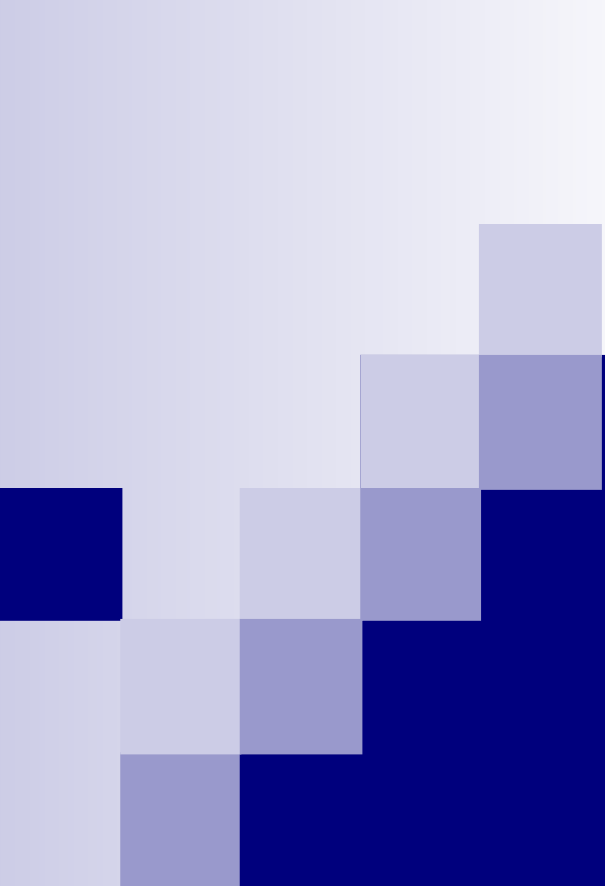




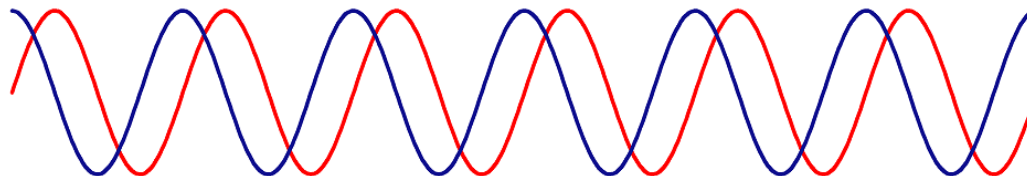
Waveletek 1.

Korszerű matematikai
módszerek a geodéziában
2019.10.21.

A wavelet transzformáció (WT)

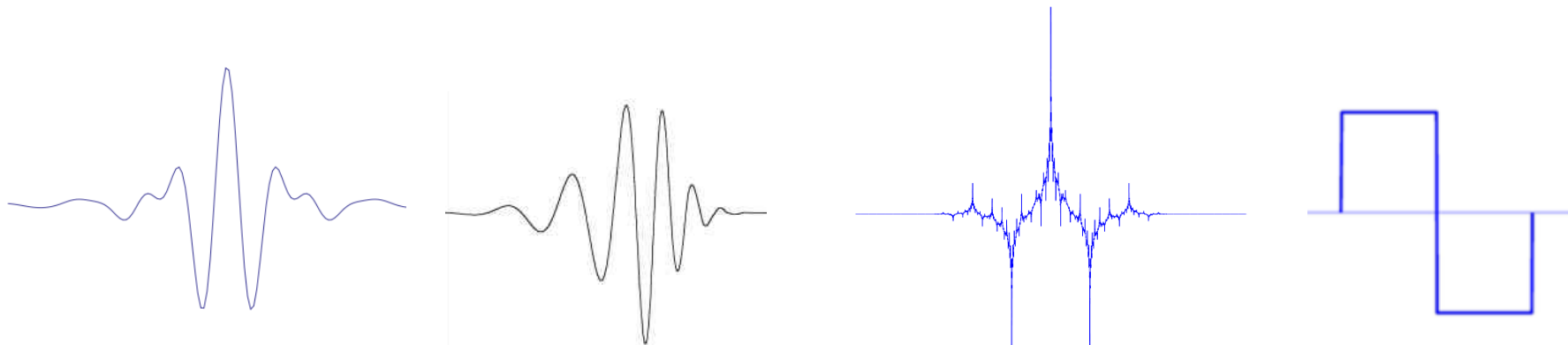
■ Fourier transzformáció (FT)

- a jel elemzését $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t) = \exp(-i\omega t)$ nem korlátozott tartományban oszcilláló függvényekkel végezzük el



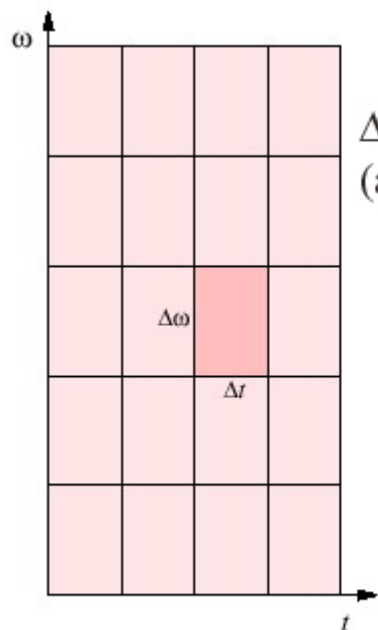
■ Wavelet transzformáció (WT)

- a jel elemzését időben (vagy térben) korlátozott tartományban hullámzást mutató waveletekkel végezzük (a wavelet szó jelentése: hullámocska, kis hullám)



Ablakozott Fourier analízis (STFT) és WT

- STFT: Gábor Dénes (1946) javaslata (Gábor-transzformált, ha Gauss-görbe az ablak)
 - **állandó** szélességű ablakot csúsztatunk végig az adatsoron
- WT:
 - az ablak szélessége a frekvenciával fordított arányban **változik**

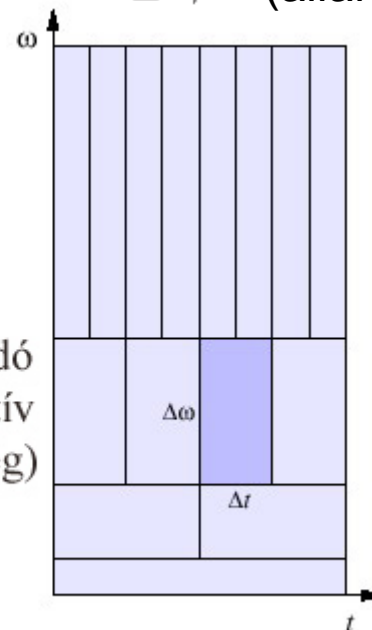


ablakozott Fourier

$\Delta\omega = \text{állandó}$
(állandó sávszélesség)

$\Delta\omega/\omega = \text{állandó}$
(állandó relatív sávszélesség)

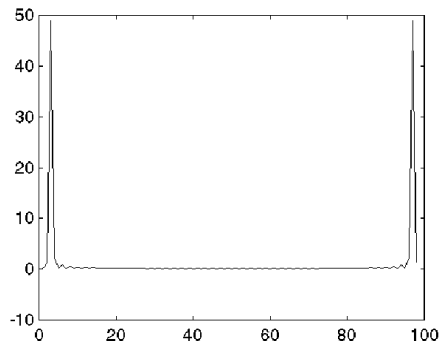
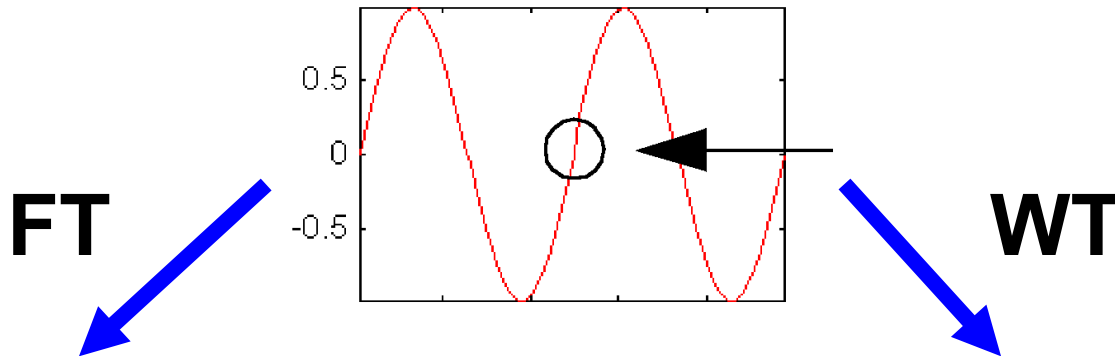
$$\Delta t \cdot \Delta\omega \geq 1/2 \quad (\text{állandó})$$



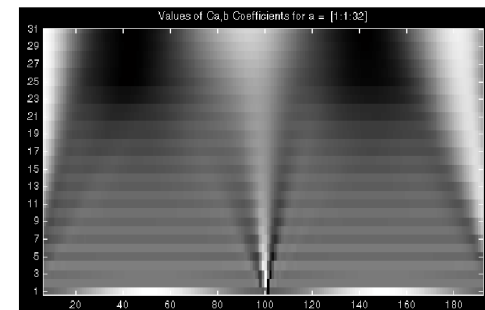
wavelet

Jel lokális elemzése (WT)

- kis 'szakadás' vagy ugrás van a szinuszos jelben (tranzienst)



nem detektálható



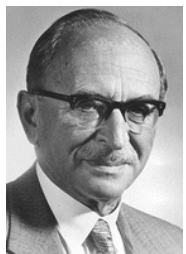
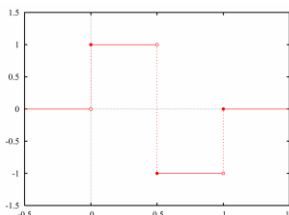
jól detektálható

A WT rövid története



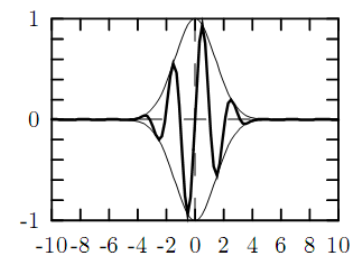
Haar Alfréd

Haar wavelet (1909)



Gábor Dénes

Ablakozott (Short-Time) Fourier Transzformáció, STFT (1946)



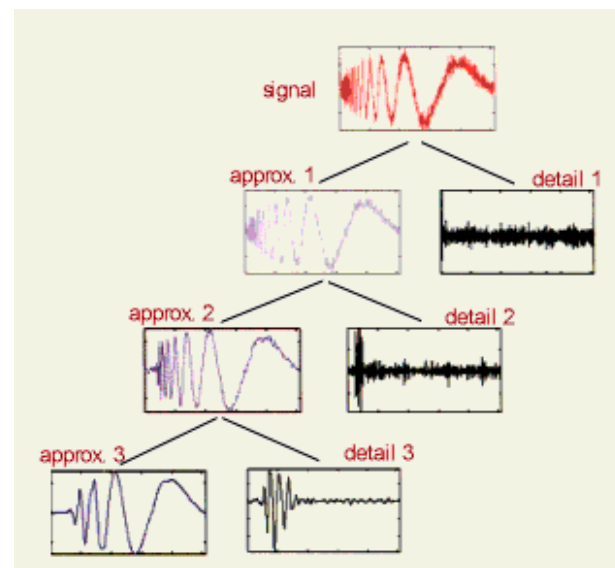
Jean Morlet

Folytonos wavelet transzformáció, CWT (1984)



Stephane Mallat, Yves Meyer

Diszkrét wavelet transzformáció, DWT
Ortogonalis waveletek,
Sokskálás analízis, MRA (1988)



A WT főbb alkalmazási területei

- adattömörítés, kódolás
 - kép- és video tömörítés (JPEG 2000)
 - operátor tömörítés (Lineáris egyenletrendszer átalakítása ritkán kitöltött mátrixú egyenletrendszerre)
- időben változó tulajdonságú jelek analízise
 - szűrés, zajszűrés
 - tranziensek detektálása
 - idősor elemzés
- Fraktálok, káosz, turbulencia modellezése

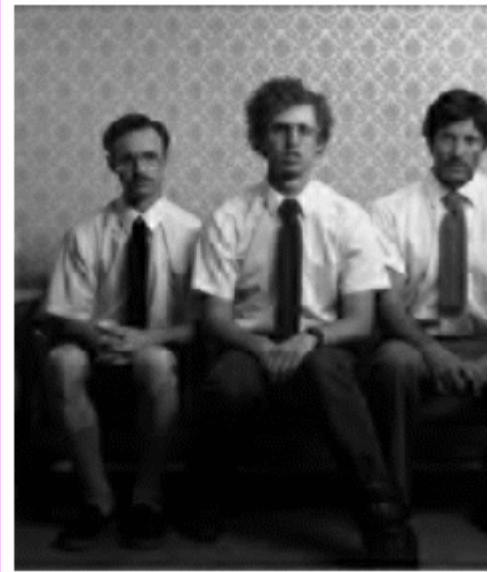
JPEG2000 veszteséges képtömörítés



eredeti kép



wavelet transzformált



rekonstruált kép

a tárigény 236%-al csökkent

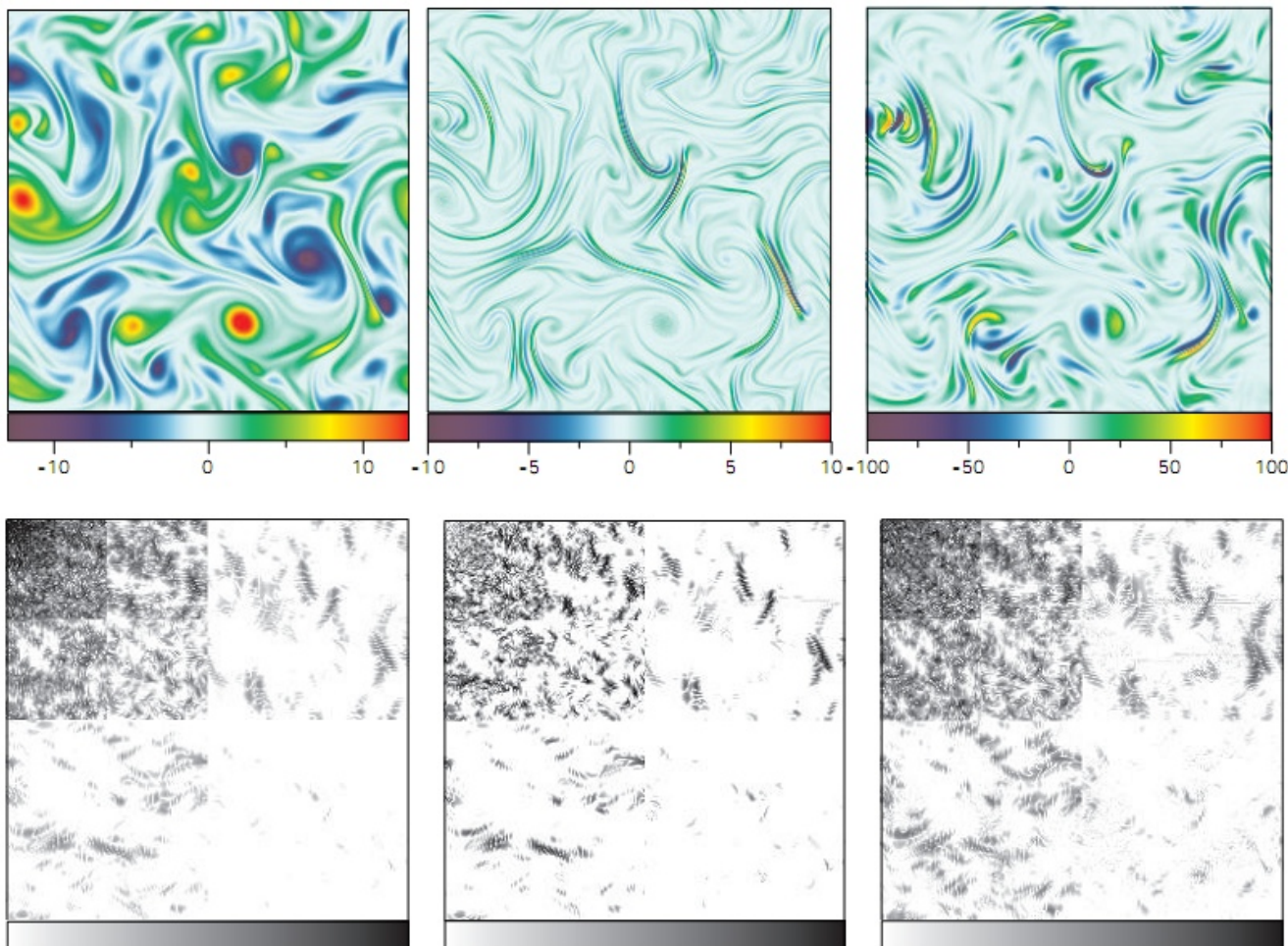
Ujjlenyomatok tárolása

- Egy digitalizált nagyfelbontású ujjlenyomat tárigénye 0.5 MB
- Egy teljes ujjlenyomat kártya kb. 10 MB tárhelyet igényel
- 200 millió ember ujjlenyomatának tárolása 2000 terabájt (TB) tárhelyet igényel
- Wavelet tömörítéssel ez legalább **1/15**-ödére csökkenthető



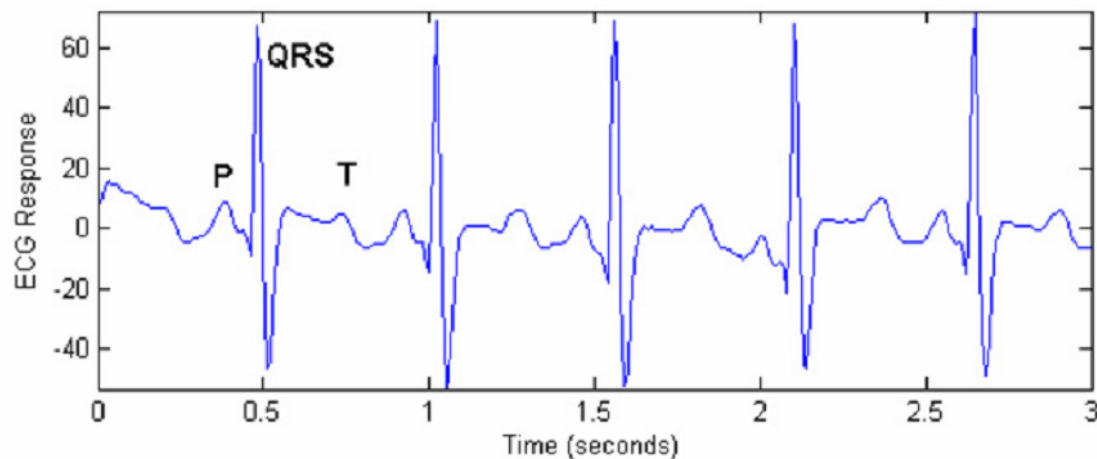
egy ujjlenyomat wavelet
transzformáltja

Turbulencia

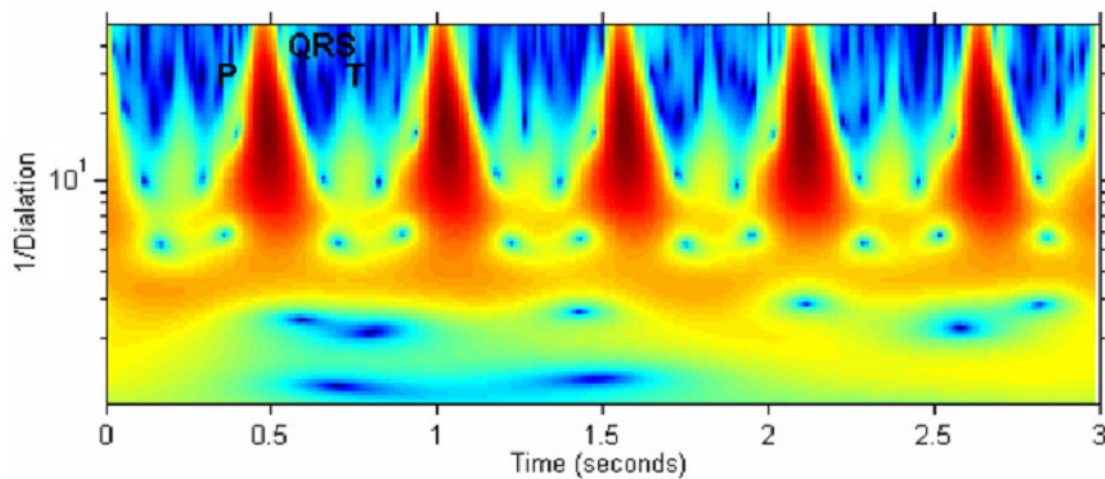


Örvénymezők
és wavelet
transzformáltak
(Schneider et al.
2003)

EKG

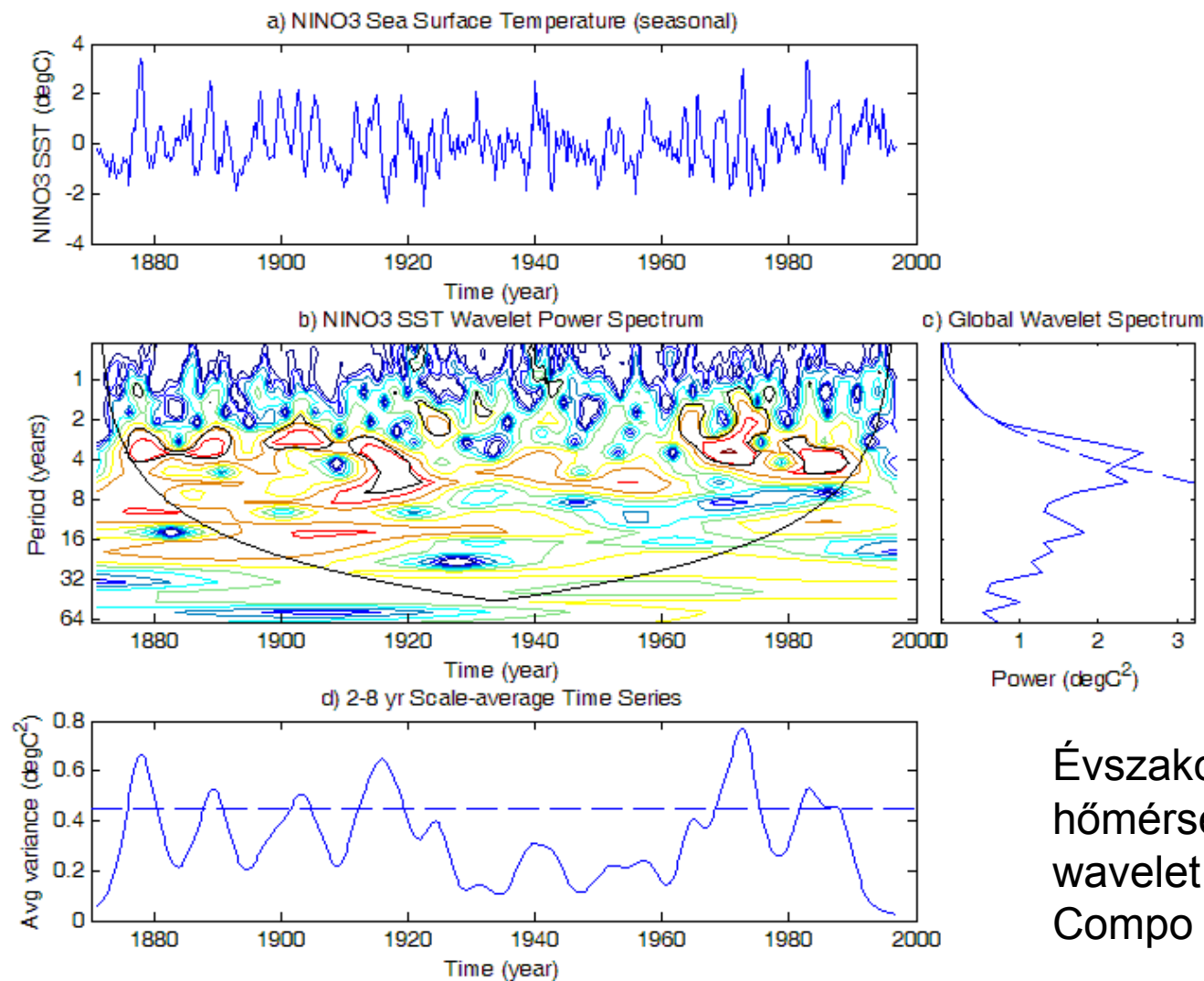


(a)



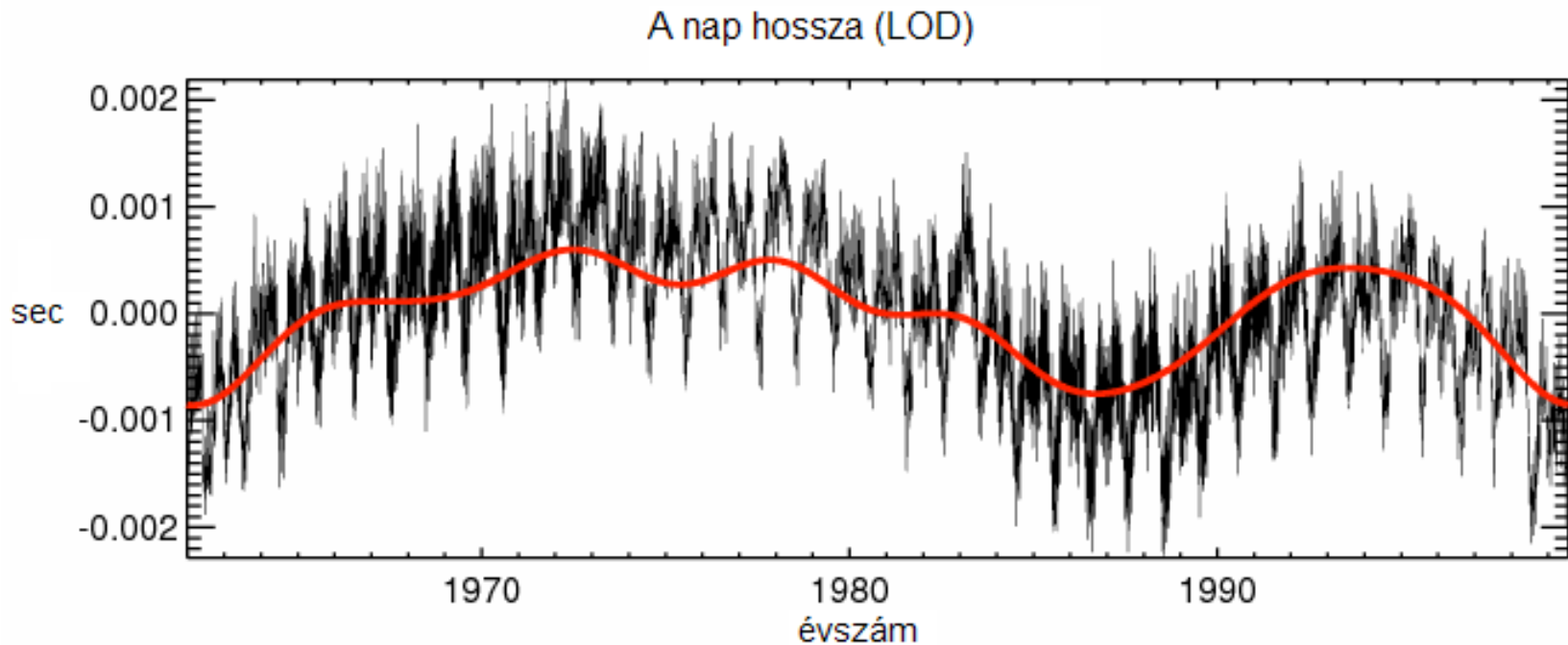
EKG és wavelet
transzformáltja
(Addison, 2005)

El Niño SST

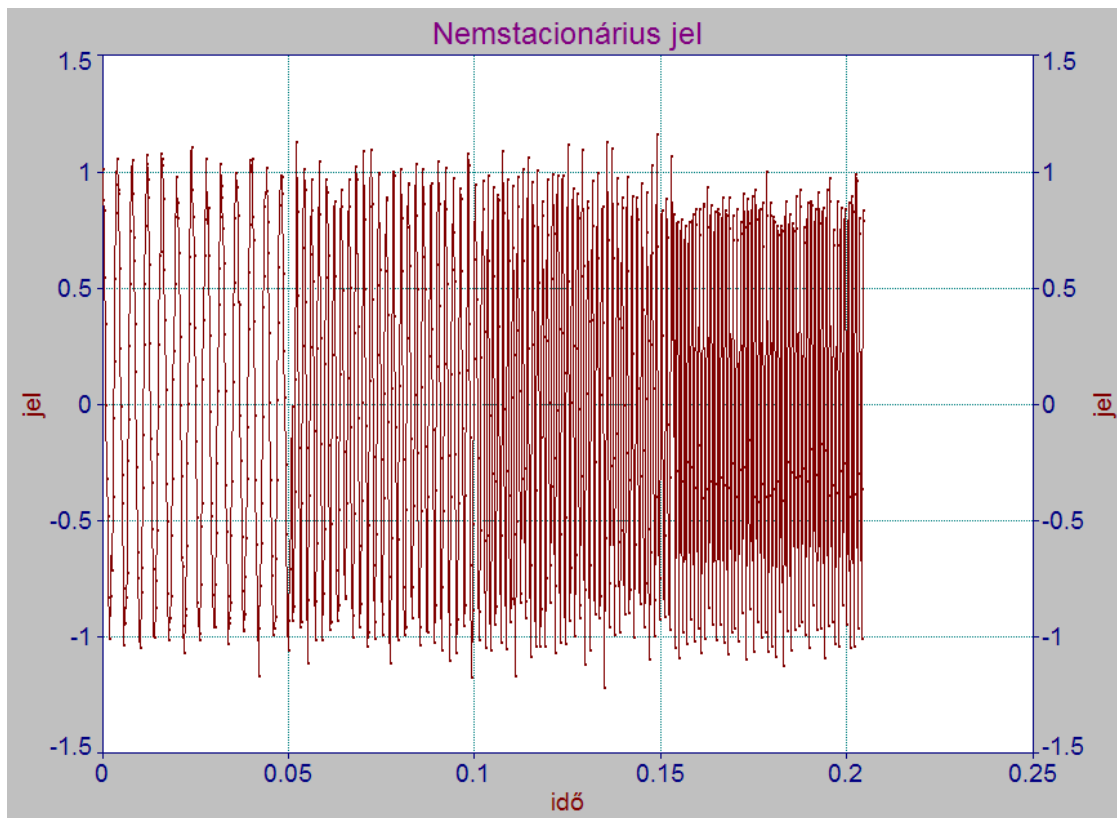


Évszakos El Niño tengerfelszín hőmérséklet anomáliák és wavelet spektrum (Torrence and Compo 1998)

Szűrés (WT + inverz WT-val)



Nemstacionárius jel



**250, 500, 750 és 1000 Hz-es
szinusz jelek**

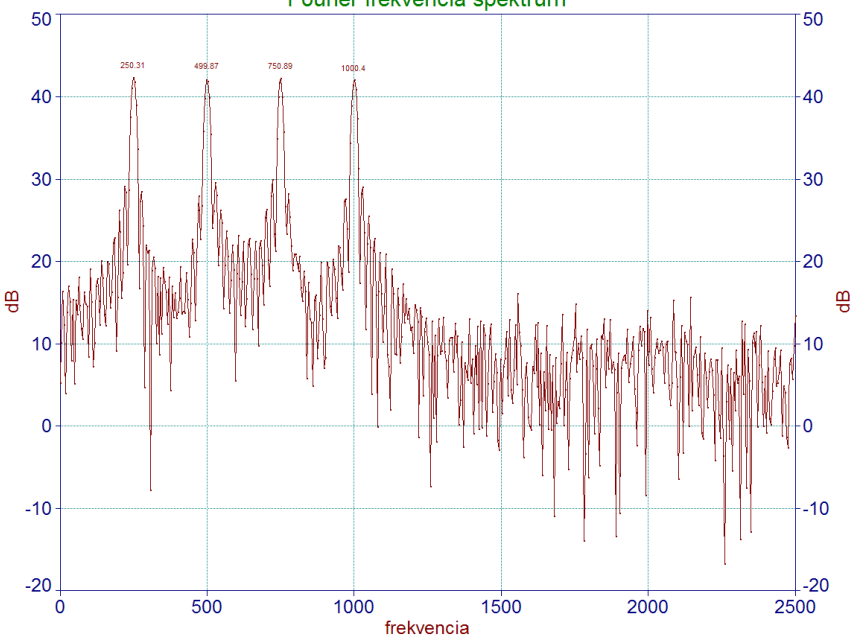
10% normál eloszlású zaj

mintavételi frekvencia

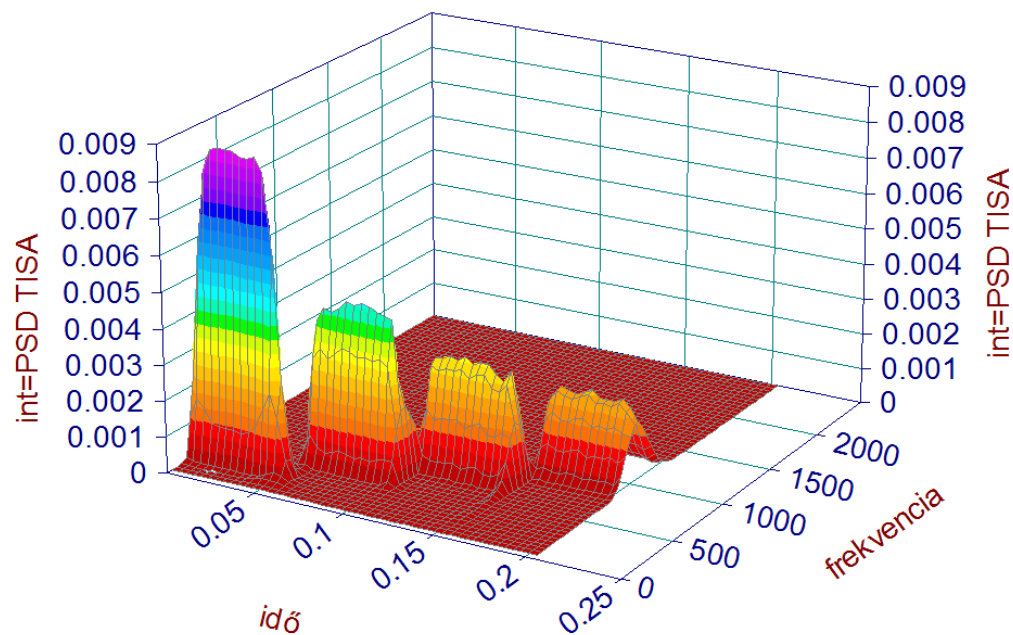
2·2500 Hz

Nemstacionárius jel analízise

nemstacionárius jel
Fourier frekvencia spektrum



folytonos wavelet idő-frekvencia spektrum



TISA: Time-integral squared amplitude $\Delta t \sum_{i=0}^N A_i^2$

Elemző függvények

- Fourier transzformáció (komplex)

- $e^{-i\omega t}$

- Wavelet transzformáció (folytonos: CWT)

- $\psi(b, a)$ – b : eltolás, a : skála – „leány” wavelet

- $\psi(t)$ „anya” waveletből származtatjuk

$$\psi_{b,a}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

Elemzés (FT, CWT)

- $f(t)$ jel Fourier transzformáltja (FT)

$$W_f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

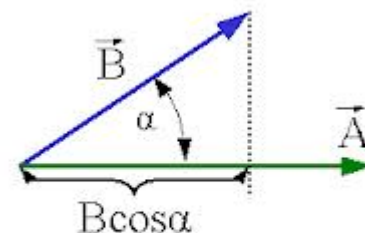
- $f(t)$ jel wavelet transzformáltja (CWT)

$$W_f(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt$$

Két függvény hasonlóságának mértéke

- $f(t)$ és $g(t)$ függvények hasonlóságának mértéke a négyzetesen integrálható függvények terében a **belső** (skaláris) **szorzat**:

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot g(t) dt$$



$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$$

- A FT és CWT a **jel** valamint az **elemző függvények** hasonlóságának a mértékét adják meg:

$$W_f(\omega) = \langle f(t), e^{-j\omega t} \rangle \quad W_f(b, a) = \langle f(t), \psi_{b,a}(t) \rangle$$

CWT kiszámítása konvolúcióval

- jelölés: $\psi_a(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t}{a}\right)$

- a CWT: $W_f(b, a) = f * \psi_a$

* a konvolúcióképzés jele

- CWT kiszámítása FT-vel (konvolúció tétel miatt):

$$W_f(a, b) = F^{-1} \left[F(f) F(\psi_a) \right]$$

$F(\)$ és $F^{-1}(\)$ jelöli az FT-t és IFT-t

CWT megfordítása: inverz CWT (ICWT)

- ICWT:
$$f(t) = \frac{1}{c_\psi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} W_f(b, a) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \frac{db da}{a^2}$$

ahol
$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F[\psi(\omega)]|^2}{\omega} d\omega.$$

- látható, hogy a CWT redundáns információt tartalmaz: 2 paraméterre (b, a) képez le 1-et (t)

Any wavelet

A $\psi(t)$ any wavelet nem tetszőleges: bizonyos **alfeltételt** teljesítenie kell (*admissibility*):

$\psi(t)$ Fourier transzformáltja $\omega = 0$ -nál elég gyorsan csökkenjen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty$$

A fenti feltétel teljesül, ha $\psi(t)$ négyzetesen integrálható és nincs nulla frekvenciájú komponense.

(most a függvény betűjele fölé tett kalap (^) jelöli a Fourier transzformáltat)

Az anya wavelet tulajdonságai

A $\psi(t)$ anya waveletre adott előző feltétellel egyenértékű kikötések:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0 \qquad \psi(\pm \infty) = 0$$

Ez azt jelenti, hogy a $\psi(t)$ –nek van néhány oszcillációja és a végtelenben eltűnik

Anya wavelet függvények

- Morlet wavelet (komplex)
- Paul wavelet (komplex)
- DOG wavelet (valós, DOG=Derivative of Gaussian)

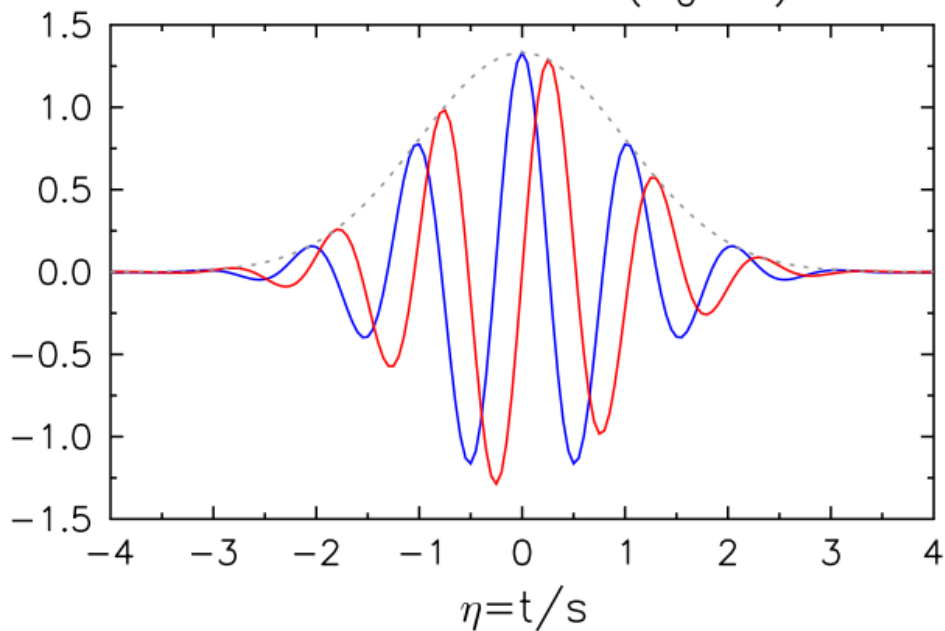
Morlet wavelet

$$\psi_0(\eta) = \pi^{-1/4} e^{i\omega_0 \eta} e^{-\eta^2/2}$$

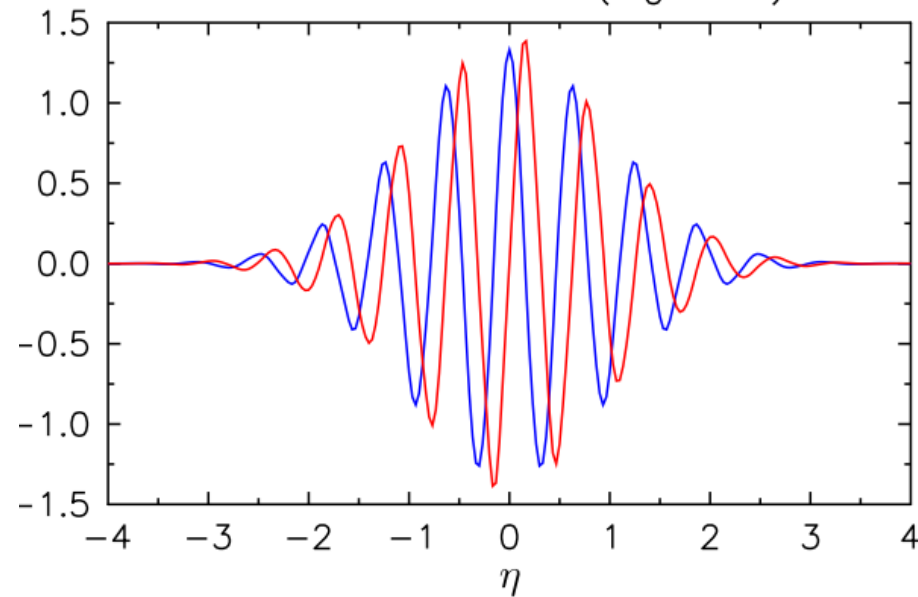
$$\omega_{0,\min} = 6$$

(admissibility)

Morlet wavelet ($\omega_0=6$)



Morlet wavelet ($\omega_0=10$)

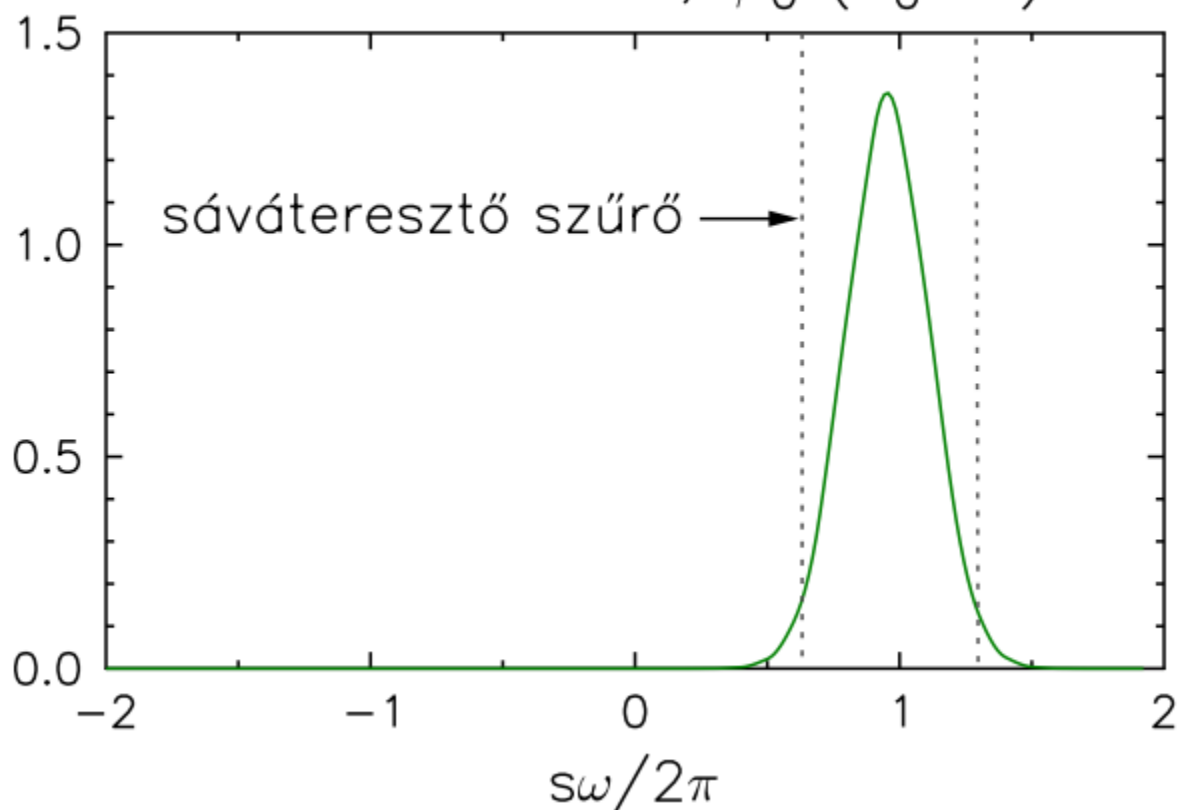


Gauss-függvénnyel modulált sin/cos (valós és képzetes rész)

Morlet wavelet Fourier transzformáltja

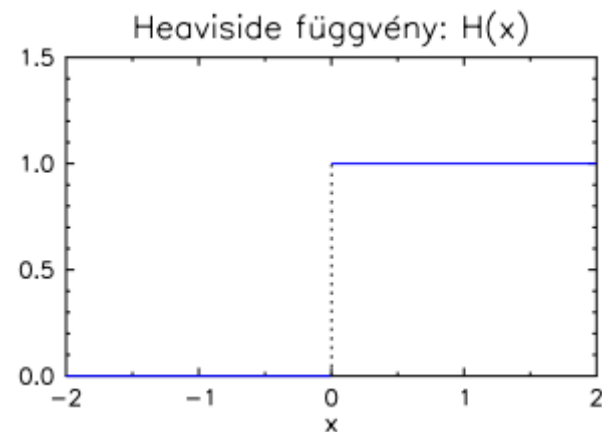
$$\hat{\psi}_0(s\omega) = \pi^{-1/4} H(\omega) e^{-(s\omega - \omega_0)^2/2}$$

Morlet wavelet, $\hat{\psi}_0$ ($\omega_0=6$)



$H(\omega)$

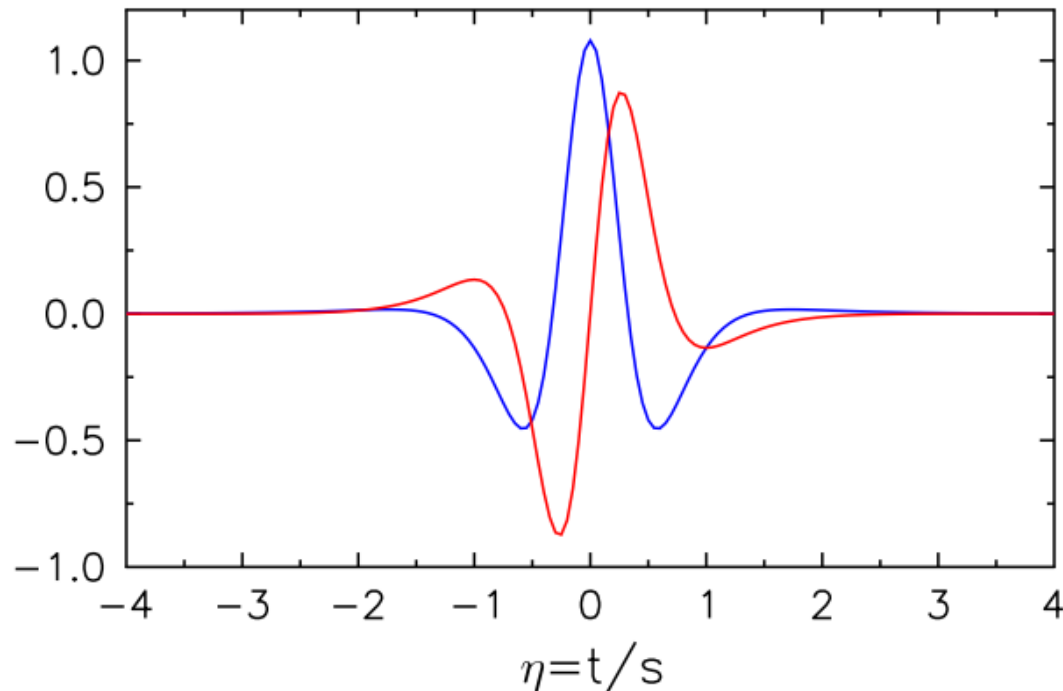
**Heaviside-féle
egységugrás
függvény**



Paul wavelet

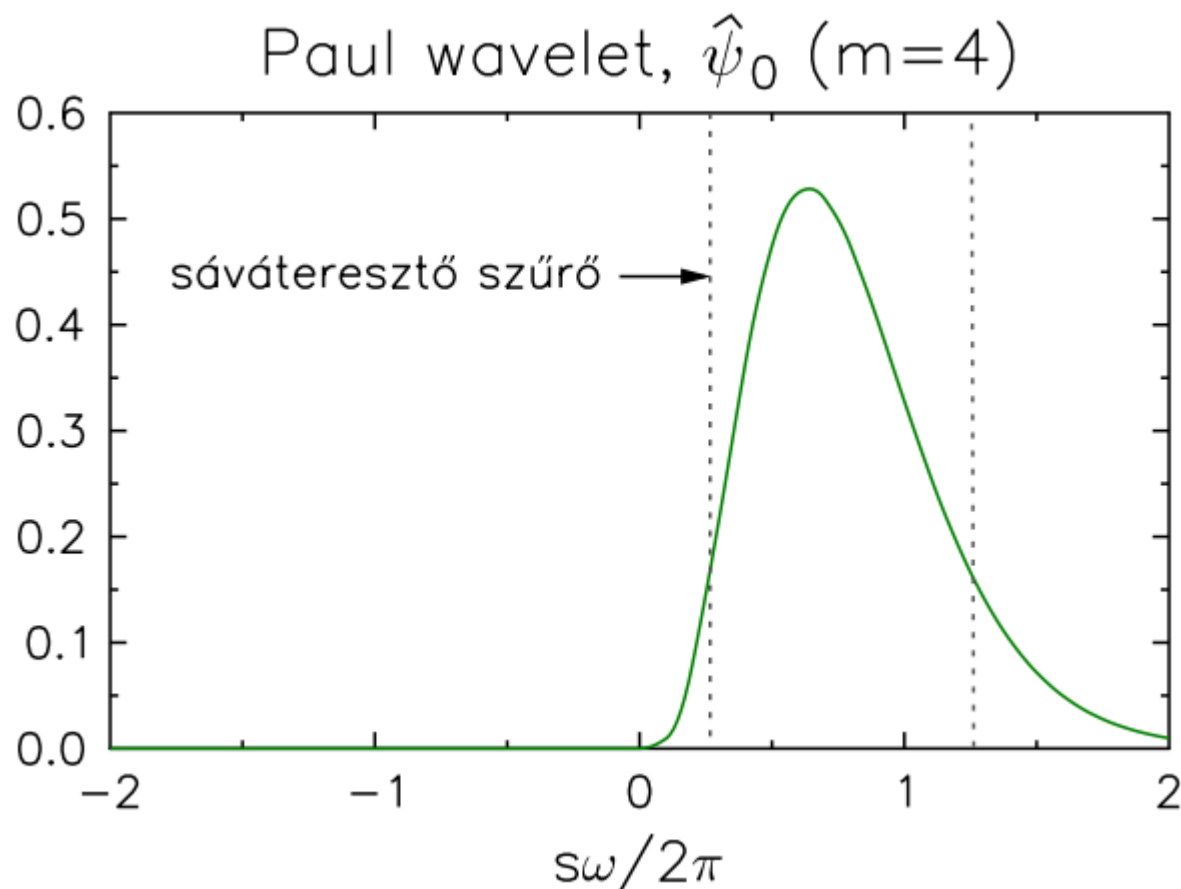
$$\psi_0(\eta) = \frac{2^m i^m m!}{\sqrt{\pi(2m)!}} (1 - i\eta)^{-(m+1)} \quad (m = \text{a wavelet rendje})$$

Paul wavelet ($m=4$)



Paul wavelet Fourier transzformáltja

$$\frac{2^m}{\sqrt{m(2m-1)!}} H(\omega) (s\omega)^m e^{-s\omega}$$



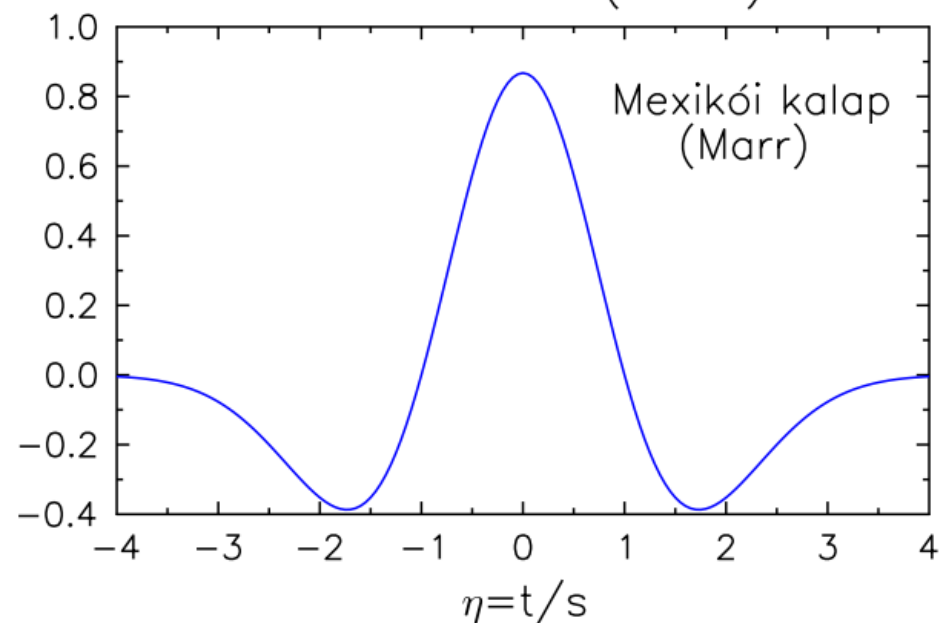
DOG wavelet

$$\psi_0(\eta) = \frac{(-1)^{m+1}}{\sqrt{\Gamma(m + \frac{1}{2})}} \frac{d^m}{d\eta^m} e^{-\eta^2/2}$$

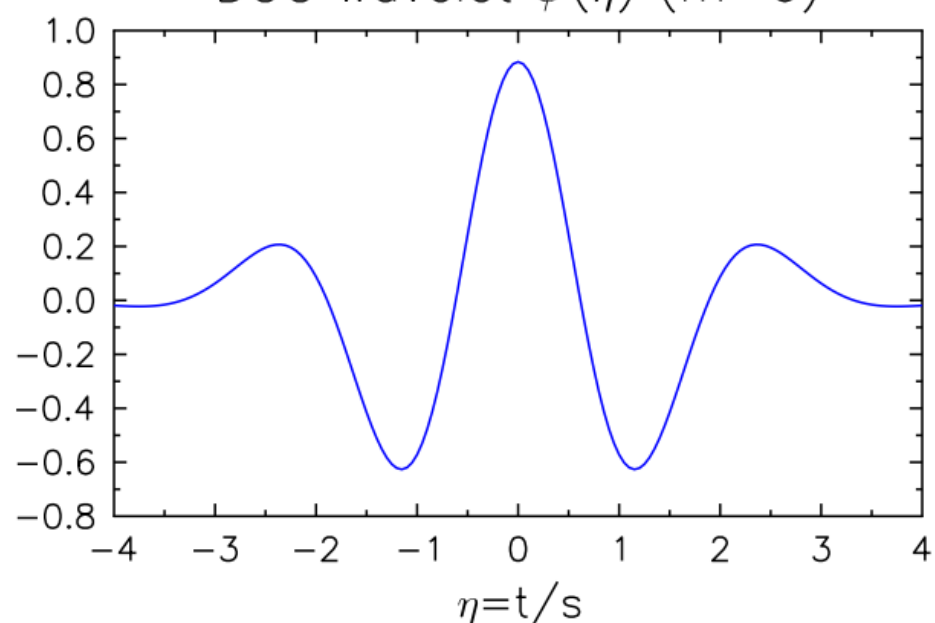
Gauss-függvény deriváltjai

(m = a derivált rendje)

DOG wavelet ($m=2$)



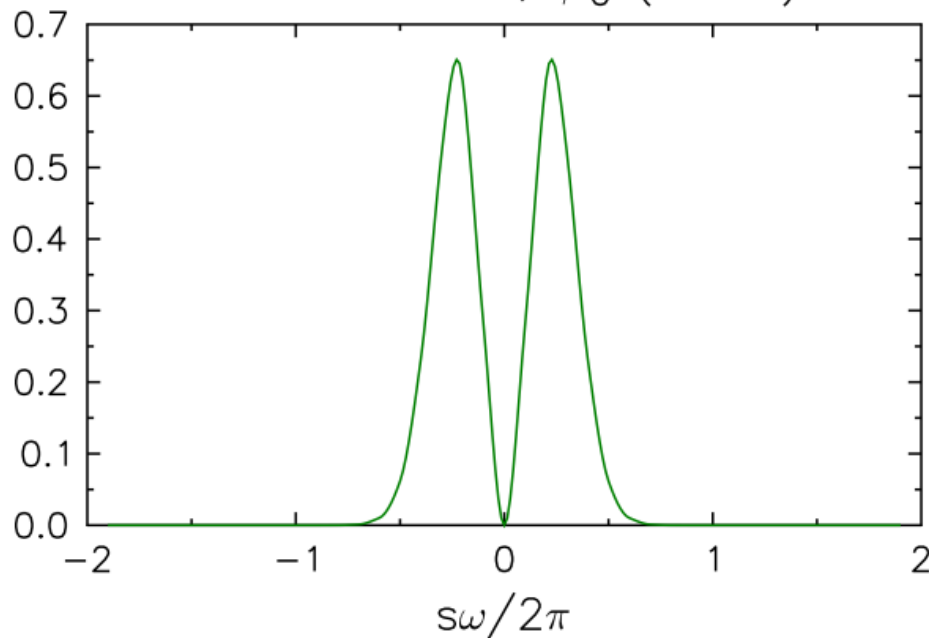
DOG wavelet $\psi(\eta)$ ($m=6$)



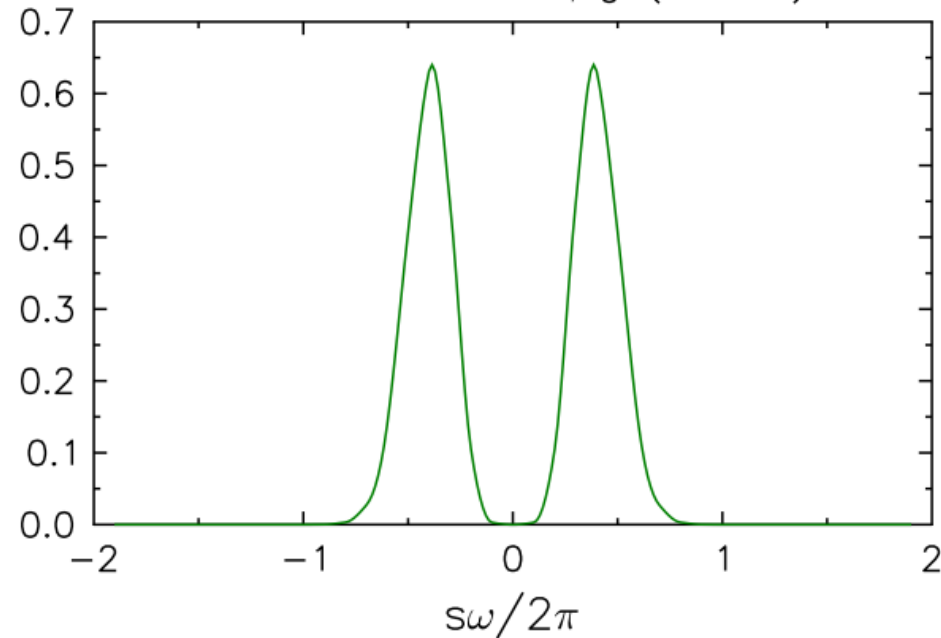
DOG wavelet Fourier transzformáltja

$$-\frac{i^m}{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right)} (s\omega)^m e^{-(s\omega)^2/2}$$

DOG wavelet, $\hat{\psi}_0$ ($m=2$)



DOG wavelet, $\hat{\psi}_0$ ($m=6$)



Hogyan válasszunk waveletet?

■ Komplex vagy valós

- ☐ amplitúdó és fázis is kell? (oszilláló jelenség):
→ komplex wavelet
- ☐ csúcsok/szakadások azonosítása a cél?:
→ valós wavelet

■ Szélessége

- ☐ hol akarunk jobb felbontást? (idő/frekvencia)

■ Alakja

- ☐ a vizsgált folyamatban meglevő keresett jellegzetességekhez igazodjon a wavelet alakja (éles ugrások/törések v. sima változás)

Miért folytonos a wavelet transzformáció?

- diszkrét idősorunk van (1D): x_i , $i = 1, \dots, N$
- viszont a wavelet eltolás és skála paramétereit elvileg folytonosan változhatnak
- a folytonos wavelet transzformáció (CWT) művelete az eltolás és/vagy skála változtatás műveletével felcserélhető (kovariáns)

A CWT konvolúciója hatékonyan számítható

függvények konvolúciója

$$W_f(a, b) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi_{ab}(t) dt = \langle f(t), \psi_{ab}(t) \rangle$$

helyett Fourier transzformáltak szorzata

$$W_f(a, b) = \sqrt{a} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ib\omega} \hat{f}(\omega) \hat{\psi}^*(a\omega) d\omega$$

(most is a függvény betűjele fölé tett kalap (^) jelöli a Fourier transzformáltat)

Idősorok elemzése CWT-vel

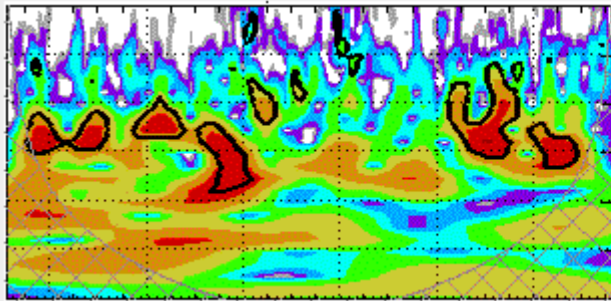
A diszkrét x_n sorozat CWT-je x_n és $\psi_0(\eta)$ átskálázott és eltolt változatainak **konvolúciója**:

$$W_n(s) = \sum_{n'=0}^{N-1} x_{n'} \psi^* \left[\frac{(n' - n)\delta t}{s} \right] \quad * : \text{komplex konjugált}$$

Az **s** wavelet **skálát** változtatva és **eltolva** az **n** diszkrét idő index mentén elemzünk.

A $\psi(t/s)$ 0 indexét elhagytuk, mert a wavelet most normalizált (lásd később)

Minta idősor

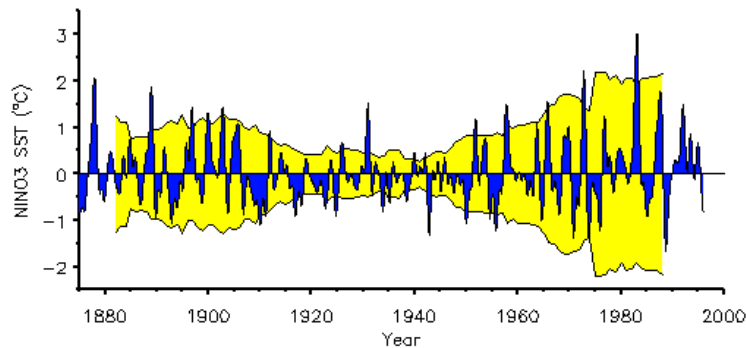


A Practical Guide to Wavelet Analysis

With significance and confidence testing

Christopher Torrence
ITT Visual Info. Solutions
Boulder, Colorado
chris[AT]ittvis[DOT]com

Gilbert P. Compo
NOAA/CIRES Climate Diagnostics Center,
Boulder, Colorado
compo[AT]colorado[DOT]edu



El-Niño SST (1871-1996)

<http://paos.colorado.edu/research/wavelets/>

Fig. 1.

Sea surface temperatures averaged over the NINO3 region in the eastern Pacific (5°S-5°N, 90°W-150°W). Blue curve is low-pass filtered (>12 months) SST. Yellow background curve is running 15-year variance, plotted at mid-point of 15-year period. Curve has been reproduced upside-down to show "envelope" of variance.

Jupyter munkafüzet

<https://nbviewer.jupyter.org/github/gyulat/Wavelet/blob/master/SST.ipynb>

El-Niño tengerfelszín hőmérséklet adatok (SST) wavelet elemzése

Az adatok elemzése szorosan követi [C. Torrence és G.P. Compo](#) weboldalán található kiváló leírást. Az elemzéshez felhasználjuk Evgeniya Predybaylo által írt [Python függvényeket](#).

Az évszakonként átlagolt, éves ciklus nélküli [adatokat](#) elemezzük.

Először is betöltjük az adatokat a fenti URL-ről és felrajzoljuk:

```
from __future__ import unicode_literals
import numpy as np
from waveletFunctions import wavelet, wave_signif
import matplotlib.pyplot as plt
from urllib2 import urlopen

url = 'http://paos.colorado.edu/research/wavelets/wave_python/sst_nino3.dat'
sst = np.loadtxt(urlopen(url))
n = len(sst)
dt = 0.25
time = np.arange(len(sst)) * dt + 1871.0 # időpontok tömbje
xlim = ([1870, 2000])
```

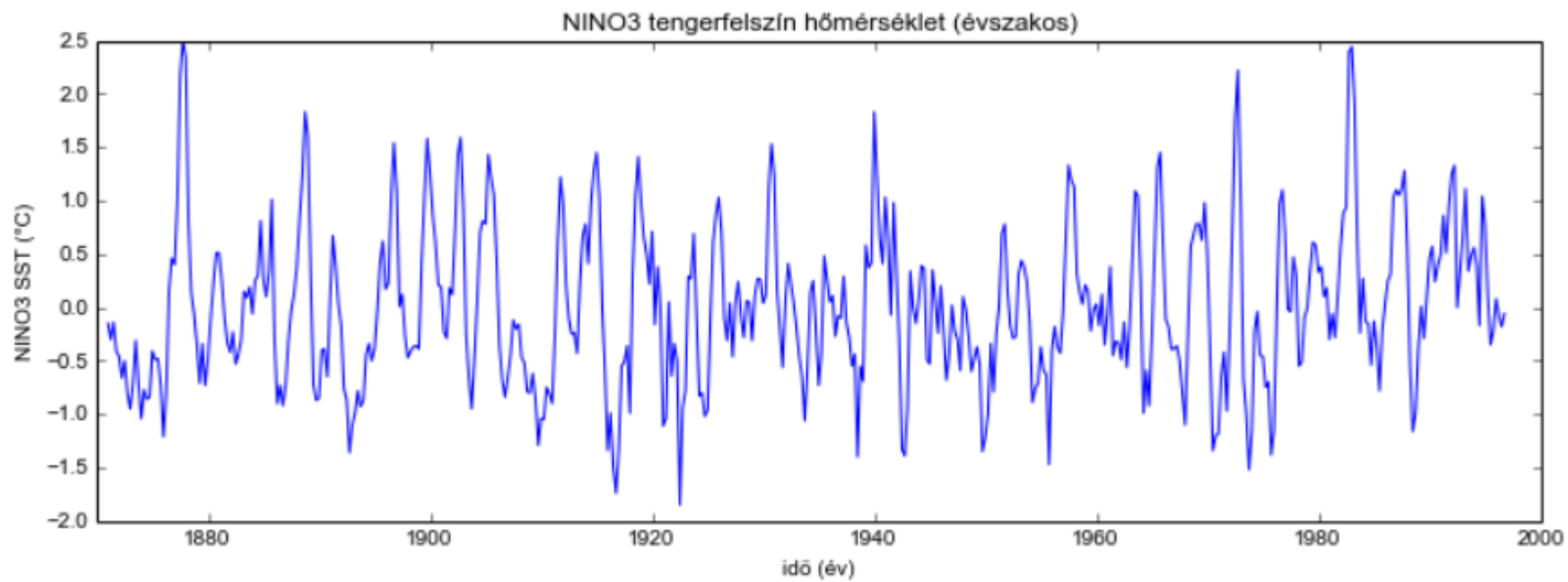
Minta idősor

Matplotlib plot ([SST.ipynb](#)) *N = 506 adat*

```
from __future__ import unicode_literals
import numpy as np
from waveletFunctions import wavelet, wave_signif
import matplotlib.pyplot as plt
from urllib2 import urlopen

url = 'http://paos.colorado.edu/research/wavelets/wave_python/sst_nino3.dat'
sst = np.loadtxt(urlopen(url))
n = len(sst)
dt = 0.25
time = np.arange(len(sst)) * dt + 1871.0 # időpontok tömbje
xlim = ([1870, 2000])

%matplotlib inline
plt.figure(figsize=(10, 3))
plt.plot(time, sst)
plt.xlim(xlim[:])
plt.xlabel('idő (év)')
plt.ylabel('NIN03 SST (°C)')
plt.title('NIN03 tengerfelszín hőmérséklet (évszakos)')
plt.hold(False)
```



CWT számítása DFT-vel

A diszkrét x_n sorozat CWT-jének számítása gyorsabb a frekvencia tartományban.

x_n sorozat DFT-je:

$$\hat{x}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-2\pi i k n / N}$$

itt a $k = 0, \dots, N - 1$ a frekvencia index

folytonos esetben $\psi(t/s)$ Fourier transzformáltja

$$\hat{\psi}(s\omega)$$

CWT diszkrét konvolúcióval

A diszkrét x_n sorozat CWT-je az alábbi szorzat inverz Fourier transzformáltja

$$W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}$$

az ω_k körfrekvencia definíciója:

$$\omega_k = \begin{cases} \frac{2\pi k}{N\delta t} : k \leq \frac{N}{2} \\ -\frac{2\pi k}{N\delta t} : k > \frac{N}{2} \end{cases}$$

SST CWT számítása

`waveletFunctions.py` (Torrence, Compo, Predybaylo)

```
# loop through all scales and compute transform
for a1 in range(0, int(J1+1)):
    daughter, fourier_factor, coi, dofmin = wave_bases(mother, k, scale[a1], param)
    wave[a1, :] = np.fft.ifft(f * daughter) # wavelet transform[Eqn(4)]
```

f tömbben az *x* adatsor DFT-je van:

```
#...compute FFT of the (padded) time series
f = np.fft.fft(x) # [Eqn(3)]
```

daughter tömbben az átskálázott anya wavelet DFT-je van:

```
#
#    DAUGHTER = a vector, the wavelet function
```

CWT skála értékek megválasztása

s skálaparaméter diszkrét értékeit hogyan válasszuk meg?

kettő tört hatványai (δj : rész (tört) oktávok)

$$s_j = s_0 2^{j\delta j}, \quad j = 0, 1, \dots, J$$

$$J = \delta j^{-1} \log_2(N \delta t / s_0)$$

s_0 a legkisebb még feloldható skála és J a legnagyobb skála

s_0 –t úgy kell felvenni, hogy a skálával ekvivalens Fourier periódusa (ld. később) kb. $2\delta t$ legyen

CWT skála megválasztása

az SST idősor mintavételi időköze $\delta t = 1/4$ év.

a Morlet wavelet esetében $\lambda = 1.03s$, tehát $s_0 = 1/2$ év

az oktávot nyolc rész oktávra bontjuk: $\delta j = 0.125$

$J = 56$, tehát 57 skálát elemzünk (7 oktáv)

SST Jupyter munkafüzet:

```
pad = 1 # zérus kitöltés (javasolt)
dj = 0.125 # 8 rész-oktáv (egy oktávon belül)
s0 = 2 * dt # 6 hónapos kezdő skála
j1 = 7 / dj # 7 oktáv
mother = 'MORLET'
```

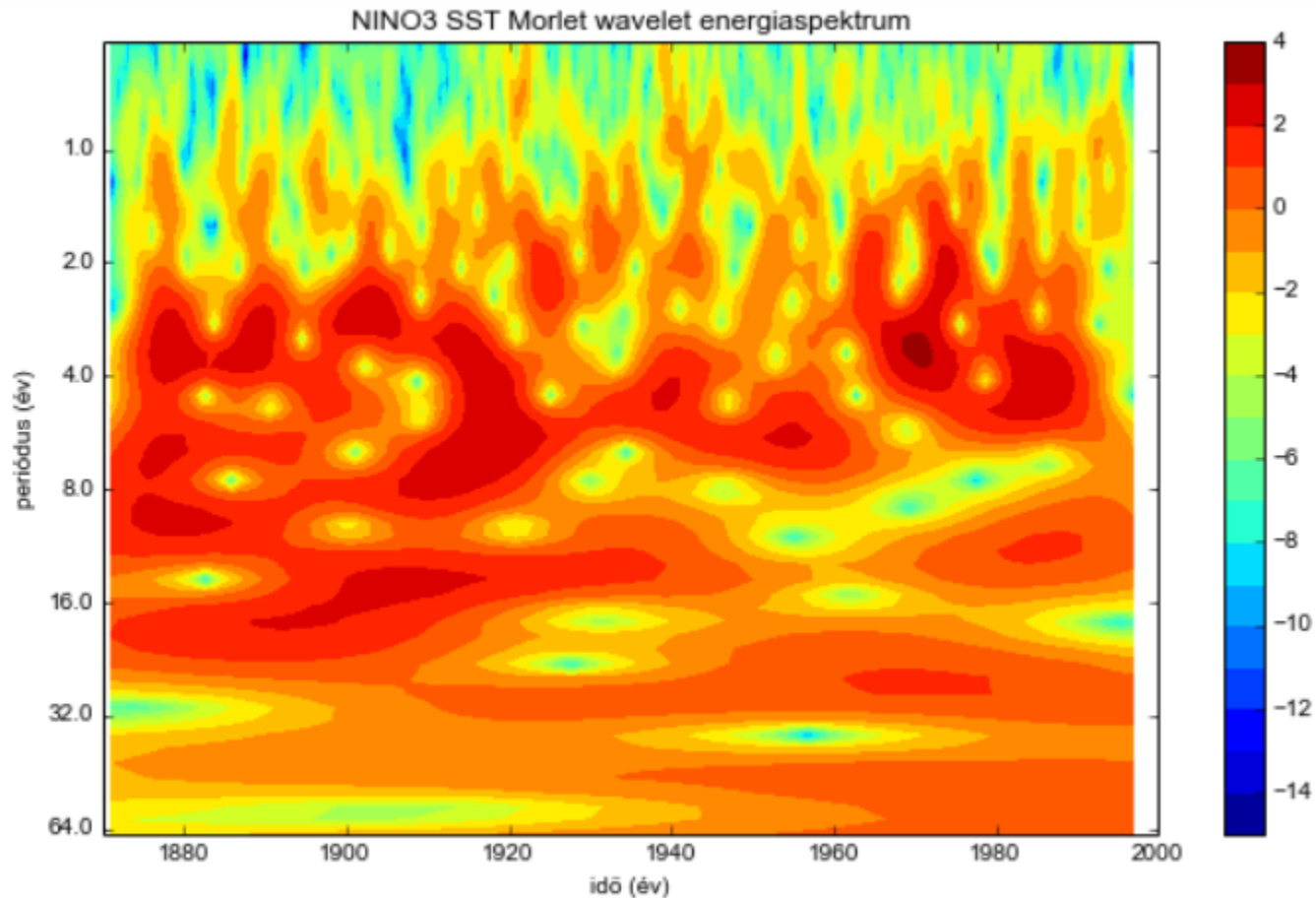
CWT számítása (Morlet)

a wavelet transzformációt a `wavelet` függvénnel számítjuk
SST Jupyter munkafüzet:

```
# Wavelet transzformáció:
wave, period, scale, coi = wavelet(sst, dt, pad, dj, s0, j1, mother)
power = (np.abs(wave)) ** 2 # energiaspektrum (nem egészen korrekt)

#--- wavelet energiaspektrum (szintvonalas és színes ábra)
import matplotlib
plt.figure(figsize=(10, 6))
levels = np.array([2**i for i in range(-15,5)])
CS = plt.contourf(time, period, np.log2(power), len(levels)) #*** vagy 'contour'
im = plt.contourf(CS, levels=np.log2(levels))
# im = plt.imshow(np.log2(np.flipud(power)), extent=[1870, 2000, 0.5, 64])
plt.xlabel('idő (év)')
plt.ylabel('periódus (év)')
plt.title('NIN03 SST Morlet wavelet energiaspektrum')
plt.xlim(xlim[:])
plt.yscale('log', basey=2, subsy=None)
plt.ylim([np.min(period), np.max(period)])
ax = plt.gca().yaxis
ax.set_major_formatter(matplotlib.ticker.ScalarFormatter())
plt.ticklabel_format(axis='y', style='plain')
plt.gca().invert_yaxis()
plt.colorbar(im, orientation='vertical')
plt.show()
```

El Niño SST Morlet wavelet





Kérdések

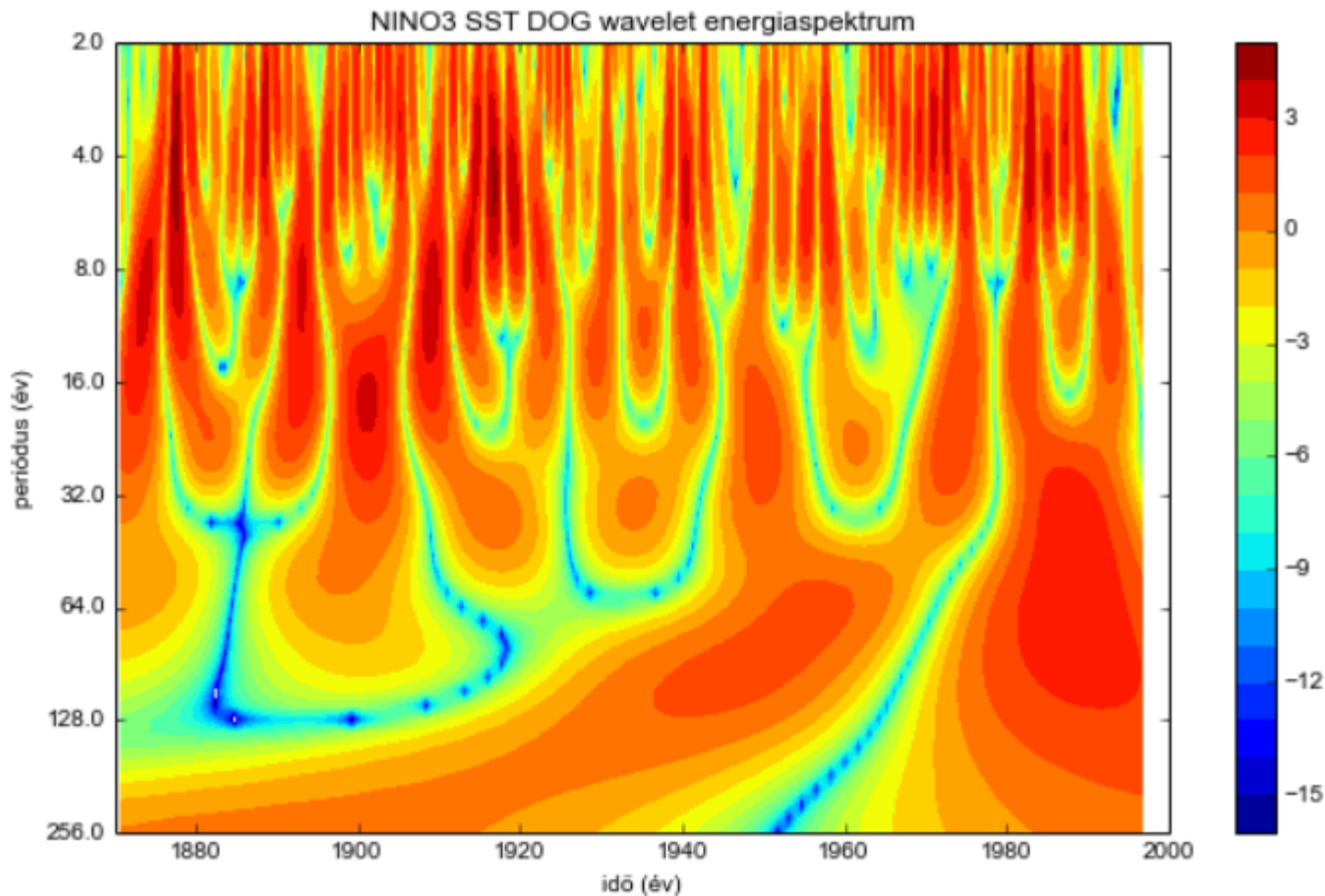
1. mennyire függ az eredmény a wavelet megválasztásától?
2. szignifikánsak-e a talált csúcsok?
3. a normalizáció korrekt-e?
4. hogyan értelmezzük a kapott eredményeket?
5. okoz-e problémát a konvolúció esetében annak átlapolódása (periódikusság) a DFT alkalmazásakor?
6. hogyan viszonyul az analízis a Fourier transzformációhoz?
7. inverz transzformáció?



1. Wavelet megválasztása

- ortogonális – nem ortogonális
- valós vagy komplex
- szélesség, felbontás
- alak

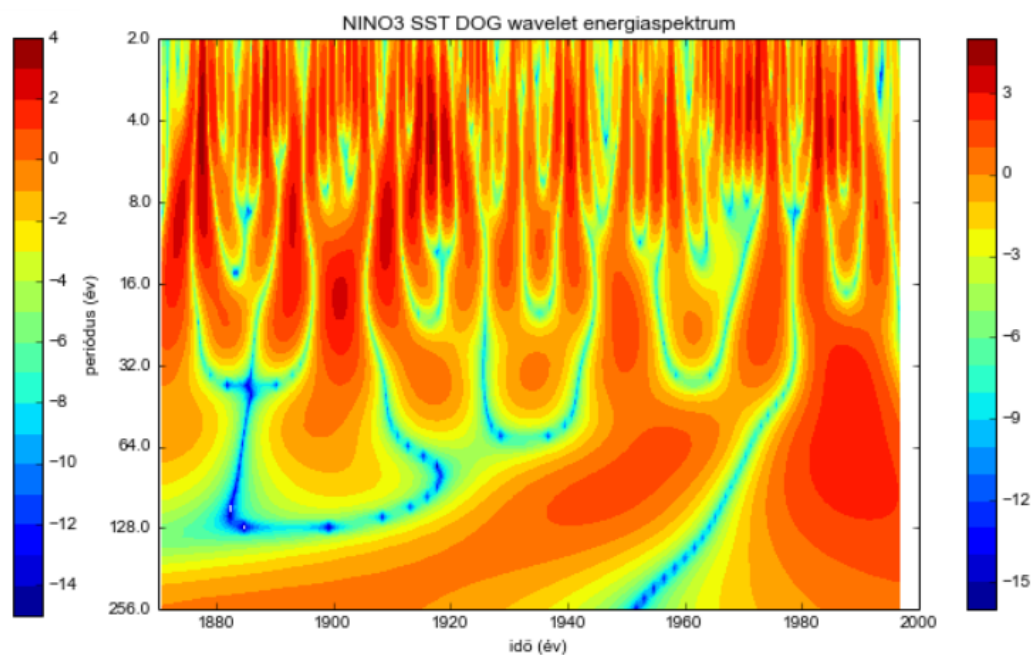
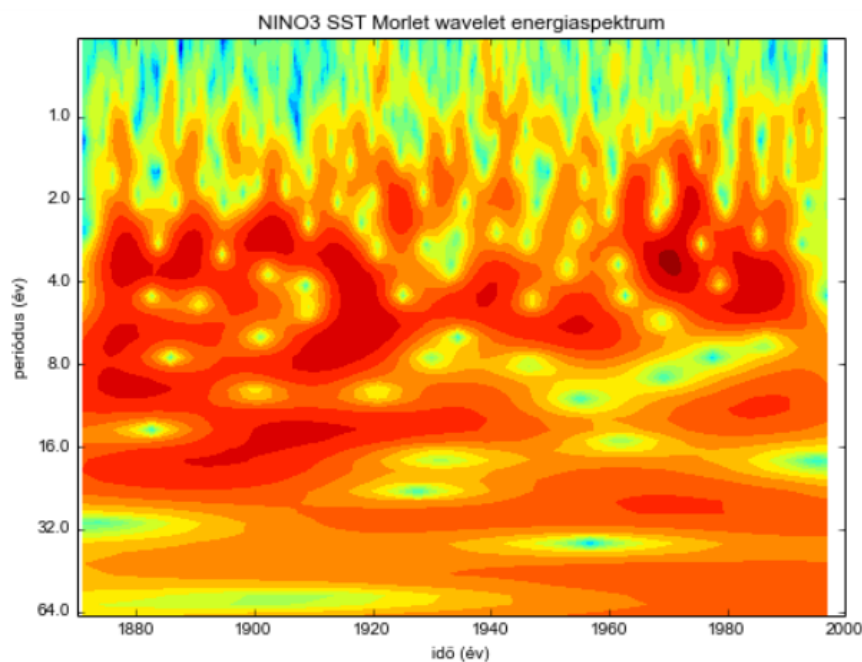
El Niño SST DOG wavelettel



Morlet vagy DOG wavelet?

komplex vagy valós wavelet

ha valós: finomabb időbeli felbontás : +/- oszcillációk külön



2. Wavelet spektrum szignifikancia vizsgálata

A nullhipotézis konstrukciójához először megfelelő **háttér spektrumot** kell választani:

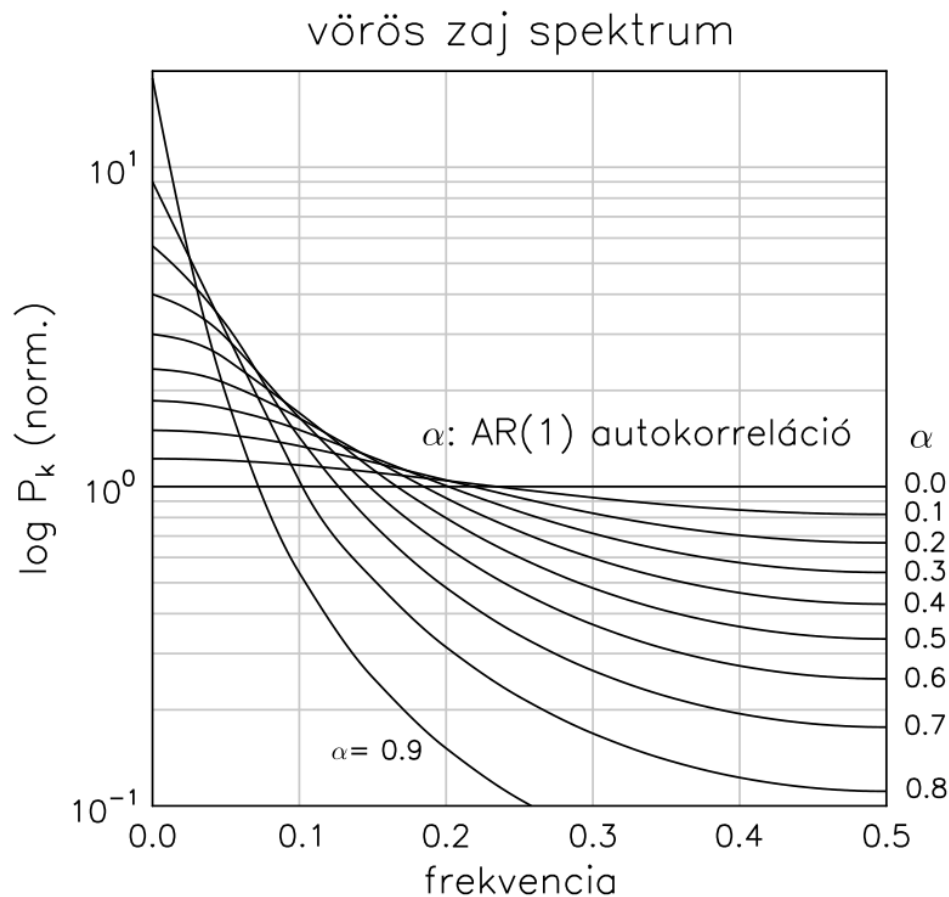
- **fehér zaj** (minden frekvencián azonos energia)
- **vörös zaj** (a frekvencia csökkenésével növekvő energia)

Ezután feltételezzük, hogy a sztochasztikus folyamat különböző realizációi e körül a **várható** (átlagos) **háttér spektrum** körül fognak ingadozni

Ezek a várható spektrumok adnak lehetőséget a talált csúcsok szignifikancia vizsgálatára (adott konfidencia szinten)

Háttér spektrum (vörös zaj)

Torrence és Compo (1998) közlik az AR(1) (Markov) folyamattal modellezett vörös zaj α 1-késéses autokorrelációjával számítható háttér zaj PSD-jét



$$x_n = \alpha x_{n-1} + z_n$$

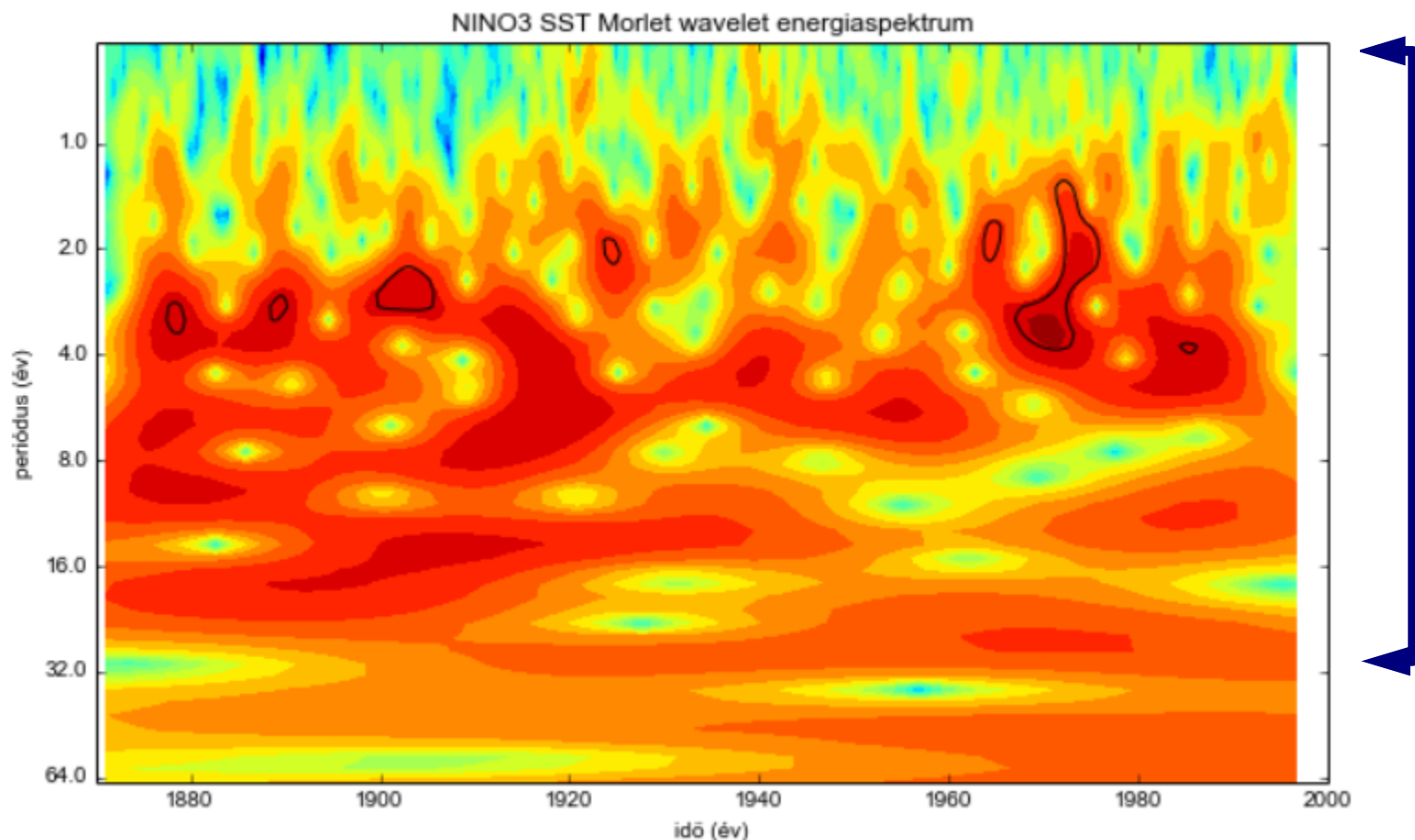
$$P_k = \frac{1 - \alpha^2}{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos(2\pi k/N)}$$

$$(16) \quad k = 0 \dots N/2$$

```
fft_theor = (1 - lag1 ** 2) / (1 - 2 * lag1 * np.cos  
(freq * 2 * np.pi) + lag1 ** 2) # [Eqn(16)]
```

(később, a PSD becslésnél, az AR folyamatoknál és a z-transzformációnál még szó lesz minderről)

El-Niño SST konfidenciaszint



normalizációs probléma? úgy tűnik, hogy a wavelet spektrum túlzottan kiemeli az alacsonyabb frekvenciákat

3. Normalizáció – anya wavelet

anya wavelet FT egységnyi energiára normalizált:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}_0(\omega')|^2 d\omega' = 1$$

Parseval egyenlőség miatt ψ_0 is energiára normalizált:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}_0(\omega')|^2 d\omega' = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(\eta)|^2 d\eta$$

az anya waveletet **átskálázzuk**:

$$\psi_{ab}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad \text{illetve:} \quad \psi_n(s) = \left(\frac{\delta t}{s}\right)^{1/2} \psi_0\left(\frac{n\delta t}{s}\right)$$

Normalizáció – leány wavelet

az átskálázott leány wavelet megőrzi normalizációját:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_{ab}(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{a} \left| \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \right|^2 dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_0(u)|^2 du \quad u = \frac{t-b}{a} \Rightarrow du = \frac{1}{a} dt$$

illetve $a \Rightarrow \frac{s}{\delta t}$ miatt $\psi_n(s)$ is normalizált

a Fourier transzformáció skálázási összefüggése

$$f\left(\frac{t}{a}\right) \Leftrightarrow |a| \hat{f}(a\omega)$$

miatt a leány wavelet normalizált transzformáltja:

$$\hat{\psi}_{ab}(\omega) = \sqrt{a} e^{ib\omega} \hat{\psi}_0(a\omega)$$

Normalizáció – diszkrét eltolás

diszkrét n eltolással a normalizált leány wavelet FT:

$$\hat{\psi}(s\omega_k) = \left(\frac{2\pi s}{\delta t}\right)^{1/2} \hat{\psi}_0(s\omega_k)$$

ezzel mindegyik s skálára:

$$\sum_{k=0}^{N-1} |\hat{\psi}(s\omega_k)|^2 = N$$

Python **wave_bases()**:

$$\text{norm} = (2\pi s / \delta t)^{1/2}$$

```
norm = np.sqrt(scale * k[1]) * (np.pi ** (-0.25)) * np.sqrt(n) # total energy=N
```

Python **wavelet()**:

$$k(1) = 2\pi / (N \delta t)$$

```
#....construct wavenumber array used in transform [Eqn(5)]
```

```
kplus = np.arange(1, np.fix(n / 2 + 1))
```

```
kplus = (kplus * 2 * np.pi / (n * dt))
```

```
kminus = -(kplus[0:-1])[::-1]
```

```
k = np.concatenate(([0.], kplus, kminus))
```

Wavelet teljesítmény spektrum

Torrence és Compo (1998) definíciója (szokásos):

$$|W_n(s)|^2$$

wavelet energia spektrum (power spectrum)

Liu et al. alternatív definíciója:

Liu et al.(2007):Rectification of the Bias in the Wavelet Spectrum, Journal of Atm. Oceanic Techn. Vol.24, pp. 2093-2102

$$\frac{1}{s_j} \left| W_n(s) \right|^2$$

a skála inverzével van szorozva

Normalizáció teszt

3 szinuszhullám **azonos** (egységnyi) **amplitúdóval** de különböző T periódussal:

$$x_n = \sin\left(2\pi \frac{n\delta t}{T_1}\right) + \sin\left(2\pi \frac{n\delta t}{T_2}\right) + \sin\left(2\pi \frac{n\delta t}{T_3}\right)$$

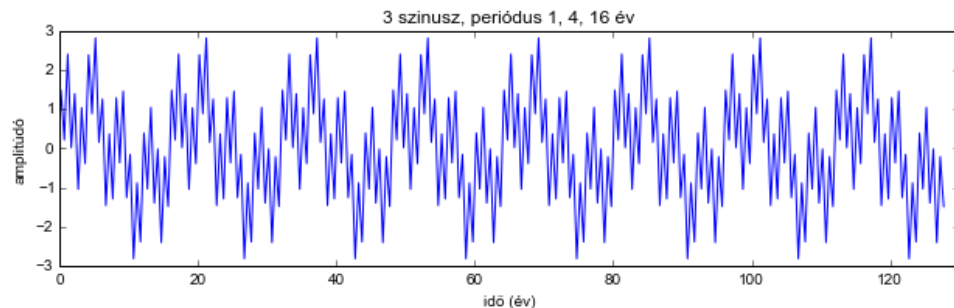
SST Jupyter munkafüzet:

```
N = 512
dt = 0.25
t = np.arange(N) * dt
T1 = 1.0
T2 = 4.0
T3 = 16.0
w1 = 2 * np.pi / T1
w2 = 2 * np.pi / T2
w3 = 2 * np.pi / T3
s3 = np.sin(w1 * t) + np.sin(w2 * t) + np.sin(w3 * t)
```

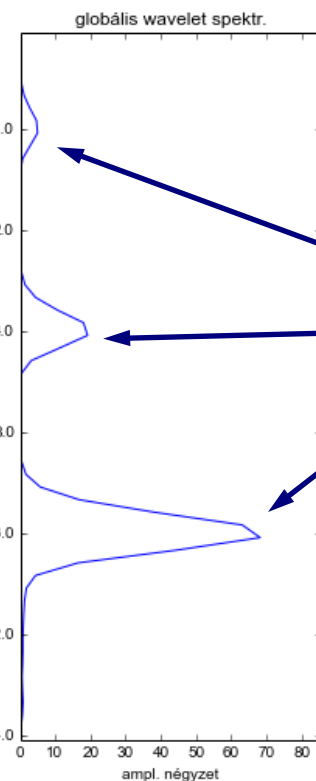
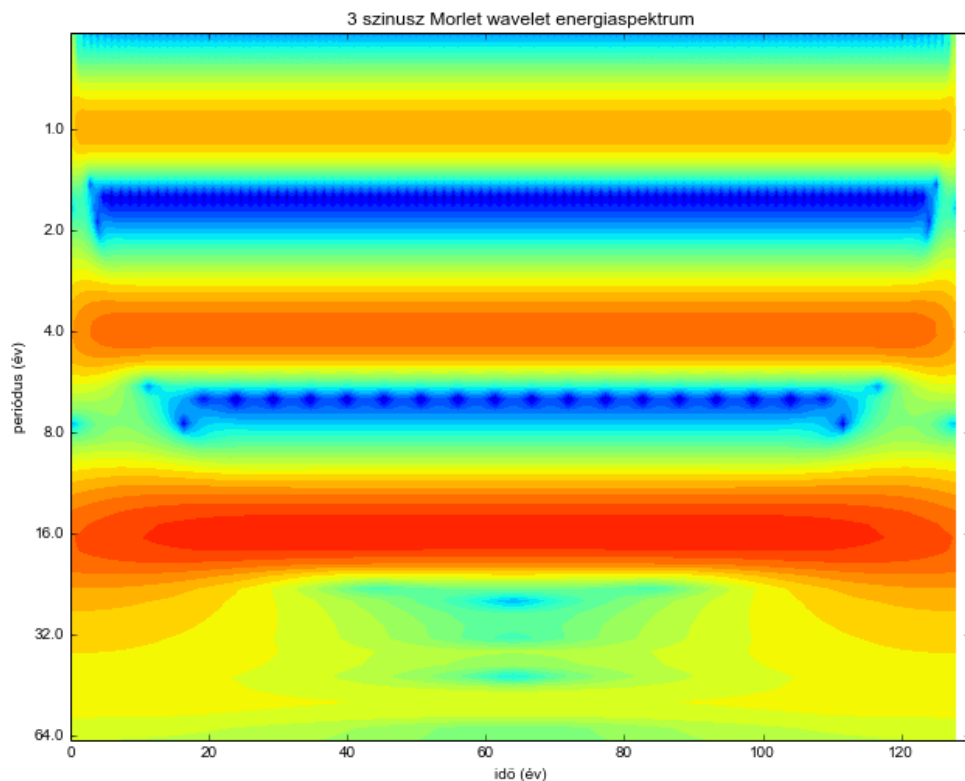
Normalizáció teszt 1.

Torrence és Compo (1998) definíciójával

```
power = (np.abs(wave)) ** 2
```



```
global_ws = variance * (np.sum(power, axis=1) / n)
```

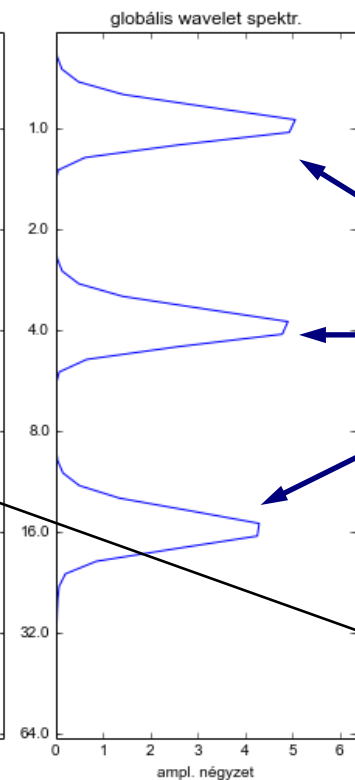
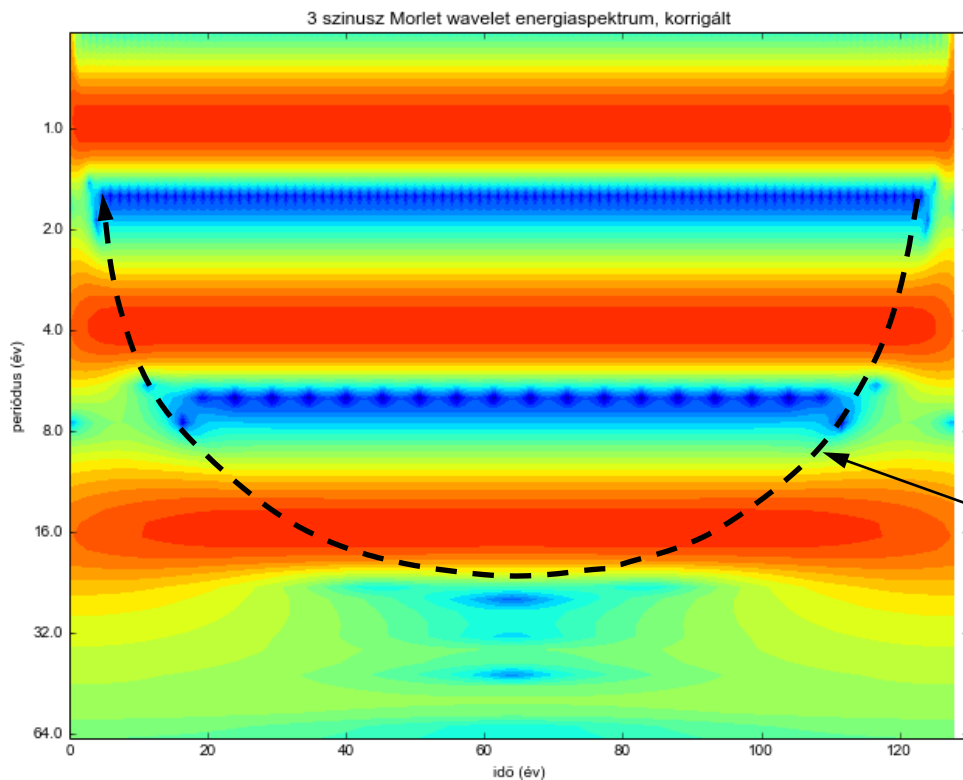
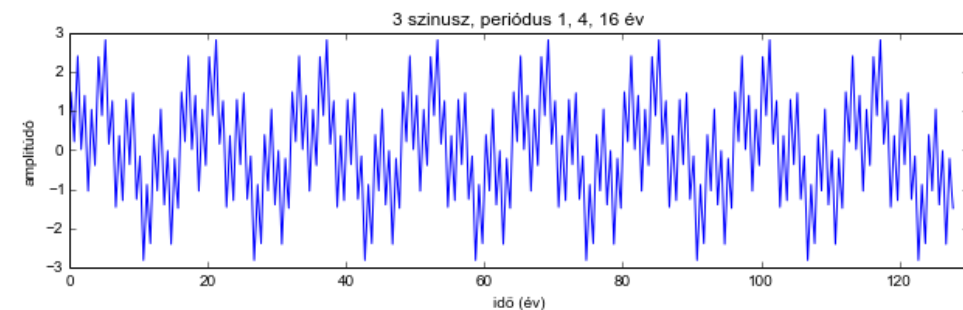


közel sem
azonosak

Normalizáció teszt 2.

Liu et al. (2007) definíciójával

```
scale_ext = np.outer(scale, np.ones(N))  
power = (np.abs(wave))**2 / scale_ext
```

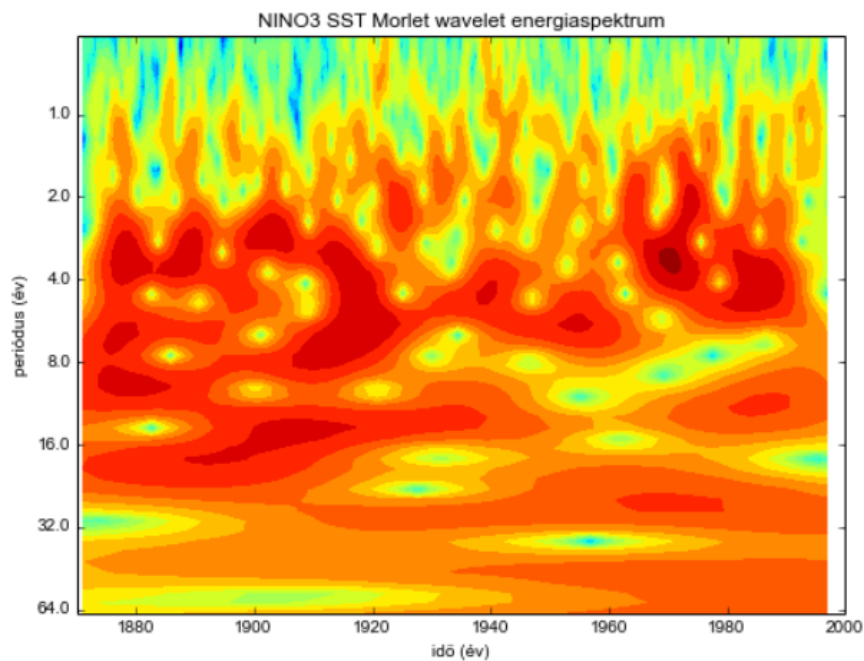


közel
azonosak

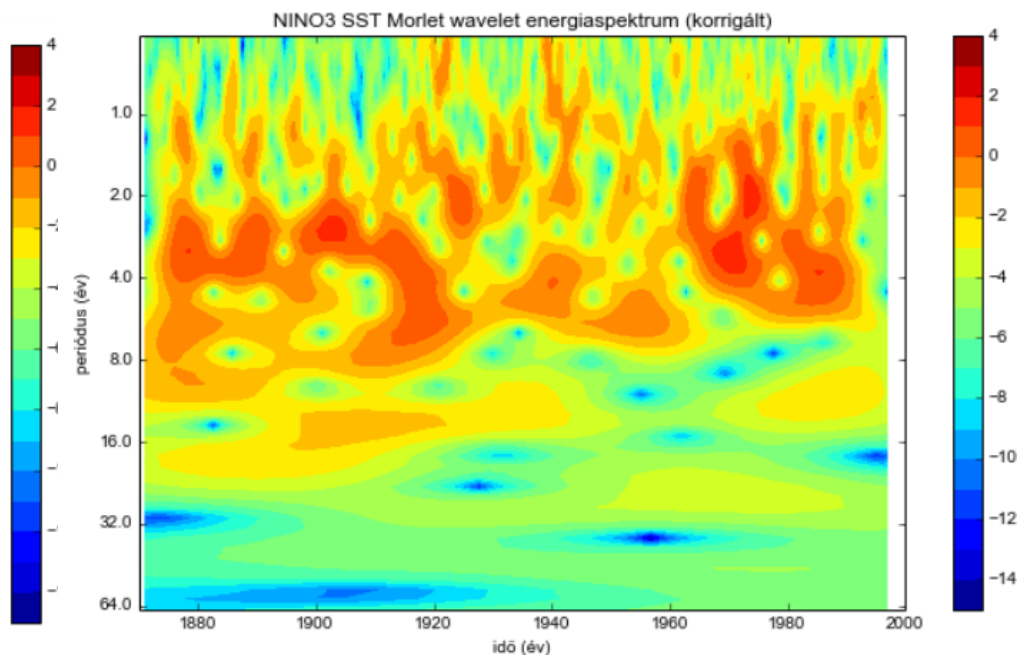
peremhatás

Korrigált El Niño SST spektrum

a) torzított



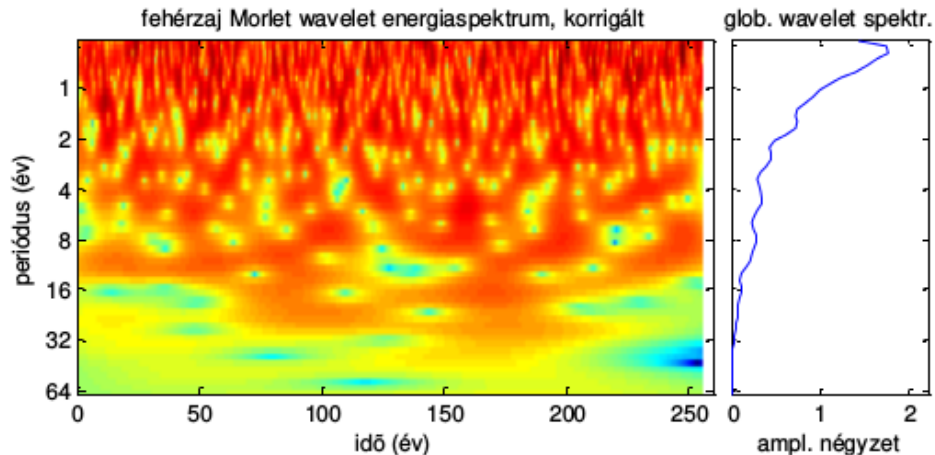
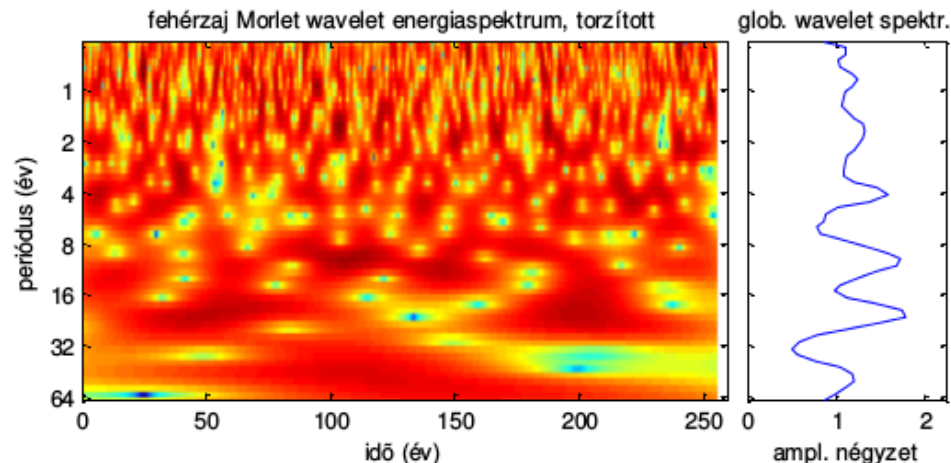
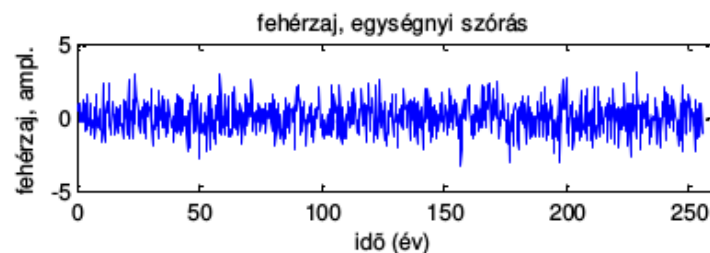
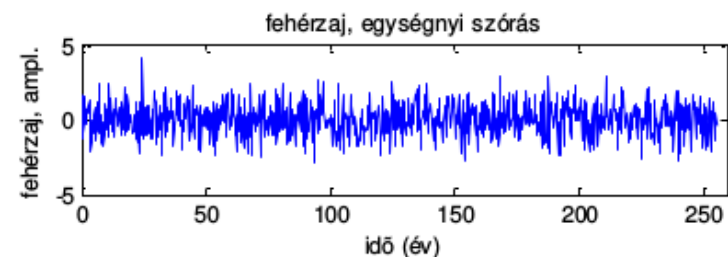
b) korrigált



de van egy bökkenő...

Fehérzaj korrigált spektruma

a fehérzaj *korrigált* spektruma nem azonos teljesítményű az összes frekvencián!



tehát a szignifikancia vizsgálathoz a **nem korrigált** érték kell!

4. Eredmények értelmezése

Mivel $\psi_n(\eta)$ általában **komplex**, $W_n(s)$ is az

$W_n(s)$ **valós és képzetes** része: $\text{Re}[W_n(s)]$, $\text{Im}[W_n(s)]$

amplitúdó és fázis: $|W_n(s)|$, $\text{tg}^{-1}\{ \text{Im}[W_n(s)]/\text{Re}[W_n(s)] \}$

teljesítmény spektrum (power spectrum): $|W_n(s)|^2$

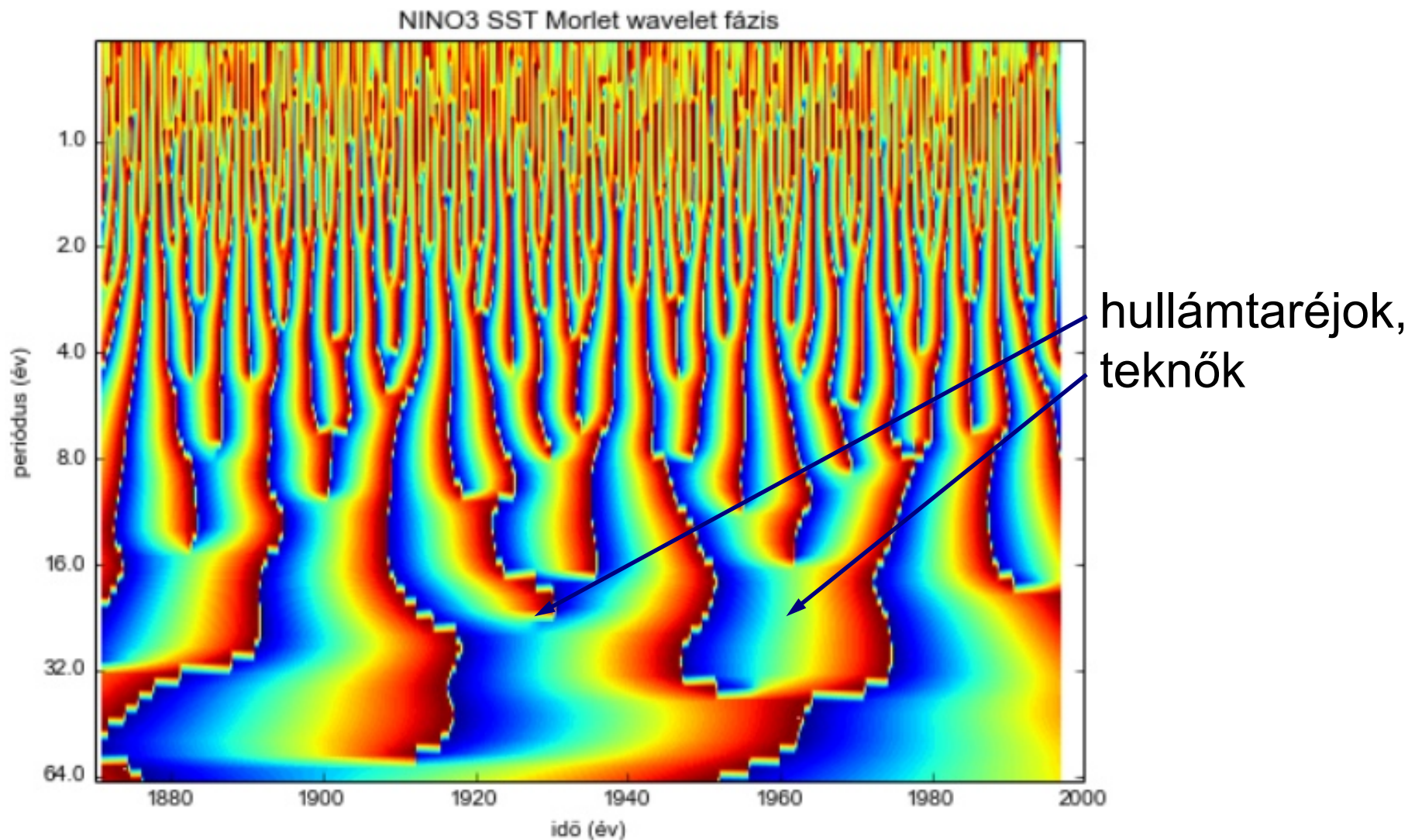
A különböző wavelet spektrumokat könnyebb egybevetni, ha $W_n(s)$ –et normalizáljuk a σ^2 varianciával:

normalizált teljesítmény spektrum: $|W_n(s)|^2 / \sigma^2$

ez a normalizáció a **fehérzajhoz képest vett teljesítményt** adja

a wavelet együtthatók **korreláltak** és van **peremhatás** is

El Niño SST wavelet fázis





5. Konvolúció átlapolódása

- hatáskúp (COI, Cone Of Influence)
- wavelet dekorreláció

Periodikus konvolúció

Mivel az adatsor hossza véges, a wavelet spektrum eleje és vége hibás lesz, mert a Fourier transzformált **periodikus** adatsort tételez fel:

$$W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}$$

Lehetséges megoldások: zérus kitöltés, koszinuszos levágás, stb.

100% zérus kitöltés: nincs periodikus konvolúció – nagy adatmennyiség esetében nem hatékony

< 100% zérus kitöltés a következő bináris számig: $N = 2^m$

→ de a széleken a jel energiája csökkenni fog

Hatáskúp (Cone of Influence, COI)

A hatáskúp (COI) az a része a wavelet spektrumnak, ahol a peremhatás fontossá válik.

specifikusan: a wavelet teljesítmény ACF e -ed részre csökkenésének τ_s ideje az adott skálán (a teljesítmény tehát e^2 -ed részre csökken; $e^2 = 0.135$)

Név	τ_s
Morlet	$2^{1/2} s$
Paul	$2^{-1/2} s$
DOG	$2^{1/2} s$

Wavelet dekorreláció

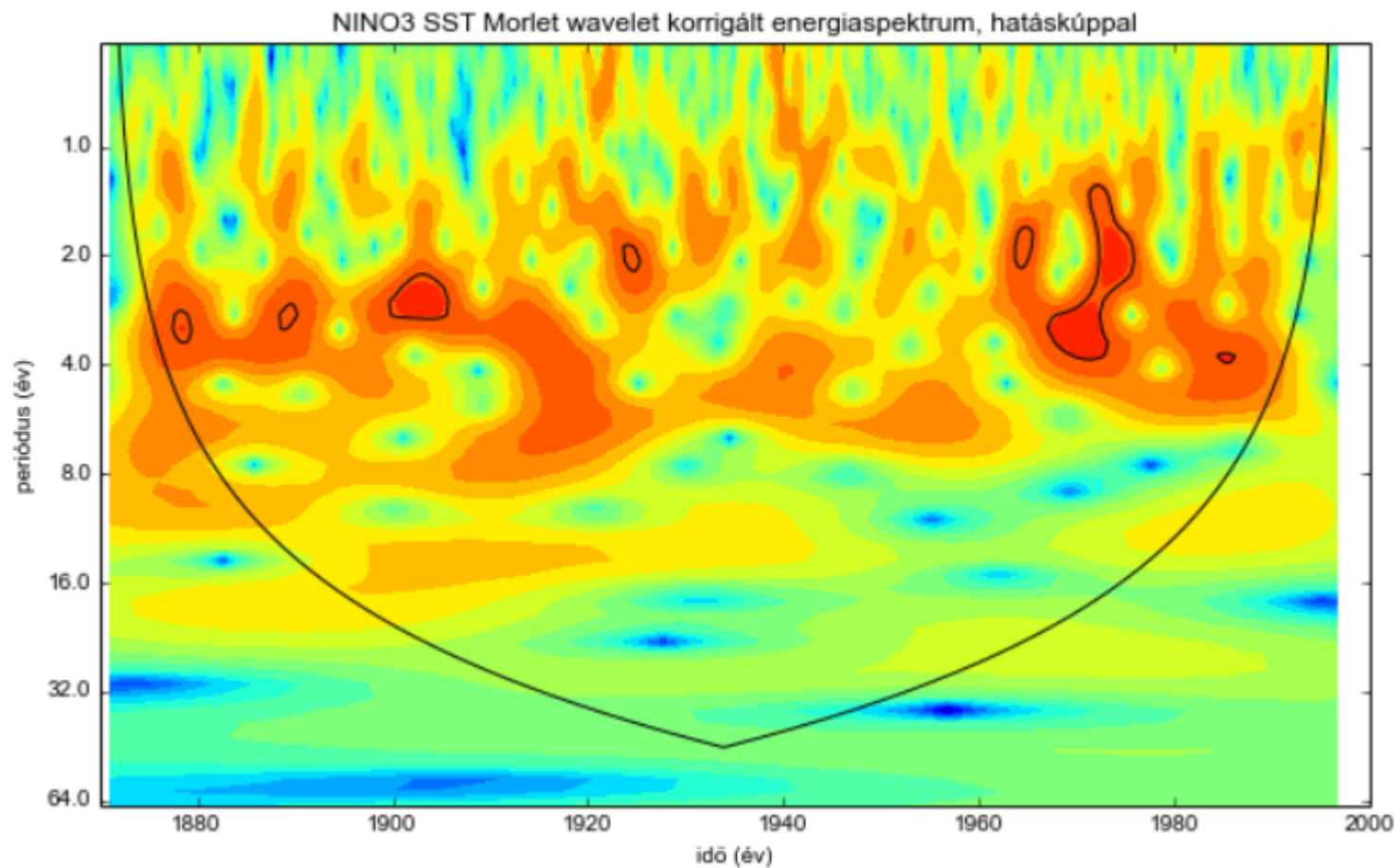
A hatáskúp (COI) az adott skálán információt nyújt egy spektrális csúcs **dekorrelációs idejéről** is.

Ha összevetjük egy csúcs szélességét a dekorrelációs idővel, akkor meg tudjuk különböztetni az adatokban levő **véletlen zajt** az ekvivalens Fourier frekvencián ténylegesen jelen levő hullám összetevőtől.

SST Jupyter munkafüzet:

```
# hatáskúp (COI)  
plt.plot(time, coi, 'k')
```

El Niño SST hatáskúppal



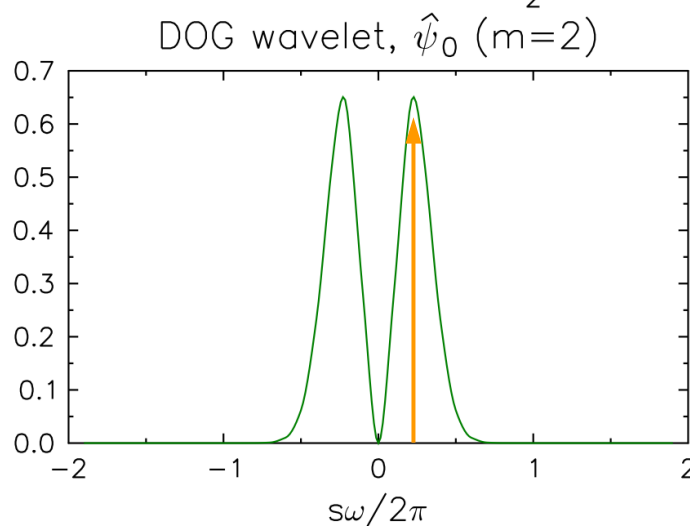
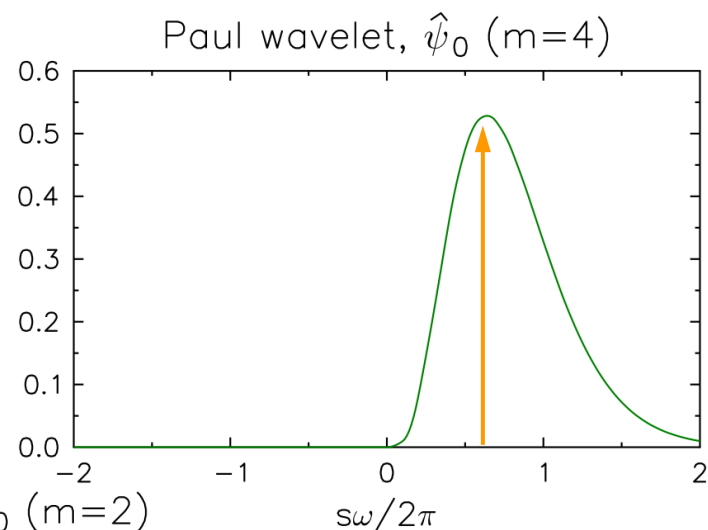
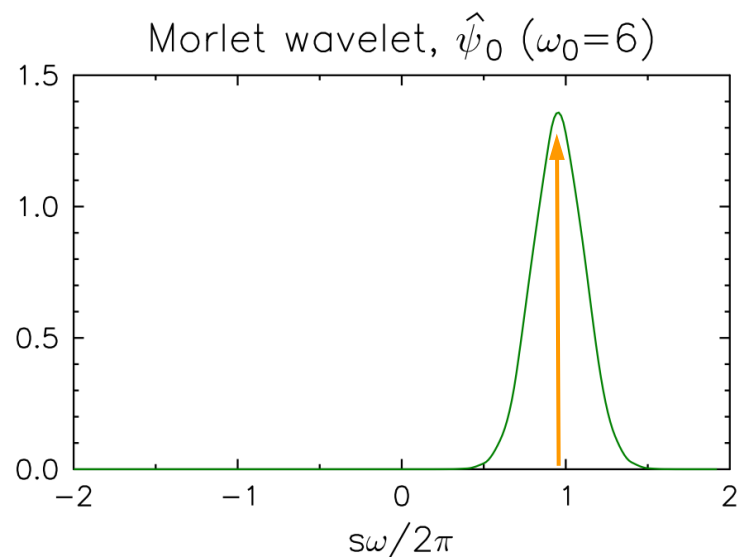


6. CWT és FT viszonya

- skála és Fourier periódus
- waveletek Fourier periódusa

Skála és Fourier periódus

A leány wavelet FT maximuma nem szükségképpen s^{-1} frekvenciájú.



Skála és Fourier periódus

Meyers et al.(1993) nyomán analitikus megoldás adható a skála és az ekvivalens Fourier periódus között.

ismert periódusú koszinusz hullámot írunk be x_k helyébe:

$$W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}$$

milyen s skálán lesz $|W_n(s)|^2$ maximális?

pl. a Morlet waveletre ($\omega_0 = 6$) ez a $\lambda = 1.03s$ értéket adja, ahol λ a Fourier periódus

a Morlet wavelet skálája tehát majdnem azonos a Fourier periódussal

Waveletek Fourier periódusa

Név	λ Fourier periódus
Morlet	$\frac{4\pi s}{\omega_0 + \sqrt{2 + \omega_0^2}}$
Paul	$\frac{4\pi s}{2m + 1}$
DOG	$\frac{2\pi s}{\sqrt{m + 1/2}}$



7. Inverz transzformáció

- skála és Fourier periódus
- waveletek Fourier periódusa

Inverz wavelet transzformáció

Mivel a WT ismert válaszfüggvényű sáváteresztő **szűrő**, ezért az eredeti idősor **rekonstruálható** akár dekonvolúció, akár az inverz szűrő segítségével.

konvolúció (szűrés): $y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(u)g(t - u)du = x(t)*g(t)$

$$Y(\omega) = G(\omega) \cdot X(\omega)$$

dekonvolúció (inverz szűrés): $X(\omega) = \frac{Y(\omega)}{G(\omega)}$

ortogonális WT bázis esetében az inverzió egyszerű

nem ortogonális WT bázis esetében (CWT) az inverzió redundáns: az idősor visszaállítása **sokféle** különböző wavelet függvény segítségével lehetséges

Inverz CWT delta „függvénnyel”

a legegyszerűbb az inverz CWT a delta (δ) „függvénnyel”

a rekonstruált idősor a különböző skálákon vett WT valós részének az összege minden skálára (Farge 1992):

$$x_n = \frac{\delta j \delta t^{1/2}}{C_\delta \psi_0(0)} \sum_{j=0}^J \frac{\operatorname{Re}\{W_n(s_j)\}}{s_j^{1/2}}$$

$\psi_0(0)$ eltávolítja az energia skálázást

$s_j^{1/2}$ a WT-t energia sűrűségre konvertálja

C_δ szorzó a δ „függvény” $\psi_0(\eta)$ segítségével történő rekonstrukciójából adódik (waveletenként más és más)

Ha az eredeti idősor komplex, nem kell W_n valós részét venni

C_δ szorzó meghatározása

$x_n = \delta_{n0}$ idősor Fourier transzformáltja: $\hat{x}_k = N^{-1}$

ezt beírjuk ide: $W_n(s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{x}_k \hat{\psi}^*(s\omega_k) e^{i\omega_k n \delta t}$

$n = 0$ -nál: $W_\delta(s) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}^*(s\omega_k)$

ebből a C_δ szorzó: $C_\delta = \frac{\delta j \delta t^{1/2}}{\psi_0(0)} \sum_{j=0}^J \frac{\operatorname{Re}\{W_\delta(s_j)\}}{s_j^{1/2}}$

A C_δ skálától független és adott waveletre állandó

Waveletek C_δ szorzói

Név	C_δ szorzó
Morlet ($\omega_0 = 6$)	0.776
Paul ($m = 4$)	1.132
DOG ($m = 2$)	3.541
DOG ($m = 6$)	1.966

CWT Parseval tétele

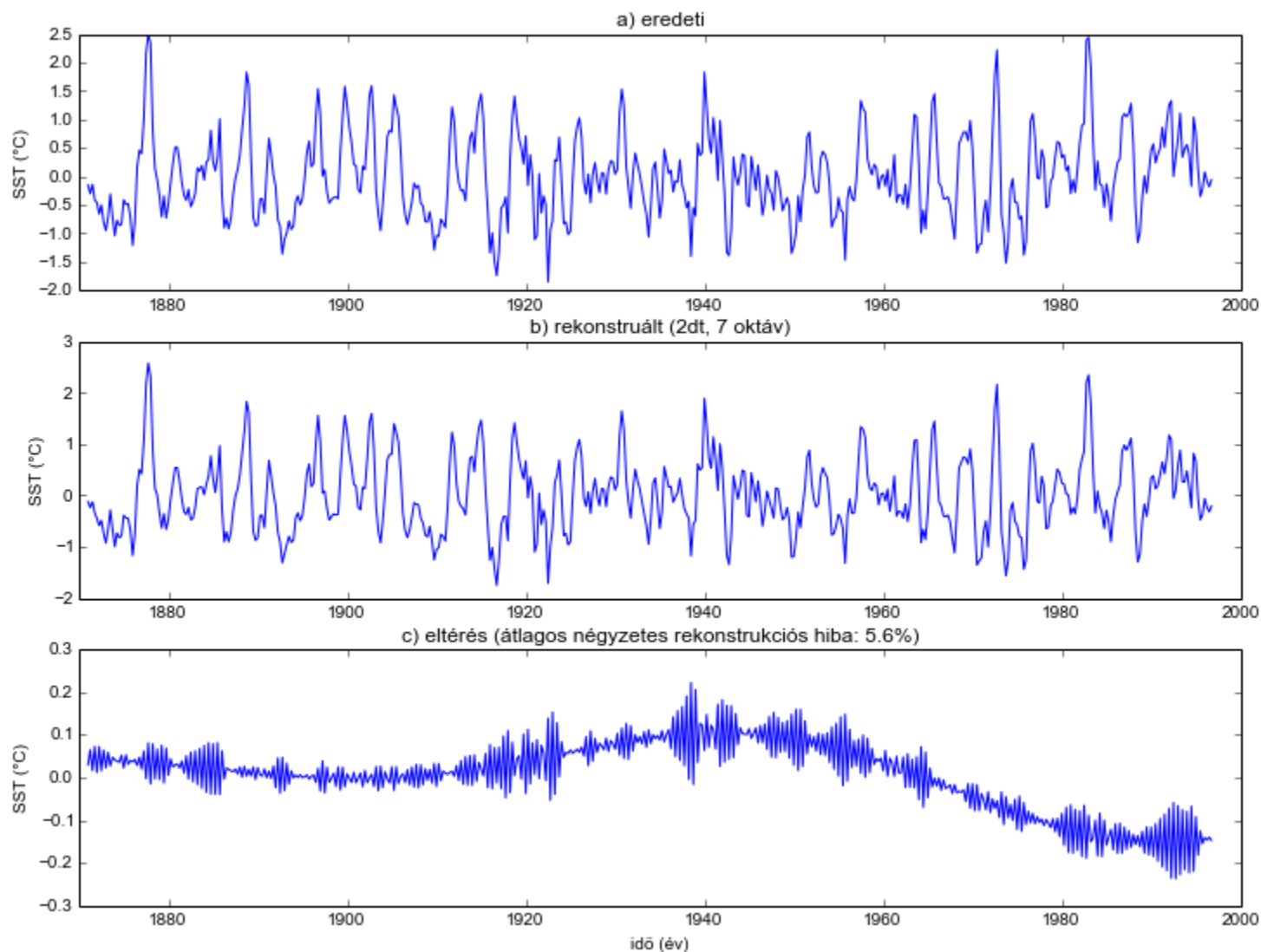
A CWT megőrzi a jel összenergiáját:

$$\sigma^2 = \frac{\delta j \delta t}{C_{\delta} N} \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{j=0}^J \frac{|W_n(s_j)|^2}{s_j}$$

(σ a jel varianciája)

Az inverz CWT és a Parseval tétel használható a WT számítás pontosságának ellenőrzésére és arra, hogy ellenőrizzük, s_0 ($\sim 2\delta t$) és δj (részoktáv) elég kicsik-e?

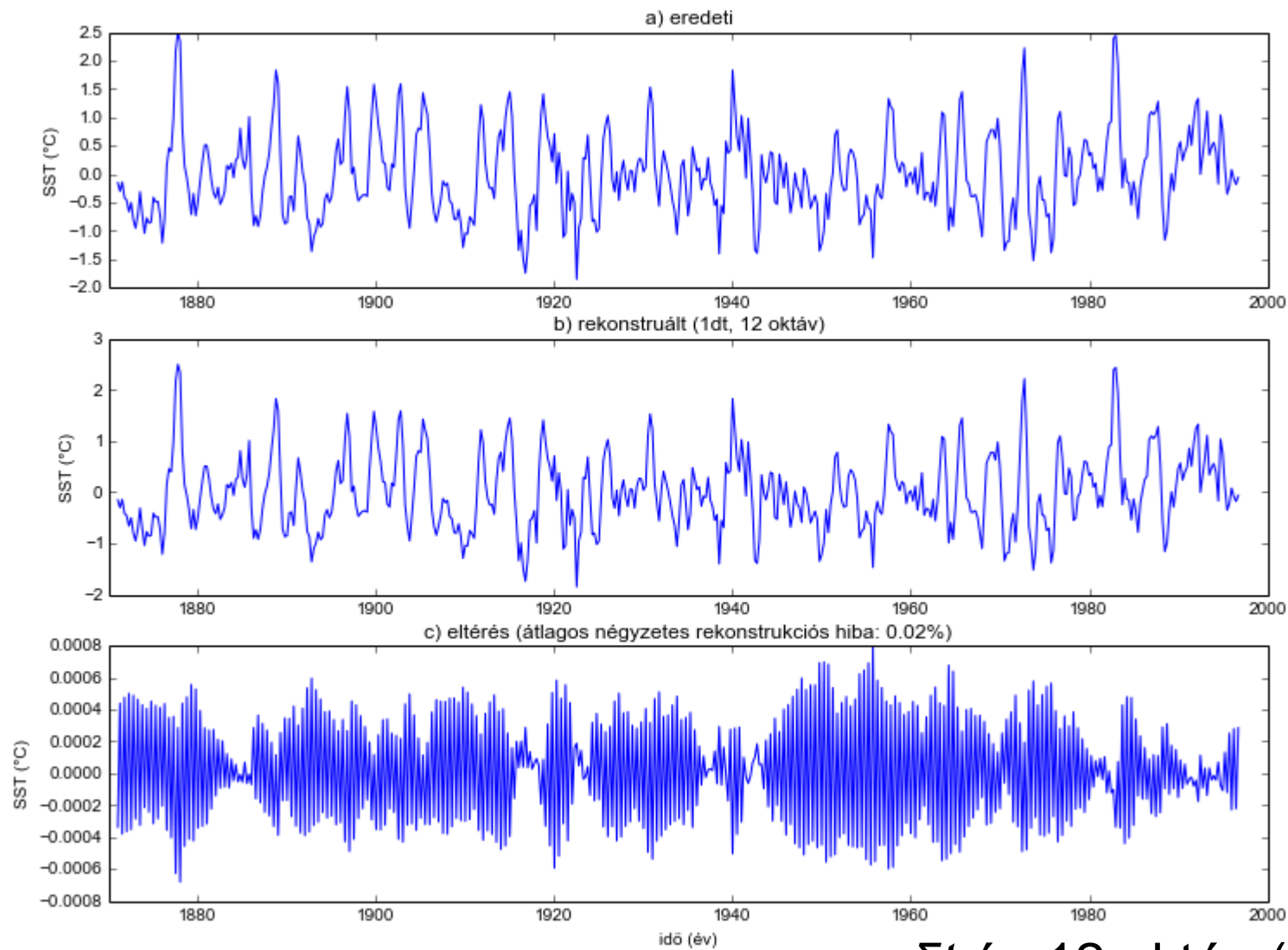
Inverz CWT El Niño SST



```
# inverz wavelet transzformáció  
x = icwt(wave, scale, dt, dj, 'morlet')
```

$s_0 = 2\delta t$ és 7 oktáv (5.6%)

Inverz CWT El Niño SST



$$s_0 = \delta t \text{ és } 12 \text{ oktáv } (0.02\%)$$

További témák

- Szűrés waveletekkel
- Globális wavelet spektrum (idő és skála átlagolás, simítás)
- Wavelet kereszt-spektrum, koherencia
- Többváltozós (komplex) folytonos WT
- Diszkrét diadikus WT, skálázó függvények
- Sokskálás analízis (MRA)
- Operátor tömörítés waveletekkel
- Saját adatok elemzése waveletekkel