

Egészségügyi mérnökképzés

MECHANIKA

I. rész: Szilárd testek mechanikája

készítette: Németh Róbert

Végeselem-módszer

- Geometriai és anyagegyenlet

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\bar{\mathbf{L}}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} = \mathbf{0}$$

- Egyensúly: potenciális energia áll.értékűsége

$$\Pi(\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}) = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \right) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \right) dV = \text{stac.}$$

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_V \left(\frac{1}{2} (\mathbf{L} \mathbf{u})^T \mathbf{D} \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{p}^T \mathbf{u} \right) dV = \text{stac.}$$

Végeselem-módszer

- Függvénytér finitizálása

$$\mathbf{u}(x, y, z) = \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{v}$$

- $\mathbf{L}u(x, y, z) = \mathbf{L} \mathbf{N}(x, y, z) \mathbf{v} = \mathbf{B}(x, y, z) \mathbf{v}$

- $\Pi(\mathbf{v}) = \int_V \left(\frac{1}{2} \mathbf{v}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{p}^T \mathbf{N} \mathbf{v} \right) dV = \text{stac.}$

- Egyensúly: potenciális energia áll.értékűsége

$$\frac{\partial \Pi(\mathbf{v})}{\partial v_i} = \int_V \left(\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{v} - \mathbf{p}^T \mathbf{N} \right) dV = 0$$

$$\mathbf{K} \mathbf{v} - \mathbf{q} = 0 \rightarrow \mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{q}$$

Geometriai finitizálás

- Véges méretű elemek (csomópontok)

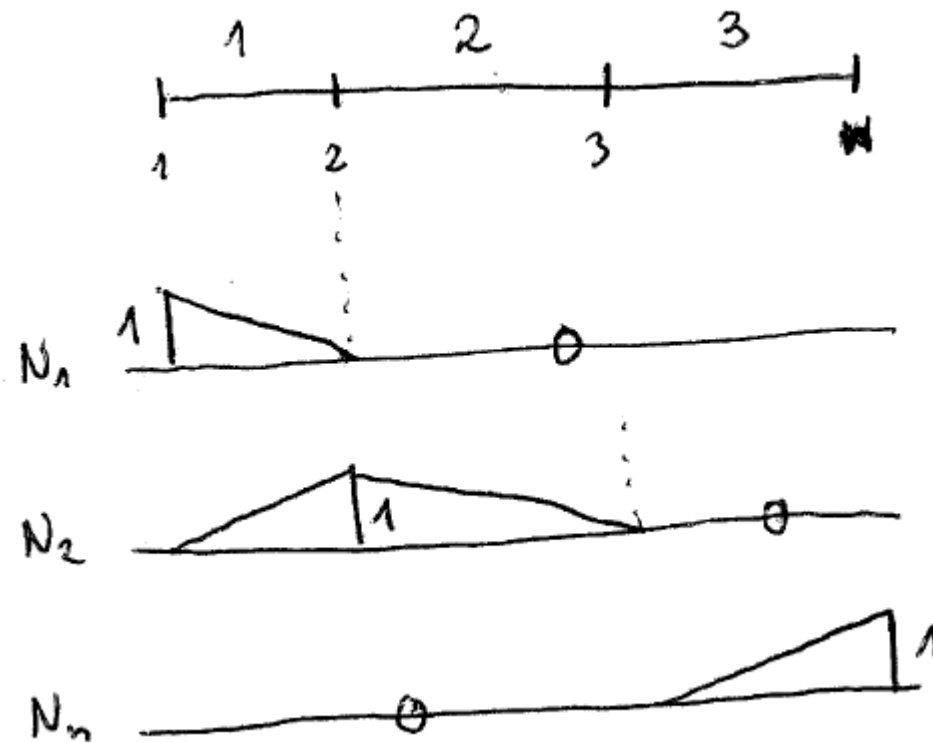
$$V = \sum_{i=1}^n V_i$$

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = \sum_{i=1}^n \mathbf{K}_i$$

- **N** bázisfüggvények felvétele:
 - Legtöbb elemén 0
 - Ha nem 0, akkor 1 csp.-ban 1, a többiben 0
 - Folytonosság ($C^{(0)}$, $C^{(1)}$)
 - Következmény: v_i fizikai jelentése

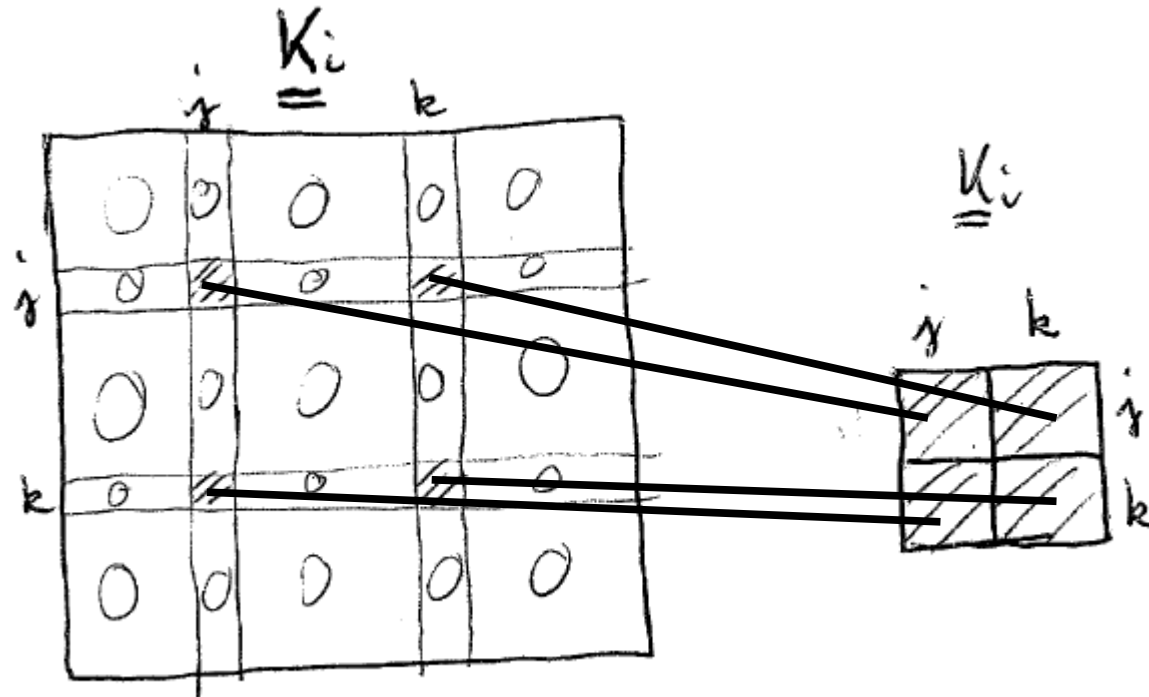
Geometriai finitizálás - példa

- Rúd felbontása és néhány bázisfüggvénye



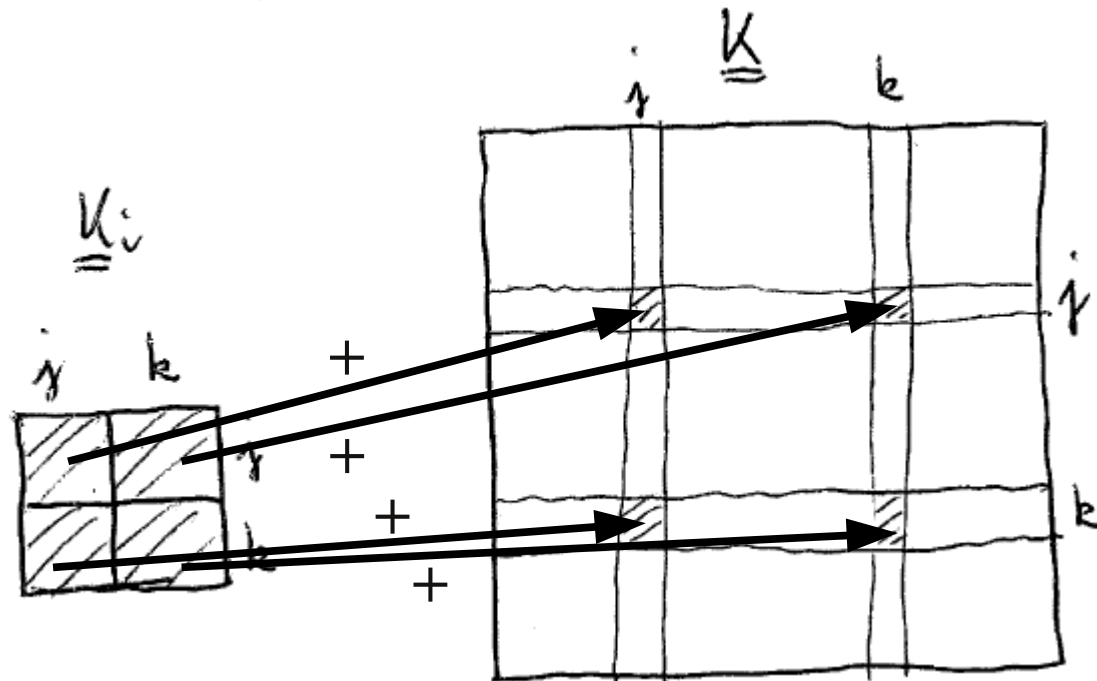
Bázisfüggvények

- **N** felvétele \rightarrow következmény
 - **K_i** -t csak olyan bázisfüggvények befolyásolják, melyek csomópontja az i -edik elemen van



Merevségi mátrix

- \mathbf{K} számításához elemenként számoljuk \mathbf{K}_i -t, majd a szerkezet merevségi mátrixához adjuk hozzá az elem merevségi mátrixát. (kompilálás)



- Tehervektort hasonló módon, elemenként kompiláljuk

Megoldás

- $\mathbf{K} \mathbf{v} = \mathbf{q}$ megoldása: $\mathbf{v} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{q}$
- Majd a másodlagos mennyiségek (alakváltozások, feszültségek)
- Rudak, tárcsák, lemezek héjak esetén a térfogat mentén való integrálást részben előre elvégezzük, így más lesz az elmozdulás, alakváltozás, \mathbf{L} operátor-mátrix, anyagi merevségi mátrix stb. Csak a fő lépések maradnak.