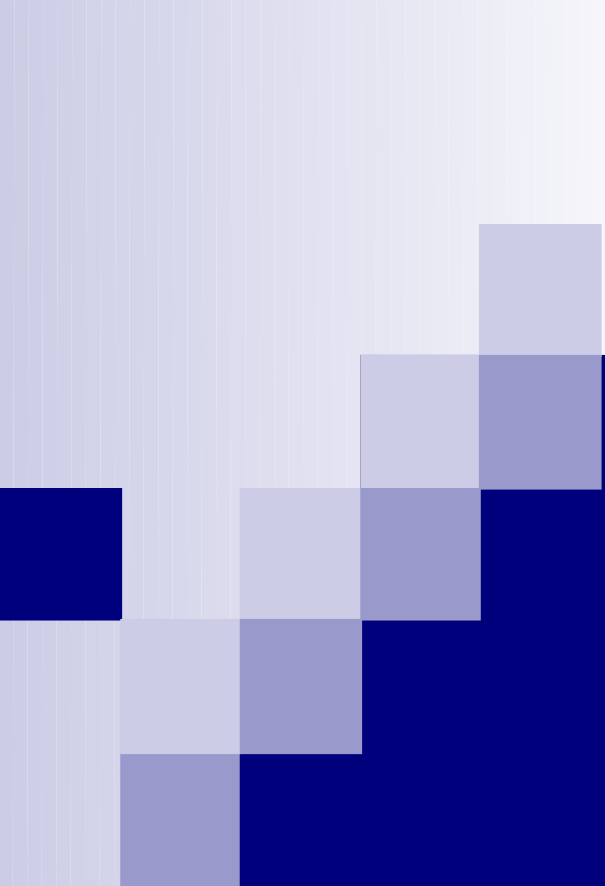




Korszerű matematikai módszerek a geodéziában

Bevezetés

2019.09.09.



Célok

- Érthető, példákon keresztül bemutatott, alkalmazott matematika
- A konkrét tananyag mindig a doktoranduszok igényeinek megfelelően alakul ki



Állandó témák

- mátrixok SVD felbontása (1)
- Kálmán-szűrés (2)
- RANSAC becslés (1)
- Fourier transzformáció (1)
- Wavelet transzformáció (2)
- Digitális szűrők (1)
- PSD becslési módszerek (1)

Korábban tárgyalt témák

- Krigelés
- Leggyakoribb érték módszere
- Neurális hálózatok
- Bayesi statisztika
- kvaterniók
- nagyméretű lineáris egyenletrendszerek megoldása
- szalagmátrixok, Wiener-Levinson dekonvolúció
- általánosított interpoláció, spline interpoláció
- pontfelhő felületi normálisainak meghatározása

További lehetséges témák

- Implicit Kálmán-szűrés
- sztochasztikus mátrixok, Markov-láncok
- Markov lánc Monte Carlo módszerek (MCMC)
- gráfok vágása, térparticionáló fák, algoritmusok
- Bayes-féle inverzió
- ...



Számítógépes eszközök

- Mátrix alapú rendszerek: Matlab, Octave, EMT
- Algebrai rendszerek: Maple, Mathematica, Maxima, Sage
- Általános célú nyelvek: Fortran, C, C++, Java, Python (Numpy/Scipy)

Pricing and Licensing

Search MathWorks.com

 Contact sales  Request quote Standard Education Home Student

Individual

Select this license if you are an end user and you want to operate, install, and administer the software yourself. Your organization can also designate an administrator to manage a group of Individual licenses for the convenience of centralized administration.

This license option allows installation on the following platforms: Windows, Linux, and Macintosh.

[» Learn more](#)

Network Named User

Concurrent

MATLAB

☒ EUR 2.000 
Perpetual license☐ EUR 800 
Annual license[Buy now](#)[—View another product—](#)

Price applies for purchase and use in Hungary. For pricing in other regions [contact sales](#). Pricing excludes TAX/VAT.

2000 Euros =

658 552.358 Hungarian forints

Academic license, BME

Industry

Mathematica licensing for professional and personal use.

2545 British pounds =

922 571.937 Hungarian forints

- Individuals
- Groups & Organizations

Already a customer? [Renew service](#) or [upgrade](#).

Standard Cloud	Standard Desktop	MOST POPULAR Standard Desktop/Cloud
 Mathematica Online ■ Upgrades ■ Standard support	 Mathematica Desktop 1 year of Premier Service ■ Upgrades ■ Standard support ■ Personal-use license	  Mathematica Desktop 1 year of Premier Service Plus ■ Mathematica Online ■ Upgrades ■ Standard support ■ Personal-use license
	£2,310 excl. VAT Buy Now	£2,545 excl. VAT Buy Now

Alternative licensing plans:		
£1,155/year Subscribe or £120 billed monthly	£1,155_{excl. VAT}/year Subscribe	£1,275_{excl. VAT}/year Subscribe

Enterprise



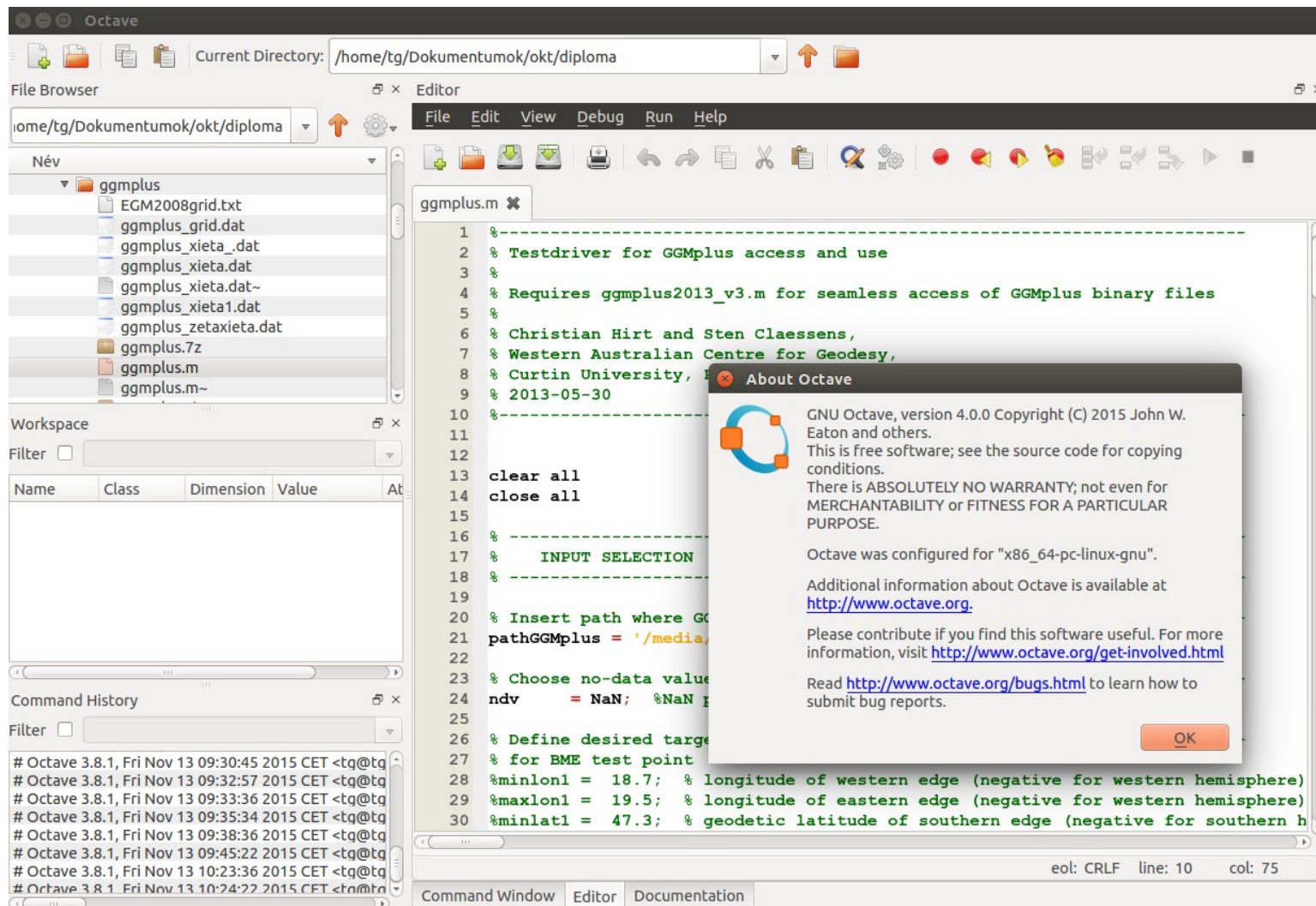
Mathematica | Desktop
1 year of Enterprise Premier Service Plus

- **Mathematica | Online**
- Upgrades
- 24/7 Enterprise support
- Personal-use license
- Enterprise-level development

£6,470
excl. VAT

Buy Now

Octave ≥ 4.0 – grafikus felület



EMT – Euler Math Toolbox

```
File Recent Edit Extras Options Snippets User Menu Help
>(49-45.6)/0.1|(22.9-16)/0.1, 35*70
[34, 69]
2450

>N=flipy(redim(geoid(:,3),35,70));
>..

kirajzoltatom

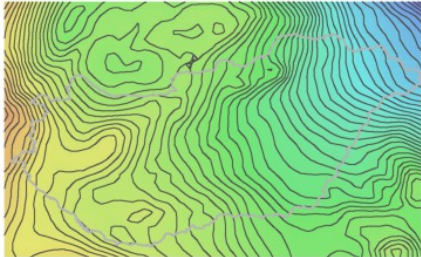
>aspect(1.5); huecolor(0); linewidth(1); color(1); density(N); hold on; contour(N,37
>load plothun

Plot Hungarian border
-----

The following functions are available:

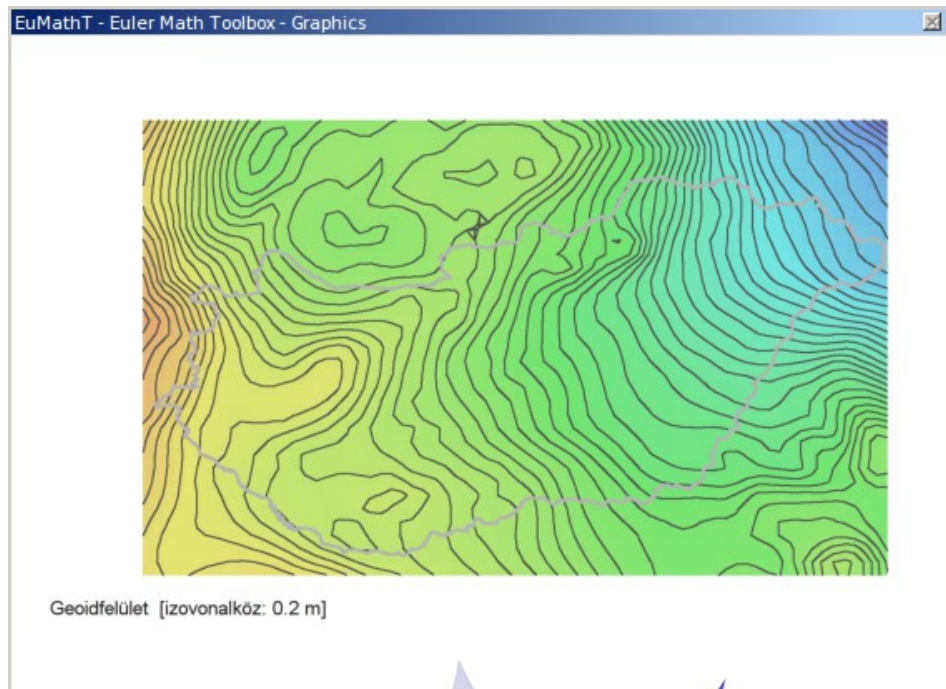
plothun - plot Hungarian border

>linewidth(2); color(7); plothun([16,22.9,45.6,49]); hold off;
>linewidth(1); color(1);
>label("Geoidfelület [izovonalköz: 0.2 m]", 15,45.5);
>insimg();
```



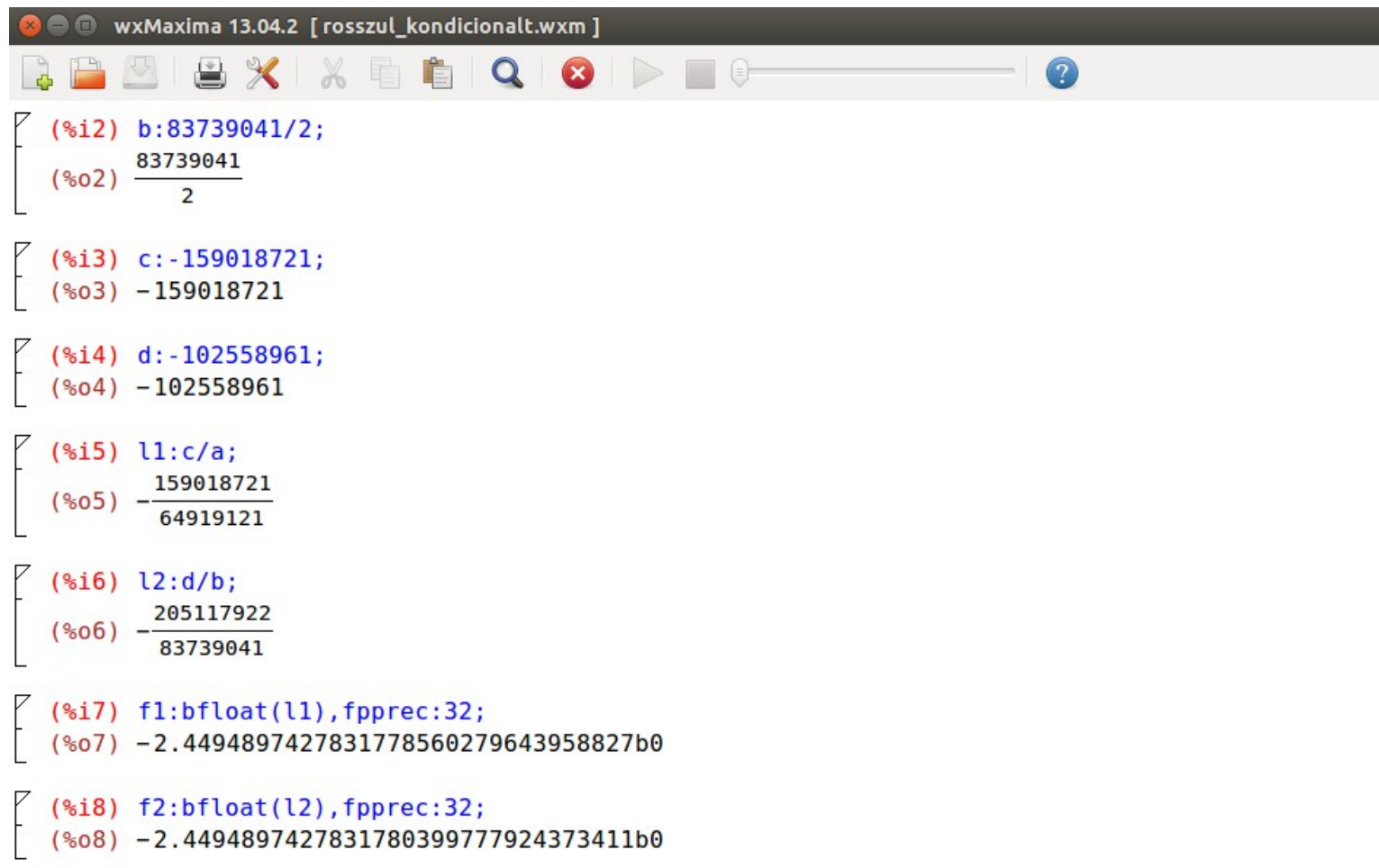
Geoidfelület [izovonalköz: 0.2 m]

```
SVD felbontást számítok
>[U,w,V]=svd(N);
Jól látszik, hogy csökkenő sajátértékek szerint van rendezve
>w[1:10]
[2137.49, 30.1655, 12.7873, 4.23156, 3.37888, 2.95186, 1.90148,
1.25895, 0.966045, 0.879069]
>writematrix(w, "w.txt");
>writematrix(log10(w+1e-300), "log10w.txt");
```



Euler Math Toolbox is constantly updated and in active development. The current version is is "Version 2019-08-21".

Maxima



The screenshot shows the wxMaxima 13.04.2 window with the file 'rosszul_kondicionalt.wxm' open. The interface includes a toolbar with icons for file operations, editing, and execution. The command history and output are as follows:

```
(%i2) b:83739041/2;  
(%o2) 
$$\frac{83739041}{2}$$
  
  
(%i3) c:-159018721;  
(%o3) -159018721  
  
(%i4) d:-102558961;  
(%o4) -102558961  
  
(%i5) l1:c/a;  
(%o5) 
$$-\frac{159018721}{64919121}$$
  
  
(%i6) l2:d/b;  
(%o6) 
$$-\frac{205117922}{83739041}$$
  
  
(%i7) f1:bfloat(l1),fpprec:32;  
(%o7) -2.4494897427831778560279643958827b0  
  
(%i8) f2:bfloat(l2),fpprec:32;  
(%o8) -2.4494897427831780399777924373411b0
```

Mathics

Mathics

Save Load

Documentation

Search

```
x [ f[x_] := 4 x / (x ^ 2 + 3 x + 5)
{f'[x], f''[x], f'''[x]} // Together

$$\left\{ -\frac{4(-5+x^2)}{(5+3x+x^2)^2}, \frac{8(-15-15x+x^3)}{(5+3x+x^2)^3}, -\frac{24(-20-60x-30x^2+x^4)}{(5+3x+x^2)^4} \right\}$$

```

Jan Pöschko's space

Coding, Math, Photography, and Life.

Search

Home Blog Projects Math About

I am a web developer at [Wolfram Research](#), photographer, and [traveller](#).

My mother tongues are German and JavaScript, but I also speak and write Python, C++, Ruby, the Wolfram Language, and many others, including some English and Swedish. Learn more about [my projects](#) and me on this site.



[Overview](#) / [Manual](#) / [Examples](#) /

[→ Linear algebra](#)

Curve sketching

Let's sketch the function

```
[ f[x_] := 4 x / (x ^ 2 + 3 x + 5)
```

The derivatives are

```
{f'[x], f''[x], f'''[x]} // Together

$$\left\{ -\frac{4(-5+x^2)}{(5+3x+x^2)^2}, \frac{8(-15-15x+x^3)}{(5+3x+x^2)^3}, -\frac{24(-20-60x-30x^2+x^4)}{(5+3x+x^2)^4} \right\}$$

```

To get the extreme values of f, compute the zeroes of the first derivatives:

```
extremes = Solve[f'[x] == 0, x]
{{x -> -Sqrt[5]}, {x -> Sqrt[5]}}
```

And test the second derivative:

```
f''[x] /. extremes // N
{1.65085581947099374, -0.0640789599668615036}
```

Thus, there is a local maximum at $x = \text{Sqrt}[5]$ and a local minimum at $x = -\text{Sqrt}[5]$. Compute the inflection points numerically, chopping imaginary parts close to 0:

```
inflections = Solve[f''[x] == 0, x] // N // Chop
{{x -> -1.08519961543710476}, {x -> -3.21462740739519024},
{x -> 4.299827022832295}}
```

Insert into the third derivative:

```
f'''[x] /. inflections
{-3.67683091753987803, 0.694905362720454084, 0.0067189432491760176}
```

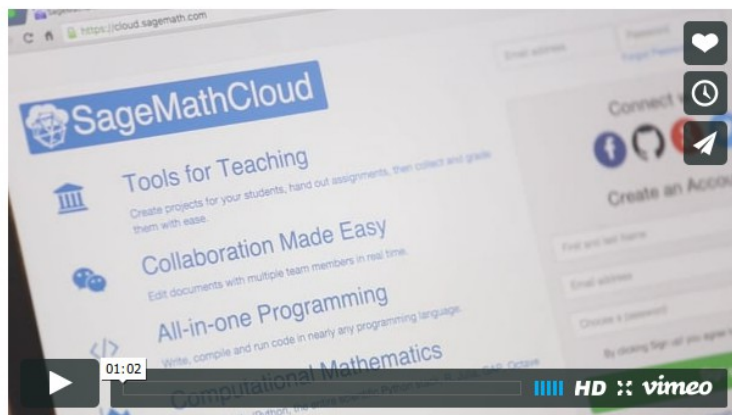
Being different from 0, all three points are actual inflection points. f is not defined where its denominator is 0:

```
Solve[Denominator[f[x]] == 0, x]
{{x -> -3/2 - I/2 Sqrt[11]}, {x -> -3/2 + I/2 Sqrt[11]}}
```

These are non-real numbers, consequently f is defined on all real numbers. The behaviour of f at the boundaries of its definition:

```
Limit[f[x], x -> Infinity]
0
```


Sage



Email address Password [Sign In](#)

[Forgot Password?](#)

Connect with

Create an Account

First and last Name

Email address

Choose a password

By clicking Sign up! you agree to our [Terms of Service](#).

[Sign up!](#)

Email help@sagemath.com if you need help.



Tools for Teaching

Create projects for your students, hand out assignments, then collect and grade them with ease.



Collaboration Made Easy

Edit documents with multiple team members in real time.



All-in-one Programming

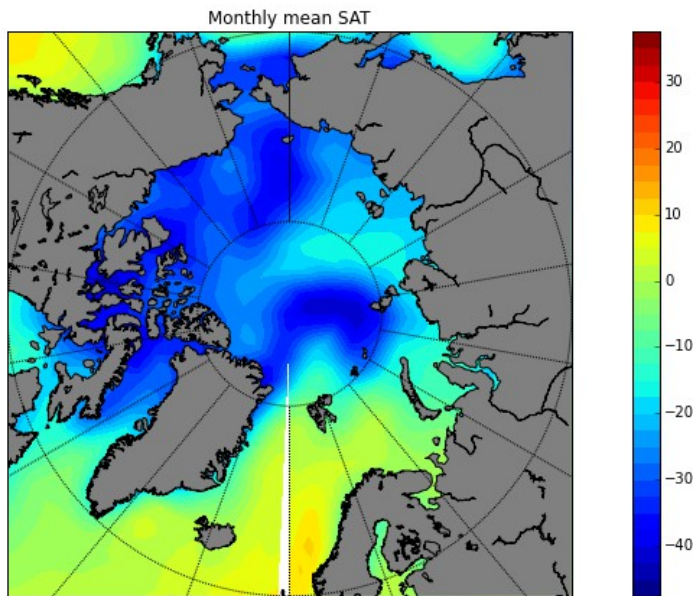
Write, compile and run code in nearly any programming language.

Python (Jupyter=IPython3 munkafüzet)

We can make the map look prettier by adding couple of lines:

```
In [20]: fig = plt.figure(figsize=(15,7))
m.fillcontinents(color='gray',lake_color='gray')
m.drawcoastlines()
m.drawparallels(np.arange(-80.,81.,20.))
m.drawmeridians(np.arange(-180.,181.,20.))
m.drawmapboundary(fill_color='white')
m.contourf(x,y,air_c[0,:],40)
plt.title('Monthly mean SAT')
plt.colorbar()
```

Out[20]: <matplotlib.colorbar.Colorbar instance at 0x10e0b1098>

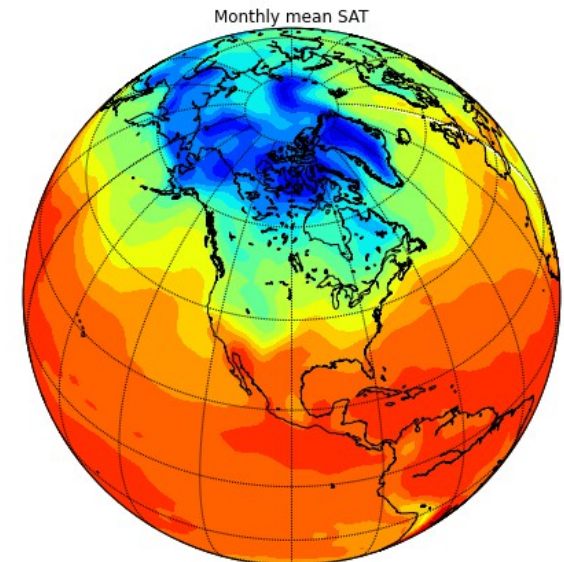


You can change map characteristics by changin the Basemap instance:

```
In [21]: m = Basemap(projection='ortho',lat_0=45,lon_0=-100,resolution='l')
x, y = m(lon2, lat2)
```

```
In [22]: fig = plt.figure(figsize=(15,7))
#m.fillcontinents(color='gray',lake_color='gray')
m.drawcoastlines()
m.drawparallels(np.arange(-80.,81.,20.))
m.drawmeridians(np.arange(-180.,181.,20.))
m.drawmapboundary(fill_color='white')
cs = m.contourf(x,y,air_c[0,:],20)
plt.title('Monthly mean SAT')
```

Out[22]: <matplotlib.text.Text at 0x1116bd210>



Nem interaktív Jupyter munkafüzet

nbviewer.jupyter.org



JUPYTER

FAQ



Korszeru_matek / SVD.ipynb

Szinguláris érték felbontás

(SVD, Singular Value Decomposition)

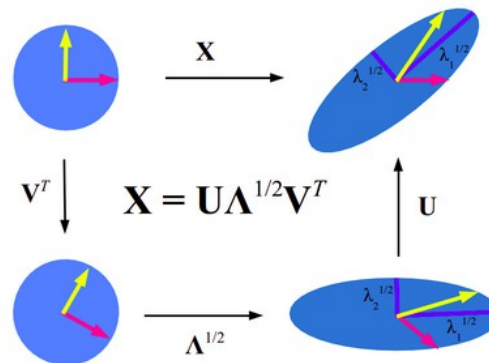
Az [SVD](#) a sajátérték-sajátvektor felbontás általánosítása téglalap alakú mátrixokra. Az SVD az $\mathbf{X}$ ($n \times m$)-es transzformáló mátrix hatását három jól érthető részre bontja:

- forgatás ($\mathbf{V}^T$)
- skálázás ($\mathbf{\Lambda}^{1/2}$)
- forgatás ($\mathbf{U}^T$)

A mátrix SVD felbontása:

$$\mathbf{X} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}^{1/2}\mathbf{V}^T$$

ábrán személtetve:



Interaktív Jupyter munkafüzet



Turn a Git repo into a collection of interactive notebooks

Have a repository full of Jupyter notebooks? With Binder, open those notebooks in an executable environment, making your code immediately reproducible by anyone, anywhere.

Build and launch a repository

GitHub repository name or URL

GitHub ▾

Git branch, tag, or commit

Path to a notebook file (optional)

File ▾

launch

Copy the URL below and share your Binder with others:

Fill in the fields to see a URL for sharing your Binder.



Copy the text below, then paste into your README to show a binder badge:



Elkészült interaktív munkafüzet megnyitása

 [SVD.ipynb](#)

Kijelölt kódcella futtatása: Ctrl+Enter

Megoldás (Python)

```
In [1]: import numpy as np
        from numpy import linalg as LA
        X = np.array([[1,2],[2,1],[1,3]])
        # X'.X sajátérték felbontása
        e,V = LA.eig(np.dot(X.T,X))
        Lam = np.sqrt(np.diag(e))
        # szinguláris értékek
        np.diag(Lam)
        U = np.dot(X,V)/np.sqrt(e)
        # ez az eredeti X mátrix:
        np.dot(U,np.dot(Lam,V.T))
```

```
Out[1]: array([[ 1.,  2.],
               [ 2.,  1.],
               [ 1.,  3.]])
```

Szöveg, képek, egyenletek szerkesztése: Markdown / LaTeX szintaktika

Kijelölt cella futtatása: Ctrl+Enter

A súlyozott legkisebb négyzetek problémájának megoldása SVD-vel

Most minimalizáljuk a következő hiba normát:

$$\| \mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y} \|^T \mathbf{P} (\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{y})$$

A legkisebb négyzetes (LKN) megoldás $\mathbf{x}$ -re a $\mathbf{P}_0 \mathbf{A}$ mátrix SVD felbontásával ($\mathbf{P}_0 \mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$) számított pszeudoinverzszel kapható meg, ahol $\mathbf{P}_0$ a $\mathbf{P}$ mátrix négyzetgyöke, $\mathbf{P} = \mathbf{P}_0^T \mathbf{P}_0$:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}$$

- „Nemrégiben a hallgatók azt kérdezték tőlem, hogy milyen programozási nyelvet érdemes megtanulni az egyetem alatt vagy után. Erre a kérdésre nem igazán lehet válaszolni. Megtanulhat valaki egy konkrét nyelvet, de lehet, hogy az a nyelv pár év múlva háttérbe szorul vagy teljesen eltűnik. Azt válaszoltam, hogy **inkább tanulni, megérteni és átlátni kell megtanulni**, mert akkor nem lesz gond, ha jön egy új nyelv vagy egy új technológia.” (BME egyik oktatója, bitport.hu, 2015)