok: Ma a Greenwich-i az általános, régen használták a fiktív Ferroi meridiánt. (A fiktív ferroi meridiánt kereken 20°-kal nyugatra vették fel a párizsi meridiántól. A greenwichi meridiántól ez mintegy 17° 40'-cel esik nyugatra.)
- Ortodróma: geodéziai vonal, $r \sin \alpha = k$, $r_{max} = a$. Az ellipszoidon az ortodróma általában nem zárt görbe. Kivétel a kör alakú egyenlítő és az ellipszis alakú meridián.
- Loxodróma: ua. mint a gömbnél, állandó α azimut
- Ellipszoidi meridián konvergencia (γ): Ua., mint a gömbnél $\alpha_{BA} = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \Delta\lambda - \varepsilon = \alpha_{AB} \pm 180^\circ + \gamma$

- Ellipszoidi szögfelesleg (ε_e): Ua., mint a gömbnél: $\varepsilon_e = (\alpha + \beta + \gamma) - 180^\circ$
- Meridián irányú görbületi sugár: $M = \frac{a(1-\varepsilon^2)}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{3}{2}}}$ (Az ellipszoid meridiánjának görbületi sugara)
- Harántgörbületi sugár: $N = \frac{a}{(1-\varepsilon^2 \sin^2 \Phi)^{\frac{1}{2}}}$ (A meridián síkjára merőleges kelet-nyugati főirányban a metszési görbe sugara. M és N a paralelkör minden pontjában azonos.)
- Simulógömb sugara: $R = \sqrt{M \cdot N}$ (Közepessugarú v. Gauss gömb)
- Paralelkör sugara: $r = N \cdot \cos \Phi$

9 KOORDINÁTA RENDSZEREK AZ ELLIPSZOIDON

9.1 FÖLDRAJZI KOORDINÁTA RENDSZER

Az ellipszoidi földrajzi szélesség (Φ), földrajzi hosszúság (Λ) és az azimut definíciója megegyezik a gömbre adottakkal, csak az ellipszoidnál nagy betűvel jelöljük. A felületi pont normálisa azonban csak az egyenlítőn és a pólusokban megy át az ellipszoid középpontján.

Ellipszoidi földrajzi szélesség: Φ az a szög, amelyet a ponton átmenő normális az egyenlítő síkjával bezár, Φ : $\pm 0 - 90^\circ$, É-ra pozitív, D-re negatív.

Ellipszoidi földrajzi hosszúság: Λ a ponton átmenő meridián és a választott kezdőmeridián által bezárt szög, Λ : $\pm 0 - 180^\circ$, K-re pozitív, nyugatra negatív.

Pólustávolság: földrajzi szélesség pótszöge $B = 90^\circ - \Phi$.

9.2 FELÜLETI DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA RENDSZER

Ua., mint a Gömbi felületi derékszögű koordináta rendszer. Nevezik felületi ortogonális rendszernek is. Az ellipszoidi Soldner-féle koordináta-rendszer esetében ellipszoidi geodéziai vonalat bocsátunk merőlegesen a kezdőmeridiánra. A két vonal metszéspontja az A pont kezdőmeridiánon levő talppontja (T). Az A pont Soldner-féle koordinátái:

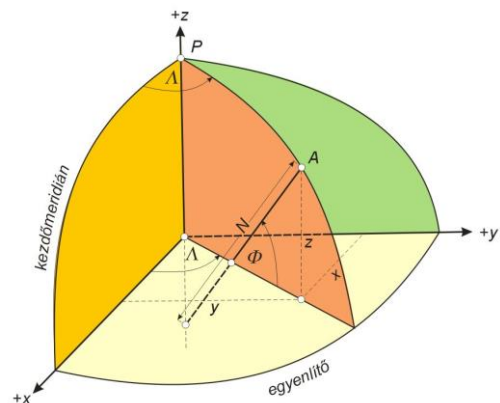
x = a kezdőmeridián K és T közötti ívdarabjának hossza,

y = az A és T közötti geodéziai vonaldarab hossza.

A földrajzi (Φ , Λ) és a Soldner-féle (x , y) koordináták között átszámítások végezhetők.

9.3 TÉRBELI DERÉKSZÖGŰ KOORDINÁTA-RENDSZER

- z tengely: az ellipszoid kistengelye
- x tengely: az egyenlítő és a kezdőmeridián síkjának metszévonal
- y tengely: az egyenlítő síkjában az kezdőmeridián síkjára merőlegesen a középponton keresztül



Valamely A felületi pont paraméteres egyenletei $A(x, y, z) \rightarrow A(\Phi, \Lambda)$:

$$x = N \cos \Phi \cos \Lambda \quad (1)$$

$$y = N \cos \Phi \sin \Lambda \quad (2)$$

$$z = \frac{b^2}{a^2} N \sin \Phi = N (1 - \varepsilon^2) \sin \Phi \quad (3)$$

Visszafelé az inverz képletek levezetése: $A(\Phi, \Lambda) \rightarrow A(x, y, z)$

A síkkoordináták ismeretében a földrajzi hosszúság egyszerűen számítható: $\tan \Lambda = \frac{y}{x}$

A földrajzi szélesség inverz képletének levezetéséhez:

$$x^2 + y^2 = N^2 \cos^2 \Phi \quad (1)^2 + (2)^2$$

$$\frac{a^4}{b^4} z^2 = N^2 \sin^2 \Phi \quad (3)^2$$

A két egyenlet összeadása után meghatározható N, amit szükséges ismerni Φ kiszámításához:

$$x^2 + y^2 + \frac{a^4}{b^4} z^2 = N^2.$$

Majd az (1) és (2) egyenletekből: $\cos \Phi = \frac{x}{N \cos \Lambda}$ vagy $\cos \Phi = \frac{y}{N \sin \Lambda}$.

A Φ (3)-ból is meghatározható: $\sin \Phi = \frac{a^2 z}{b^2 N}$.

10 NÉHÁNY FÖLDI ELLIPSZOID ADATA

név	a [m]	f (lapultság)	
Bessel (1841)	6 377 397	1/299.15	
Hayford (1910)	6 378 388	1/297	*1. nemzetközi ellipszoid
Kraszovszkij (1940)	6 378 245	1/298.3	
IUGG/1967 (v. GRS-67)	6 378 160	1/298.247	*2. nemzetközi ellipszoid
WGS-84 (1984)	6 378 137	1/298.257	