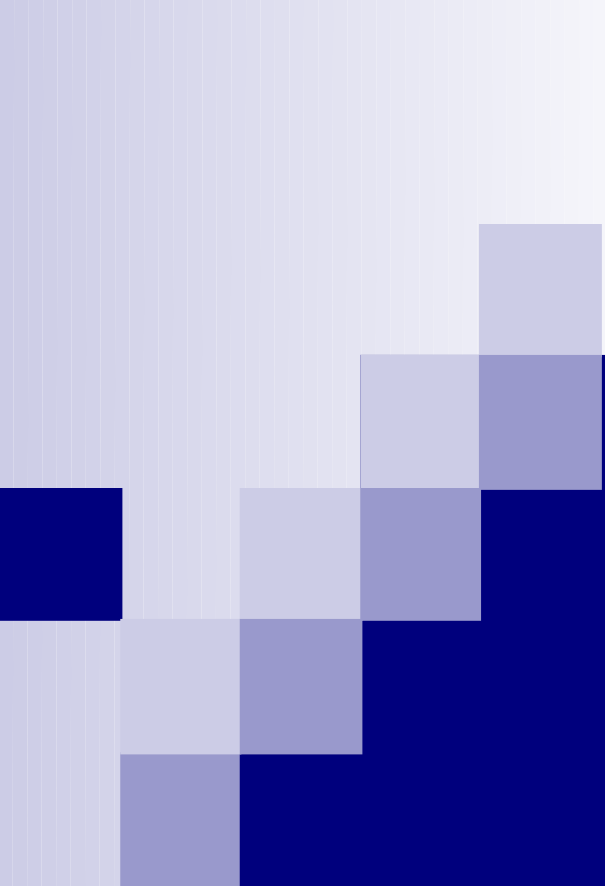


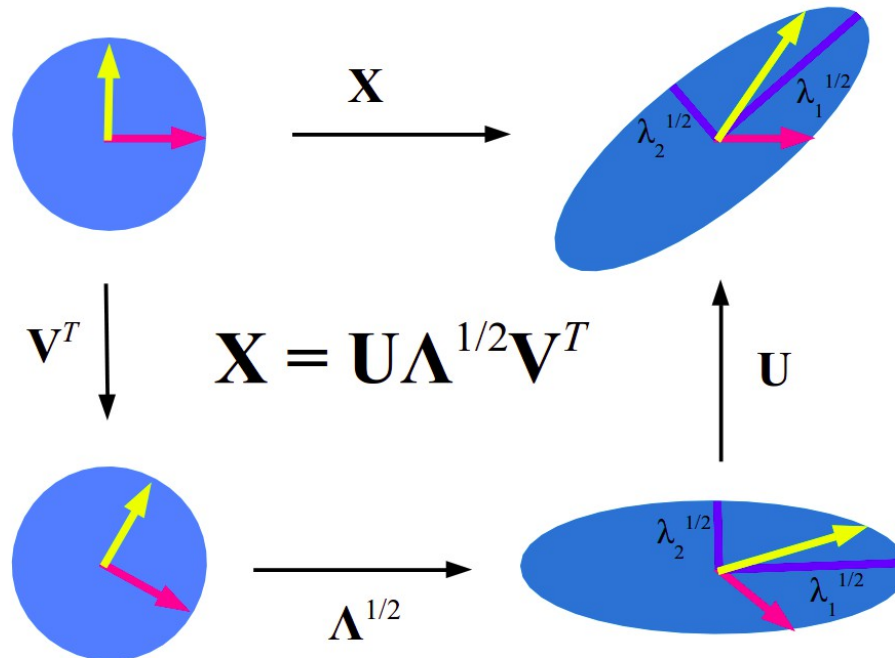


SVD felbontás

Korszerű matematikai
módszerek a geodéziában
2019.09.16.

Szinguláris érték felbontás (SVD, Singular Value Decomposition)

- a sajátérték-sajátvektor felbontás általánosítása téglalap alakú mátrixokra: forgatás ($\mathbf{V}^T$), skálázás ($\mathbf{\Lambda}^{1/2}$), forgatás ($\mathbf{U}$) műveletekre bontás



Kapcsolat sajátérték felbontással

- szimmetrikus $\mathbf{A}$ mátrix felbontható ortogonális $\mathbf{U}$ mátrixszal és a sajátértékekből álló átlós $\mathbf{\Lambda}$ mátrixszal

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T$$

- tetszőleges $\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$ mátrixból kétféleképpen is szimmetrikus mátrixot készíthetünk: $\mathbf{X}^T \mathbf{X}$ és $\mathbf{X} \mathbf{X}^T$
- a szimmetrikus mátrixok felbonthatók sajátértékek szerint

$$\mathbf{X}^T \mathbf{X} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda} \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^T \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{X} \mathbf{X}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda} \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{U}^T$$

SVD felbontás

- Bármely r rangú $\mathbf{X}$ mátrix felbontható ortogonális $\mathbf{U}$ és $\mathbf{V}$ mátrixokkal és a **szinguláris értékekből** álló átlós $\mathbf{\Lambda}^{1/2}$ mátrixszal

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Lambda}^{1/2} \mathbf{V}^T$$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \vdots & \sqrt{\lambda_r} \end{bmatrix}$$

SVD felbontás két változata

$$\begin{array}{ccccc} \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ n \times m \end{array} & = & \begin{array}{c} \mathbf{U} \\ n \times n \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{diagonal} \\ \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ \text{padding} \end{array} \\ n \times m \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{V}^T \\ m \times m \end{array} \\ & & \parallel & & \\ \begin{array}{c} \mathbf{X} \\ n \times m \end{array} & & \begin{array}{c} \mathbf{U} \\ n \times r \end{array} & \begin{array}{c} \begin{array}{c} \text{diagonal} \\ \mathbf{\Lambda}^{1/2} \\ \text{padding} \end{array} \\ r \times r \end{array} & \begin{array}{c} \mathbf{V}^T \\ r \times m \end{array} \end{array}$$

SVD tulajdonságai

- a kétfajta sajátvektor rendszer egymásból számítható

$$\mathbf{U}_m = \frac{1}{\sqrt{\lambda_m}} \mathbf{X} \mathbf{V}_m \quad m = 1, \dots, r$$

SVD tulajdonságai

- a legjobb k -ad rangú közelítése $\mathbf{X}$ -nek

$$\mathbf{X}_k = \sum_{m=1}^k \sqrt{\lambda_m} \mathbf{U}_m \mathbf{V}_m^T \quad k \leq r$$

- a közelítés négyzetes hibája

$$\mathcal{E}_k^2 = \sum_{m,n} |x(m,n) - x_k(m,n)|^2 \quad \mathcal{E}_k^2 = \sum_{m=k+1}^r \lambda_m$$

A mátrix sorfejtése, spektruma

- a k tagból álló sorfejtése $\mathbf{X}$ -nek

$$\mathbf{X}_k = \sum_{m=1}^k \sqrt{\lambda_m} \mathbf{U}_m \mathbf{V}_m^T \quad k \leq r$$

- a mátrix spektrumát a szinguláris értékek adják

$$\lambda_m \quad m = 1, \dots, r$$

Pszéudoinverz

- bármely téglalap alakú **X** mátrixra létezik

$$\mathbf{A}^+ = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T$$

$$\mathbf{\Lambda}^{1/2+}_{(m,m)} = \begin{bmatrix} \lambda_1^{-1/2} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \lambda_r^{-1/2} & \vdots & 0 \\ \vdots & & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & \ddots \end{bmatrix}$$

LKN probléma megoldása SVD-vel

- minimalizáljuk az alábbi hiba normát

$$\|\mathbf{Ax} - \mathbf{y}\|$$

- LKN megoldás $\mathbf{x}$ -re az $\mathbf{A}$ mátrix SVD felbontásával (pseudoinverz)

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$$

$\|\mathbf{x}\|_{\min}$ minimális normájú megoldás

Súlyozott LKN probléma megoldása SVD-vel

- minimalizáljuk az alábbi hiba normát

$$(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})^T \mathbf{P}(\mathbf{Ax} - \mathbf{y})$$

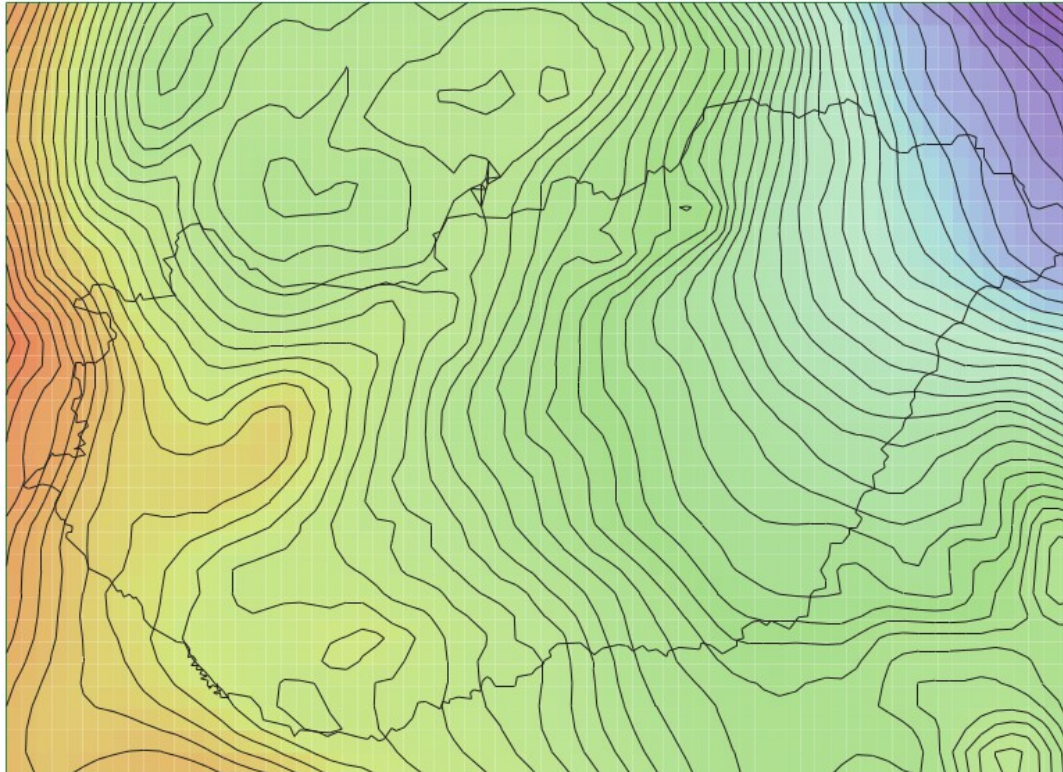
- LKN megoldás $\mathbf{x}$ -re a $\mathbf{P}_0 \mathbf{A}$ mátrix SVD felbontásával, $\mathbf{P}_0^T \mathbf{P}_0 = \mathbf{P}$

$$\mathbf{x} = (\mathbf{V}^T)^{-1} (\mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{\Lambda}^{1/2})^{-1} \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2 T} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{V} \mathbf{\Lambda}^{1/2+} \mathbf{U}^T \mathbf{P}_0 \mathbf{y}$$

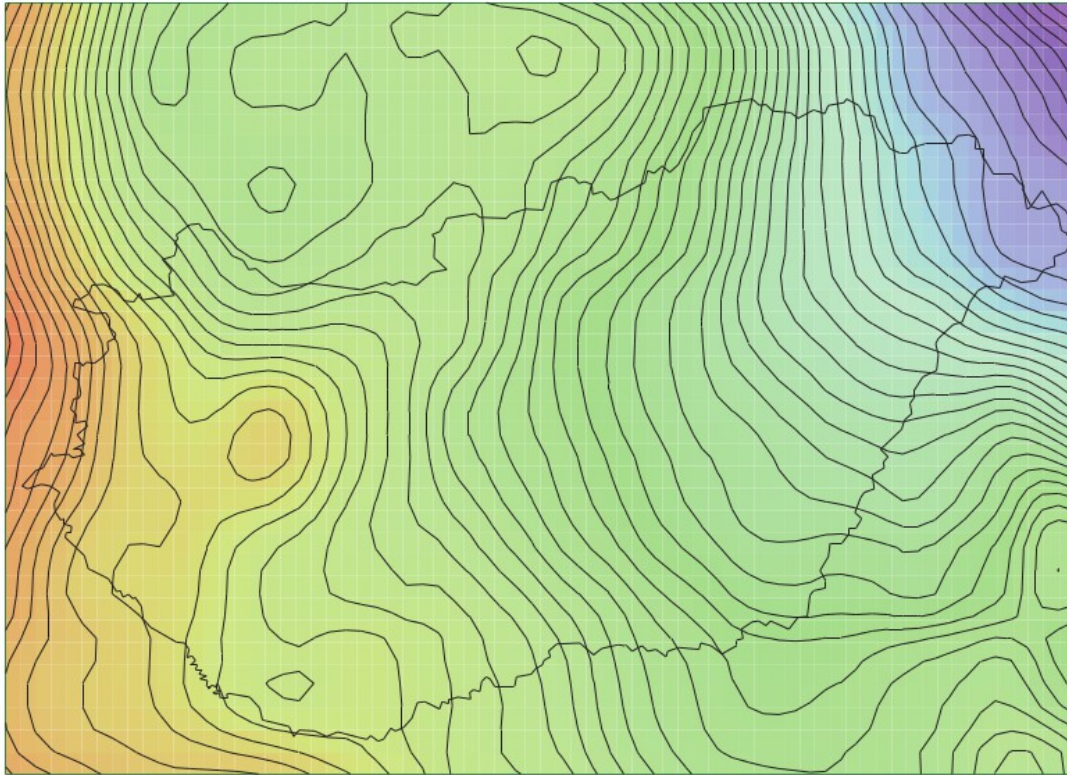
Mátrix approximáció SVD-vel

- a magyarországi geoidfelület SVD közelítése



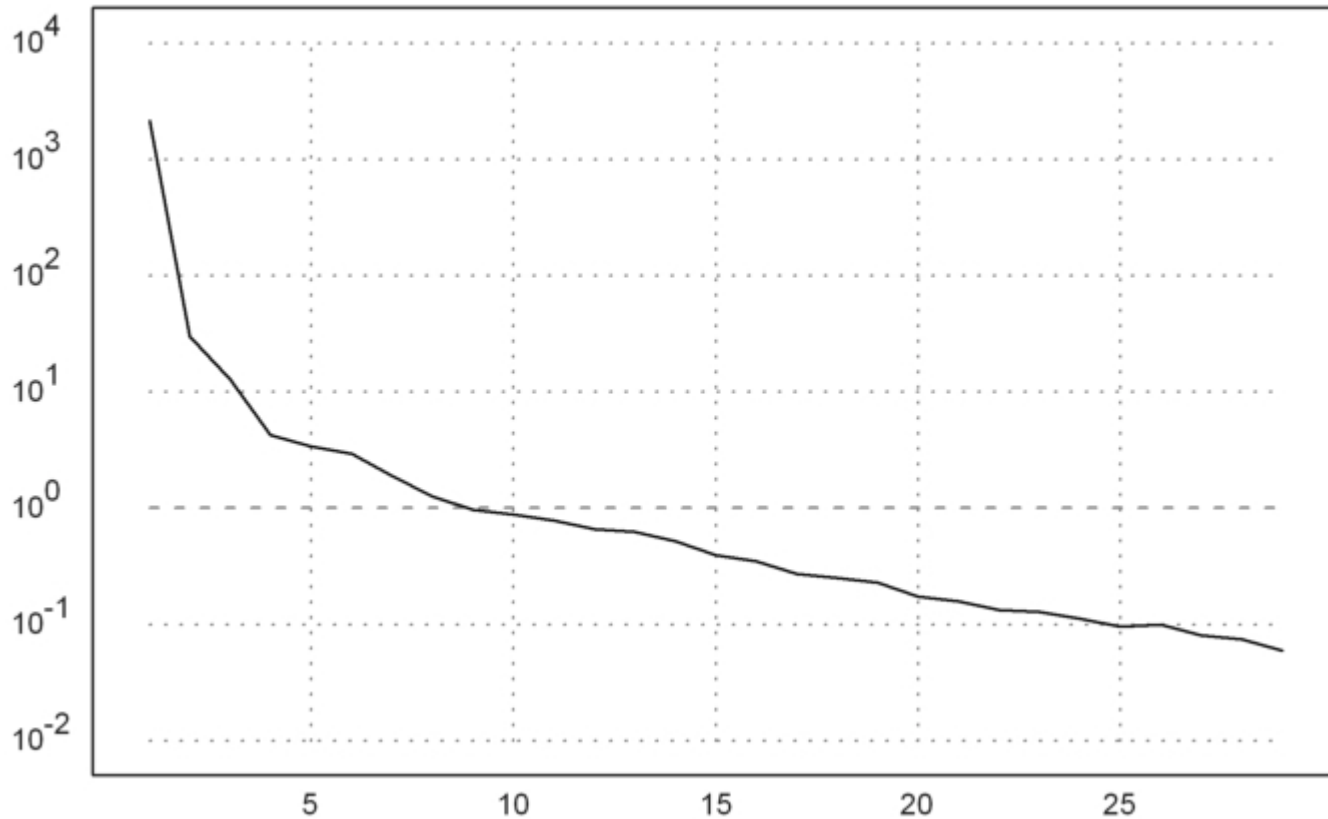
Mátrix approximáció SVD-vel

- 5-öd rangú közelítés



Mátrix approximáció SVD-vel

- szinguláris értékek logaritmikus ábrán



Főkomponens-analízis (PCA)

- SVD közeli „rokona”. Legyen a mérések mátrixa $\mathbf{X}$:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_m \end{bmatrix}$$

- Állítsuk elő $\mathbf{X}$ kovariancia mátrixát

$$\mathbf{C}_\mathbf{X} \equiv \frac{1}{n} \mathbf{X} \mathbf{X}^T$$

Főkomponens-analízis (PCA)

■ Legyen az új $\mathbf{Y}$ mátrix: $\mathbf{Y} \equiv \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}^T$

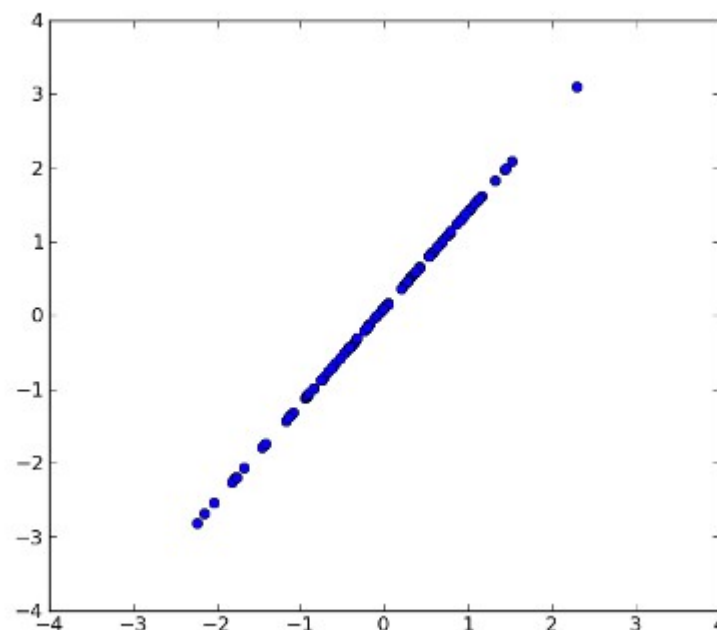
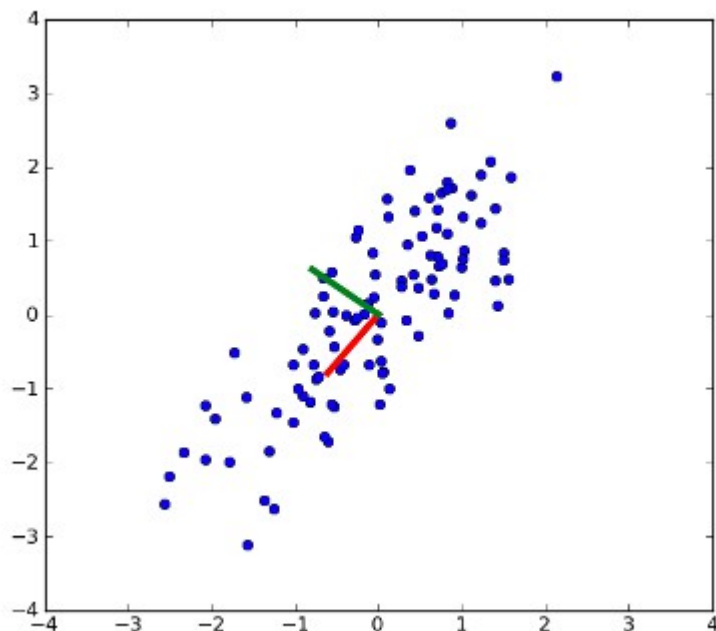
■ Ekkor
$$\begin{aligned}\mathbf{Y}^T\mathbf{Y} &= \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}^T\right)^T \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}^T\right) \\ &= \frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^T \\ \mathbf{Y}^T\mathbf{Y} &= \mathbf{C}_\mathbf{X}\end{aligned}$$

■ Állítsuk elő $\mathbf{Y}$ SVD felbontását:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T$$

Főkomponens-analízis (PCA)

- A $\mathbf{V}$ mátrix oszlopai tartalmazzák a $\mathbf{C}_x$ főkomponenseit



Arcfelismerés PCA-val

- dimenziócsökkentő módszer: arcok leírása a főkomponensekkel (bázisfüggvények a sajátarcok: eigenfaces)

The Face Machine

This applet is a demonstration program that illustrates how new faces can be created using Eigenfaces. Move the sliders around to see new faces.

