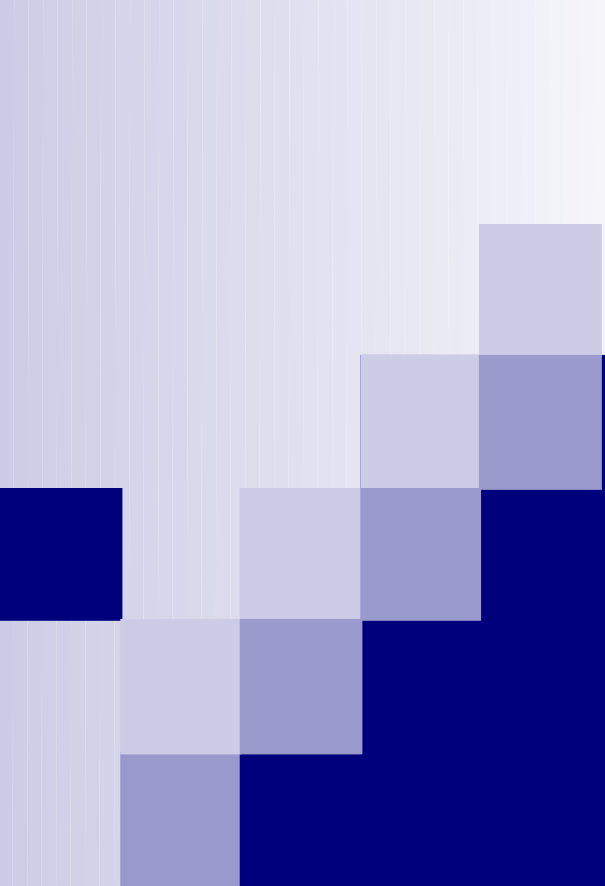




Digitális szűrők

Korszerű matematikai
módszerek a geodéziában
2019.11.04.



Tartalom

- digitális szűrők, FIR, IIR
- z-transzformáció
- kerék gyorsulás adatok szűrése

Szűrés

- Sztochasztikus folyamatról (jel) a „zaj” leválasztása
- Jel helyreállítása, torzulás megszüntetése



szűrő: lineáris rendszer

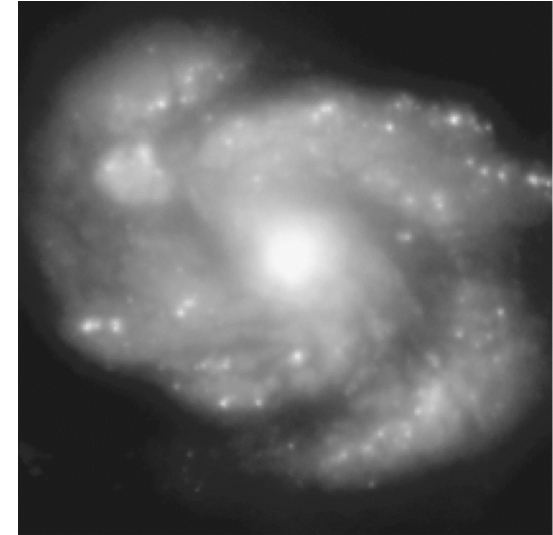
$$v_{1b}(t) \Rightarrow v_{1k}(t)$$

$$v_{2b}(t) \Rightarrow v_{2k}(t)$$

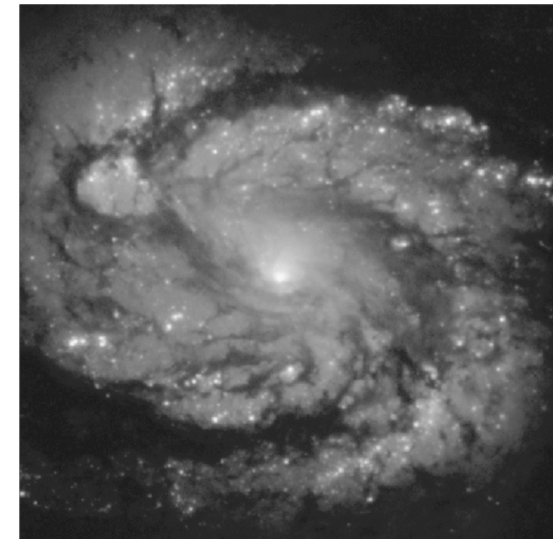
$$v_{1b}(t) + v_{2b}(t) \Rightarrow v_{1k}(t) + v_{2k}(t)$$

Példák szűrésre

- híd GPS mozgásvizsgálata
 - gépjárműforgalom és hőmérséklet okozta deformációk szétválasztása
- fókuszálatlan, bemozdult, életlen kép „kiélesítése”
 - Hubble űrtávcső tükrörcsiszolási hibája ($2.2\ \mu\text{m}$)

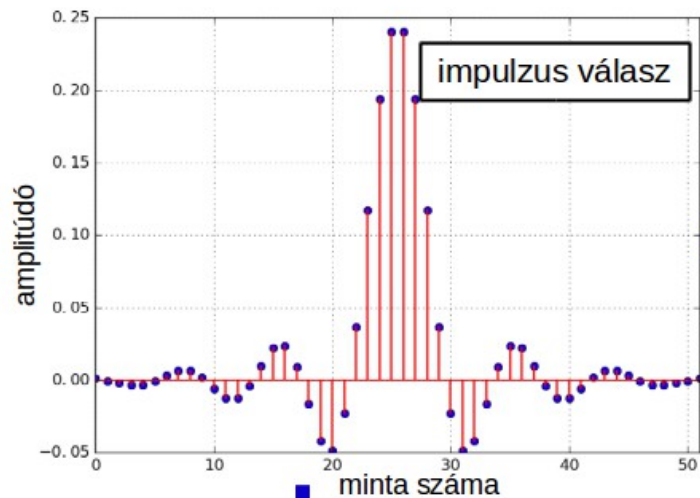


(a)

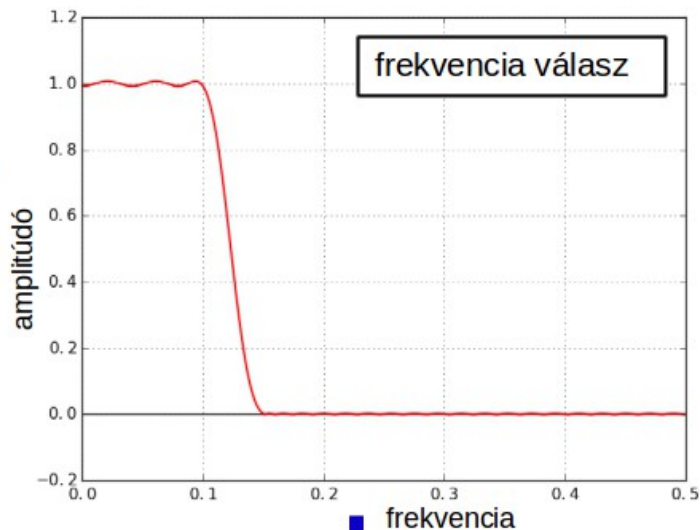


(b)

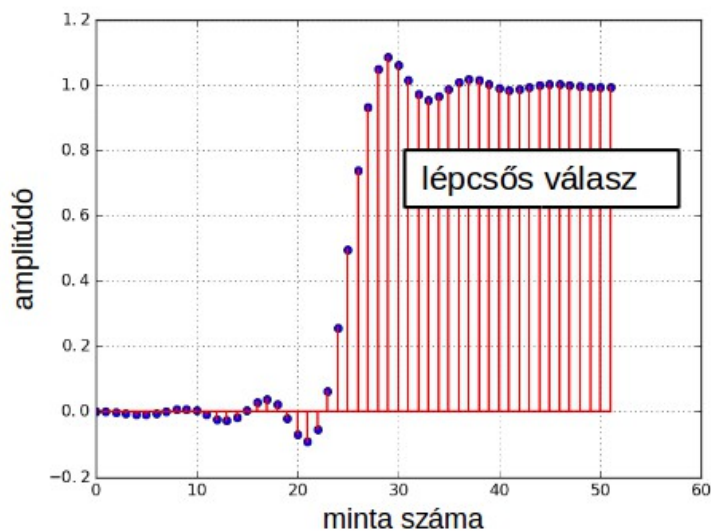
Digitális szűrők



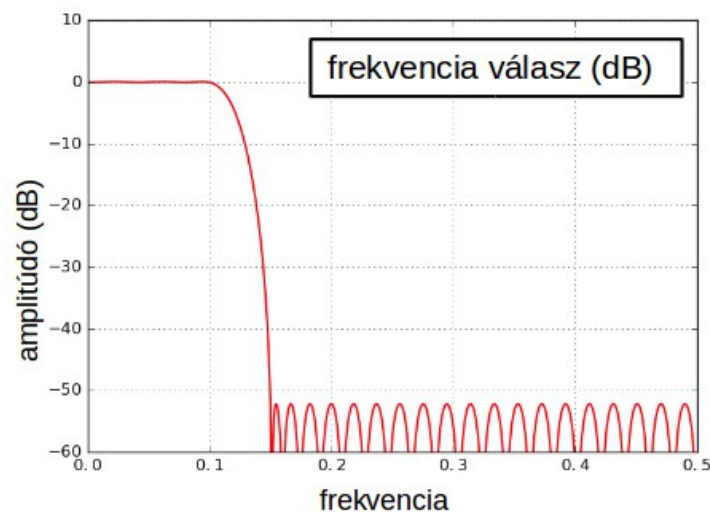
FFT



integrálás



$20 \log()$



bel, decibel

- bel = 10-szeres **teljesítmény** növekedés
- decibel (dB) = a bel 10-ed része
10 dB = 10-szeres teljesítmény
- **amplitúdó** decibel = 20dB 10-szeres teljesítmény
-3 dB = a jel amplitúdó 0.707-szeresére, a jel teljesítménye felére csökkent

Digitális szűrők típusai

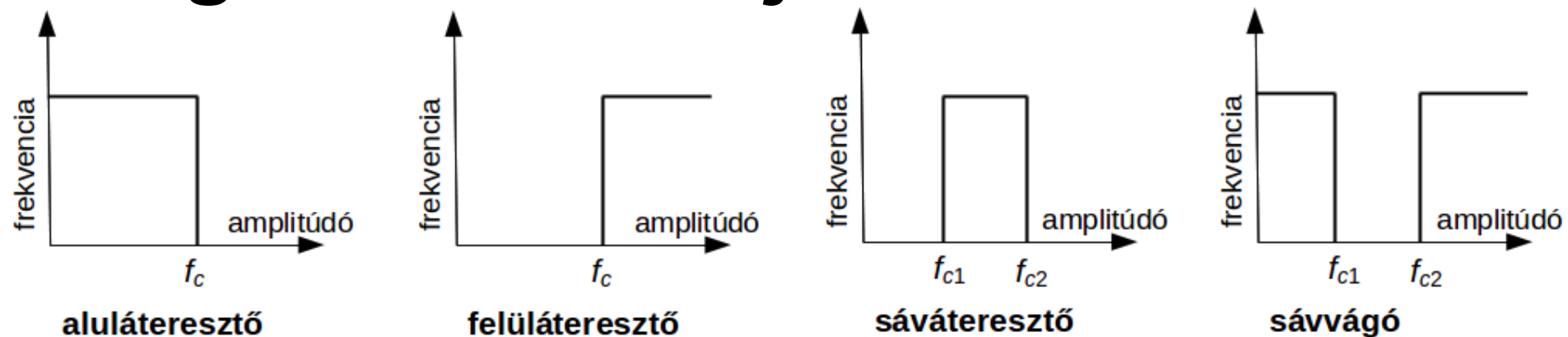
- konvolúciós szűrők

- ☐ a szűrő magfüggvényével számított digitális konvolúció
- ☐ véges impulzusválaszú (**FIR**) szűrők

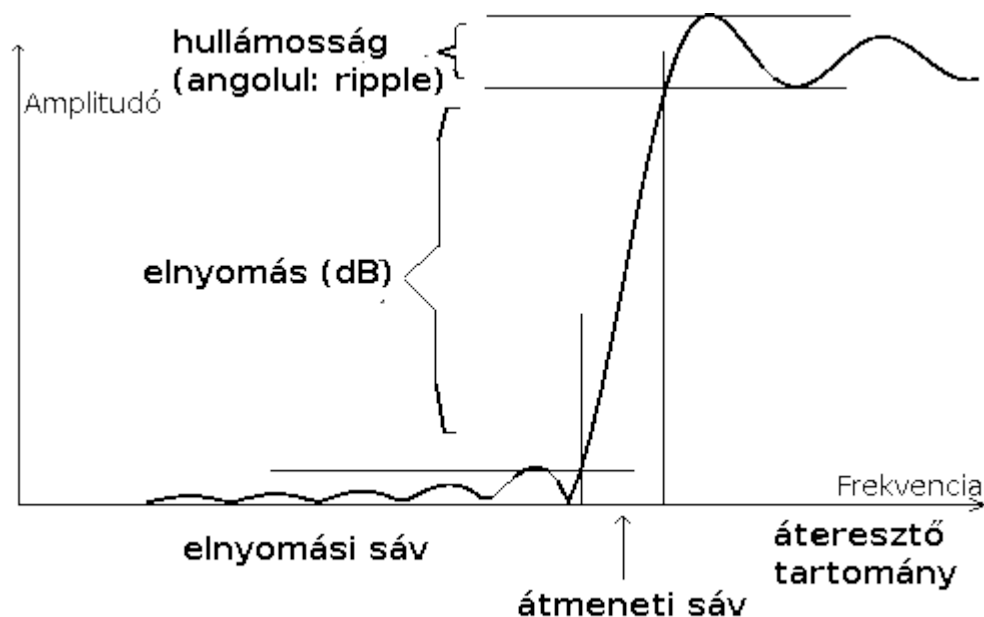
- rekurziós szűrők

- ☐ kimenet és bemenet súlyozott összege
- ☐ végtelen impulzusválaszú (**IIR**) szűrők

Digitális szűrők jellemzői



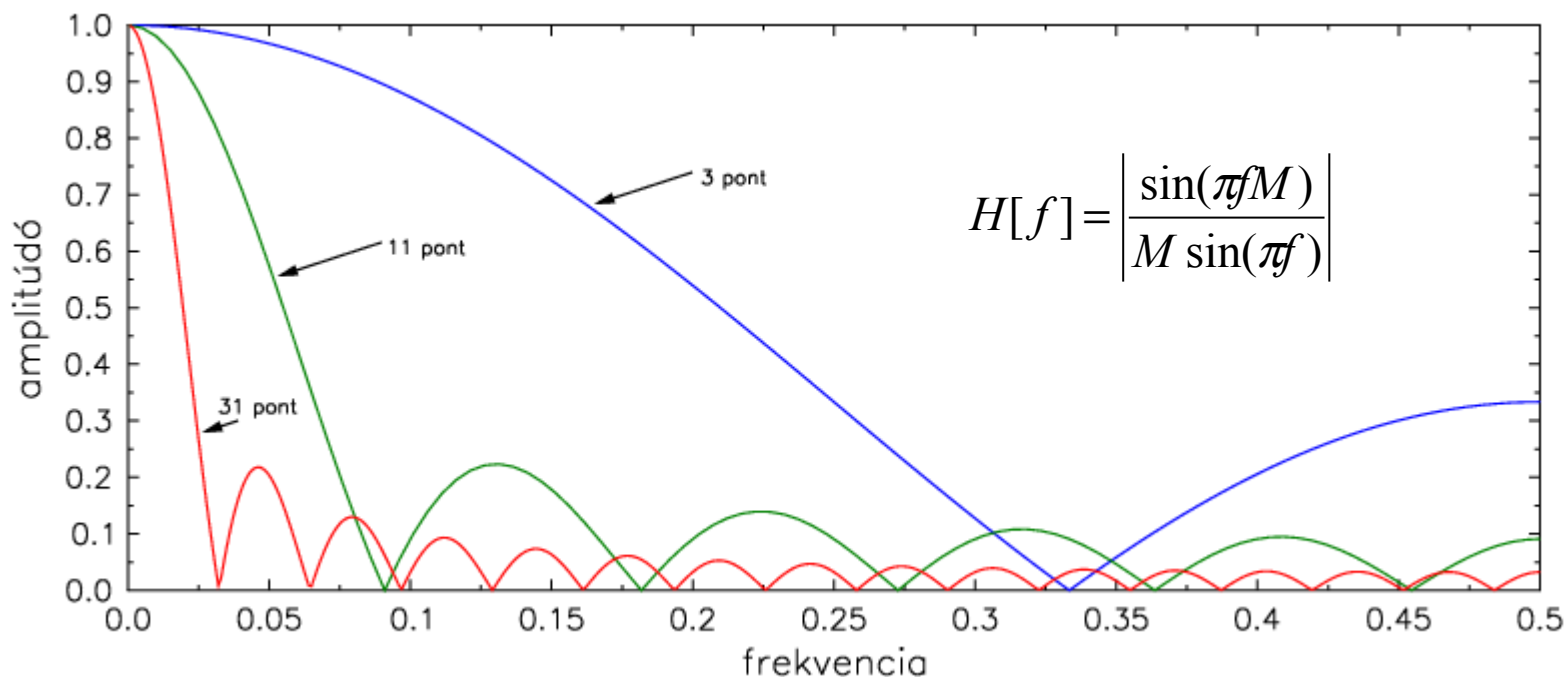
az aluláteresztő szűrőből a többi előállítható (tükrözéssel és kombinálással)



Mozgóátlag (MA) szűrők

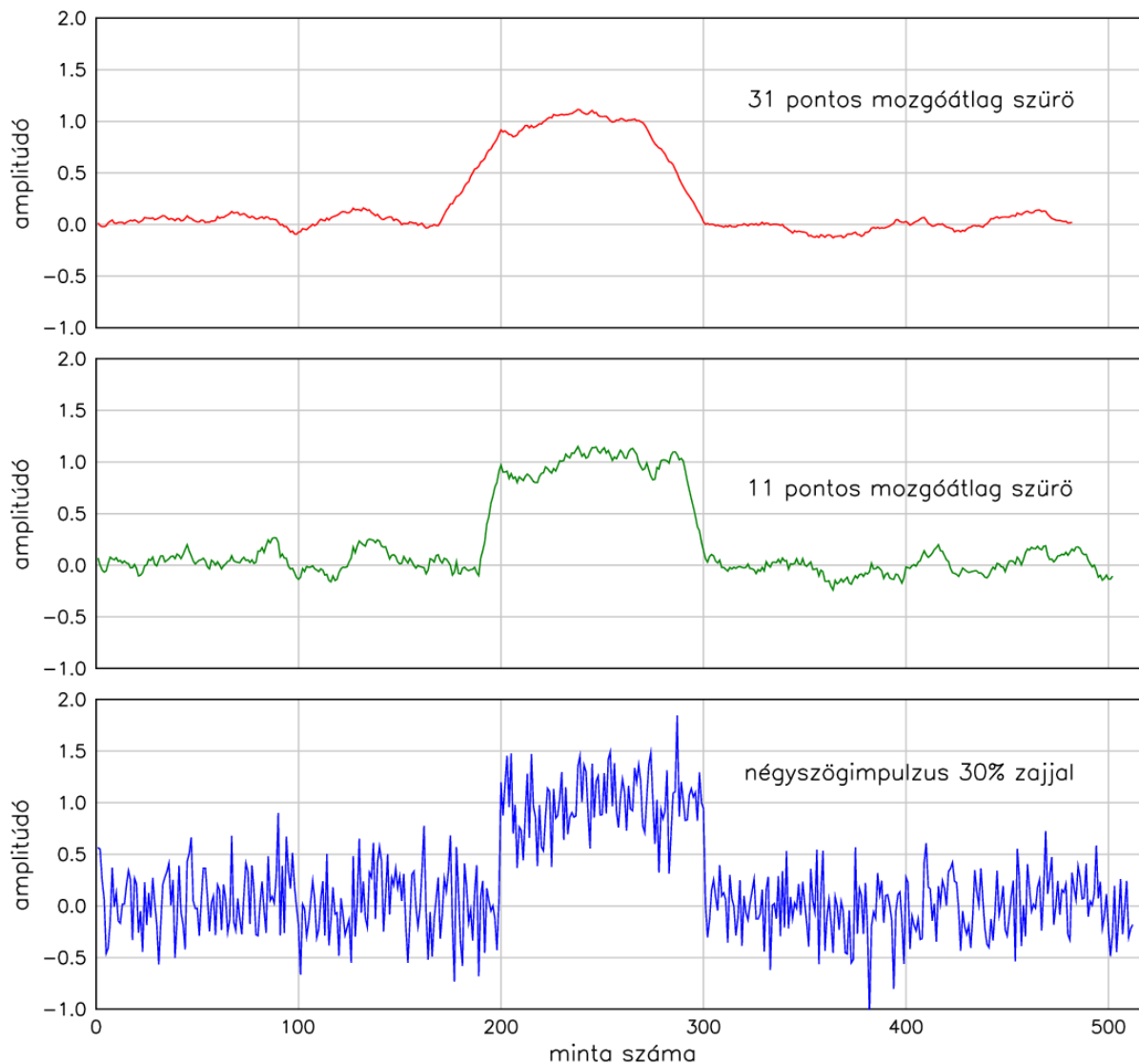
az $y[]$ kimenet a bemenő $x[]$ jel M pontjának az átlagolása:

$$y[i] = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} x[i+j] \quad i = 0, 1, \dots,$$



A mozgóátlag szűrők frekvencia átviteli függvénye

Példa mozgóátlag szűrésre



Konvolúciós (FIR) szűrők

szűrő egyenlet:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] x[n-k]$$

$h[k]$: a szűrő impulzus válasza (magfüggvénye)

- lineáris fázis
- mindig stabil
- egyszerűbb tervezési módszerek
- éles levágáshoz nagyon hosszú magfüggvényű FIR szűrő kell
- adott szűrő specifikációhoz nehezebb a tervezése

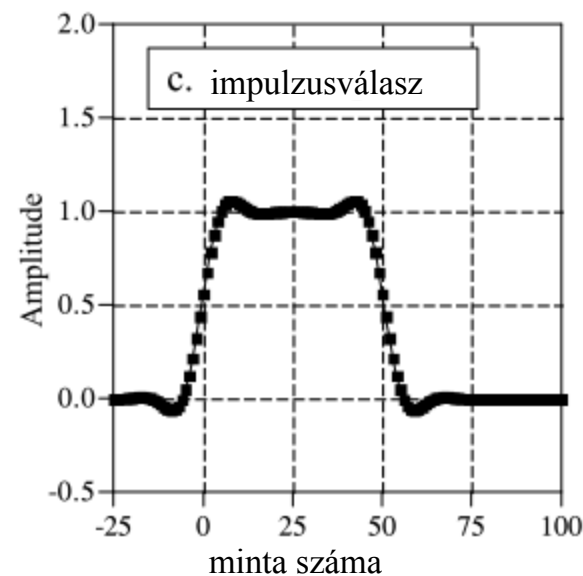
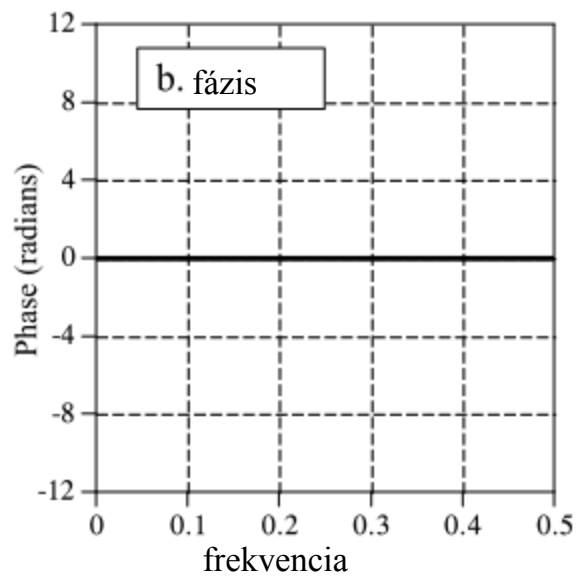
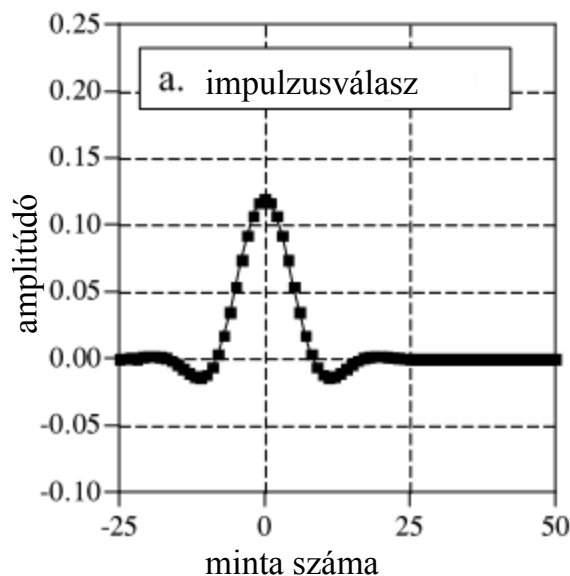
Szimmetrikus FIR szűrő egyenlet

szűrő egyenlet szimmetrikus alakja:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[|k|] x[n-k]$$

$h[k]$: a szűrő szimmetrikus impulzusválasza (**magfüggvénye**)

■ zérus fázisú szűrő



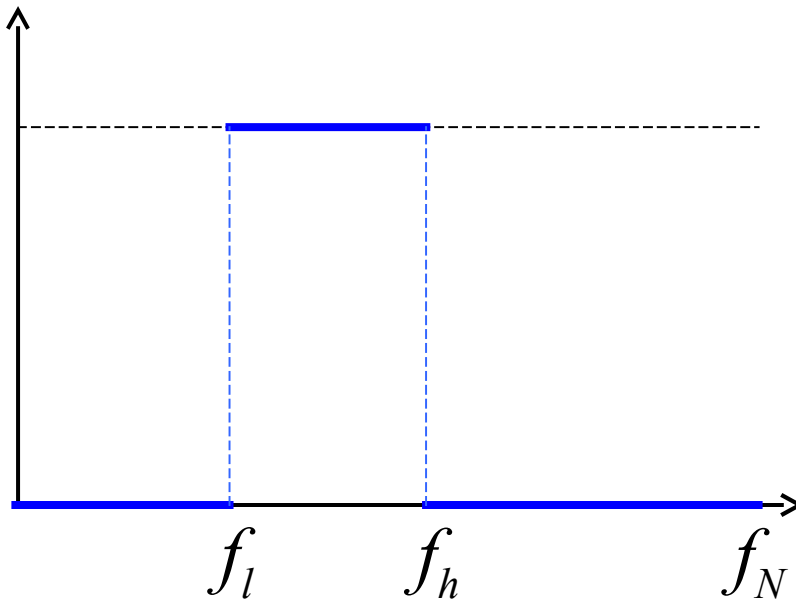
FIR szűrő frekvencia válasz függvénye

$$H(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-i2\pi f k \Delta t}$$

- szűrő együtthatók (f_N : Nyquist frekvencia):

$$h[k] = \Delta t \int_{-f_N}^{f_N} H(f) e^{-i2\pi f k \Delta t} df$$

Ideális sáváteresztő FIR szűrő



- ideális frekvencia
válasz függvény

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[|k|] x[n-k]$$

$$H(f) = \begin{cases} 0: & 0 \leq |f| < f_l \\ 1: & f_l \leq |f| < f_h \\ 0: & f_h \leq |f| < f_N \end{cases}$$

Szűrő együttthatók

$$h[k] = \Delta t \int_{-f_N}^{f_N} H(f) e^{-i2\pi f k \Delta t} df$$

$$h[k] = 2\Delta t \int_{f_l}^{f_h} \cos(2\pi f k \Delta t) df$$

$$h[k] = \frac{\sin(2\pi f k \Delta t)}{\pi k} \bigg|_{f_l}^{f_h} \quad k \in [-\infty, \infty]$$

Csonkított szimmetrikus FIR szűrő

$$y[n] = \sum_{k=-N}^N h[|k|] x[n-k]$$

- szűrő együtthatók:

$$h[k] = \left. \frac{\sin(2\pi f k \Delta t)}{\pi k} \right|_{f_l}^{f_h}$$

- frekvencia válasz függvény

$$H(f) = \sum_{k=-N}^N h[k] e^{-i2\pi f k \Delta t}$$

Rekurziós (IIR) szűrők

rekurziós egyenlet:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + a_3x[n-3] + \dots \\ + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] + b_3y[n-3] + \dots$$

az $a_0, a_1, \dots, b_1, b_2, \dots$ a szűrő (rekurziós) együtthatók

egypólusú rekurziós szűrő: csak a_0 és b_1 együtthatók vannak

a rekurziós szűrőket a ***z-transzformáció*** segítségével lehet megérteni

Egypólusú rekurziós szűrők

rekurziós egyenlet:

$$y[n] = a_0 x[n] + a_1 x[n-1] + b_1 y[n-1]$$

egypólusú **aluláteresztő** szűrő

x paraméter: csökkenési ráta

$$a_0 = 1 - x, \quad a_1 = 0, \quad b_1 = x$$

egypólusú **felüláteresztő** szűrő

x paraméter: csökkenési ráta

$$a_0 = (1 + x)/2, \quad a_1 = -(1 + x)/2, \quad b_1 = x$$

a -3dB -hez tartozó f_c
levágási frekvencia

$$x = e^{-2\pi f_c}$$

a szűrő d időállandója

$$x = e^{-1/d}$$

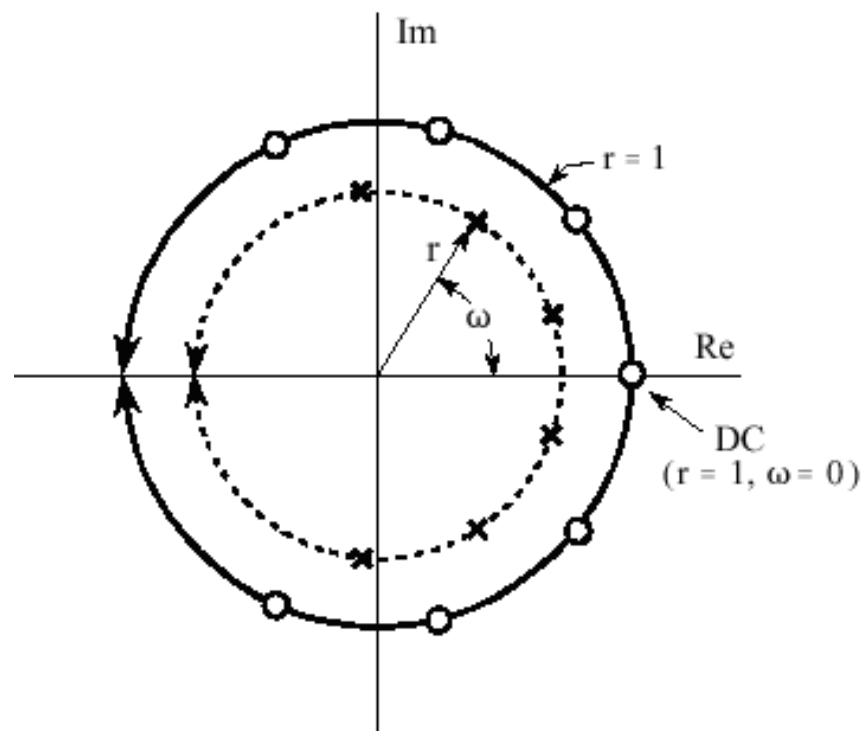
z-transzformáció

egy $x[n]$ sorozat z-transzformáltja:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

a z komplex változó tartománya
két poláris változóval,
 r -rel és ω -val adható meg:

$$z = re^{-j\omega}$$



IIR szűrő z-transzformáltja

az egyenlet mindkét oldalát z-transzformáljuk:

$$y[n] = a_0x[n] + a_1x[n-1] + a_2x[n-2] + a_3x[n-3] + \dots \\ + b_1y[n-1] + b_2y[n-2] + b_3y[n-3] + \dots$$

az $y[]$ és $x[]$ z-transzformáltjait osztva a rendszer **impulzusátviteli függvényét** kapjuk:

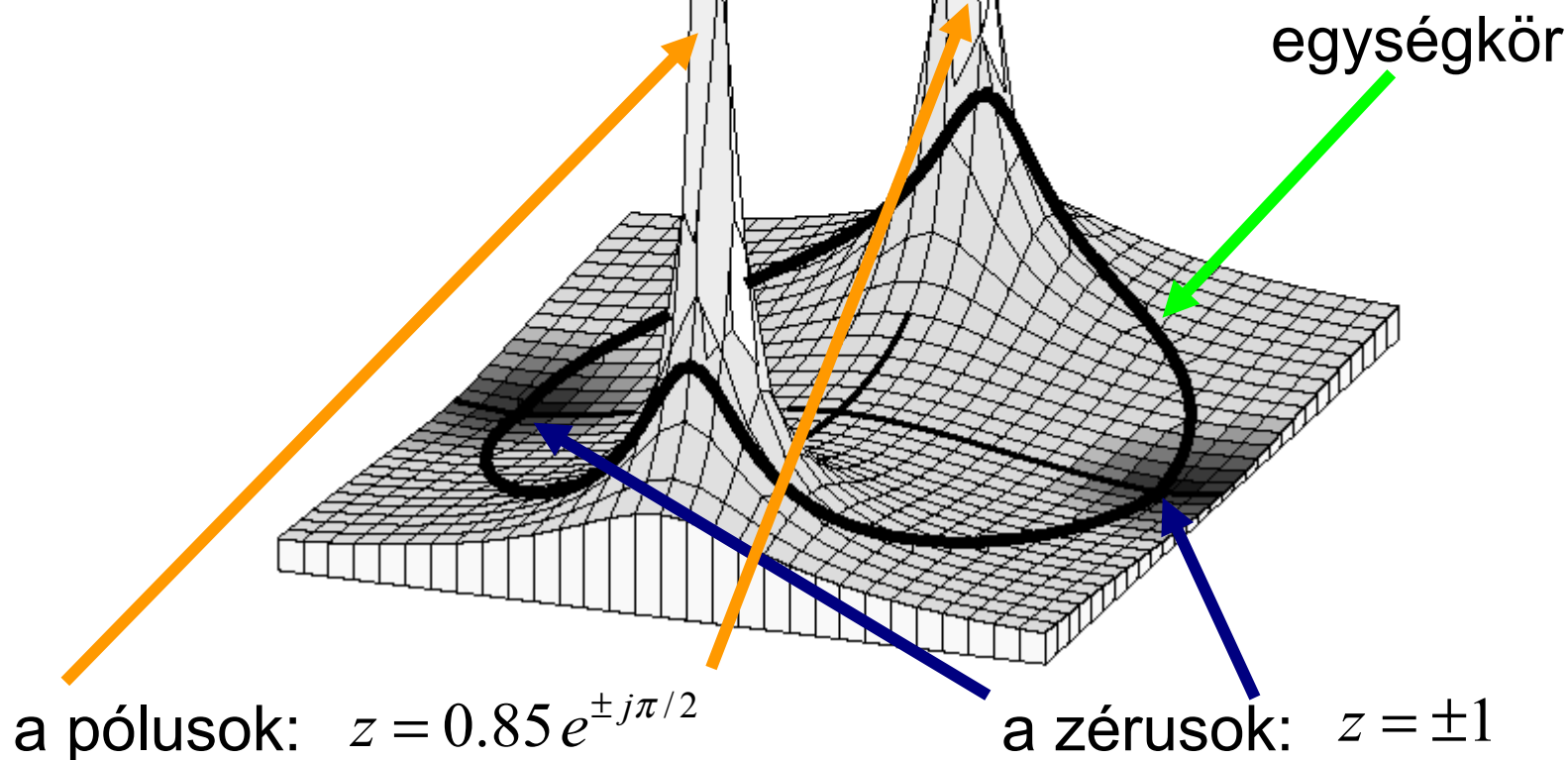
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1z^{-1} + a_2z^{-2} + a_3z^{-3} + \dots}{1 - b_1z^{-1} - b_2z^{-2} - b_3z^{-3} - \dots}$$

a szűrő együtthatókból az átviteli függvény kiszámítható

z-sík és átviteli függvény

$$H[z] = \frac{1 - z^{-2}}{1 + 0.7225z^{-2}}$$

$$H[z] = \frac{(z+1)(z-1)}{(z+0.85i)(z-0.85i)}$$



Pólusok és zérusok

A z-síkon az átviteli függvény jellemzői a *pólusok* és *zérusok* :

$$H(z) = \frac{(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3) \cdots}{(z - p_1)(z - p_2)(z - p_3) \cdots}$$

a $p_1, p_2, p_3, \dots$ pólusok és $z_1, z_2, z_3, \dots$ zérusok
komplex számok

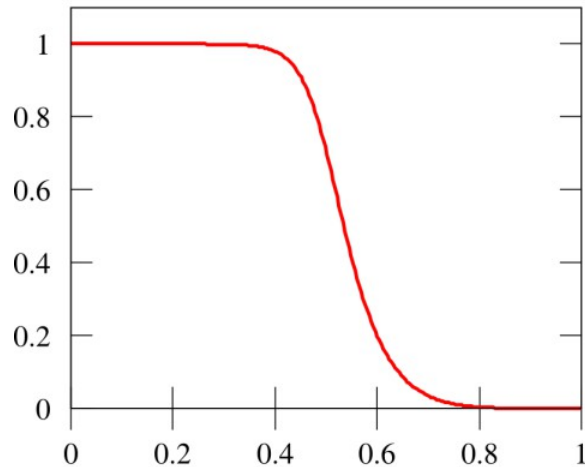
$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + a_3 z^{-3} + \cdots}{1 - b_1 z^{-1} - b_2 z^{-2} - b_3 z^{-3} - \cdots}$$

a szűrő együtthatókból az átviteli függvény kiszámítható

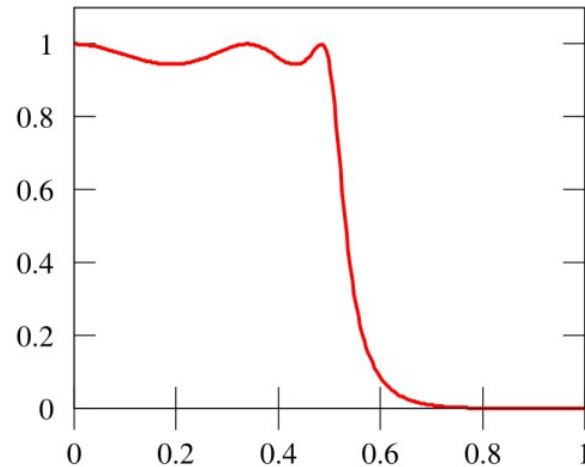
Szűrő típusok

frekvencia
válasz függvények

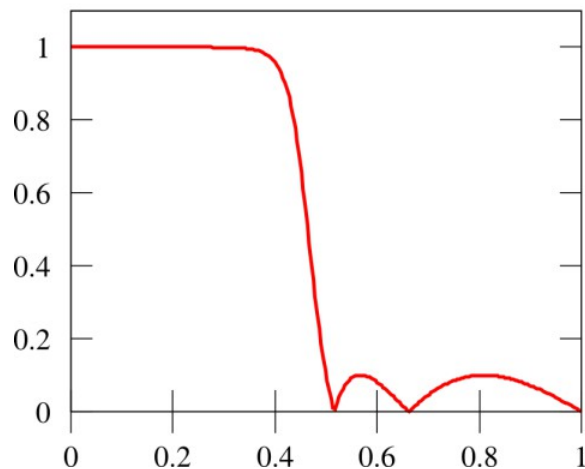
Butterworth



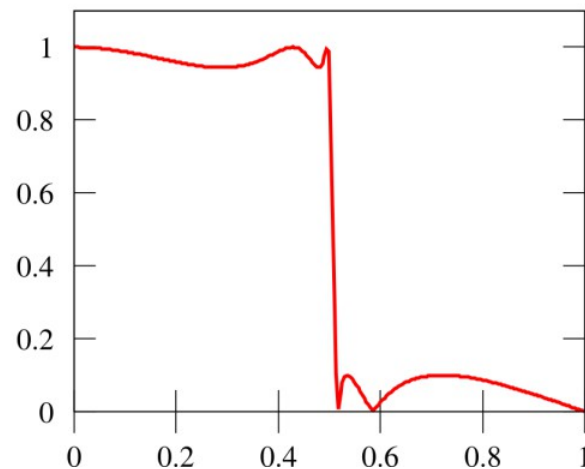
Csebisev, 1.típus



Csebisev, 2.típus



Elliptikus



IIR szűrő példa – Matlab

$$\frac{1 - 0.45z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$y[n] = 0.9y[n-1] - 0.81y[n-2] + x[n] - 0.45x[n-1]$$

```
aa = [ 1, -0.9, 0.81 ];
```

```
bb = [ 1, -0.45 ];
```

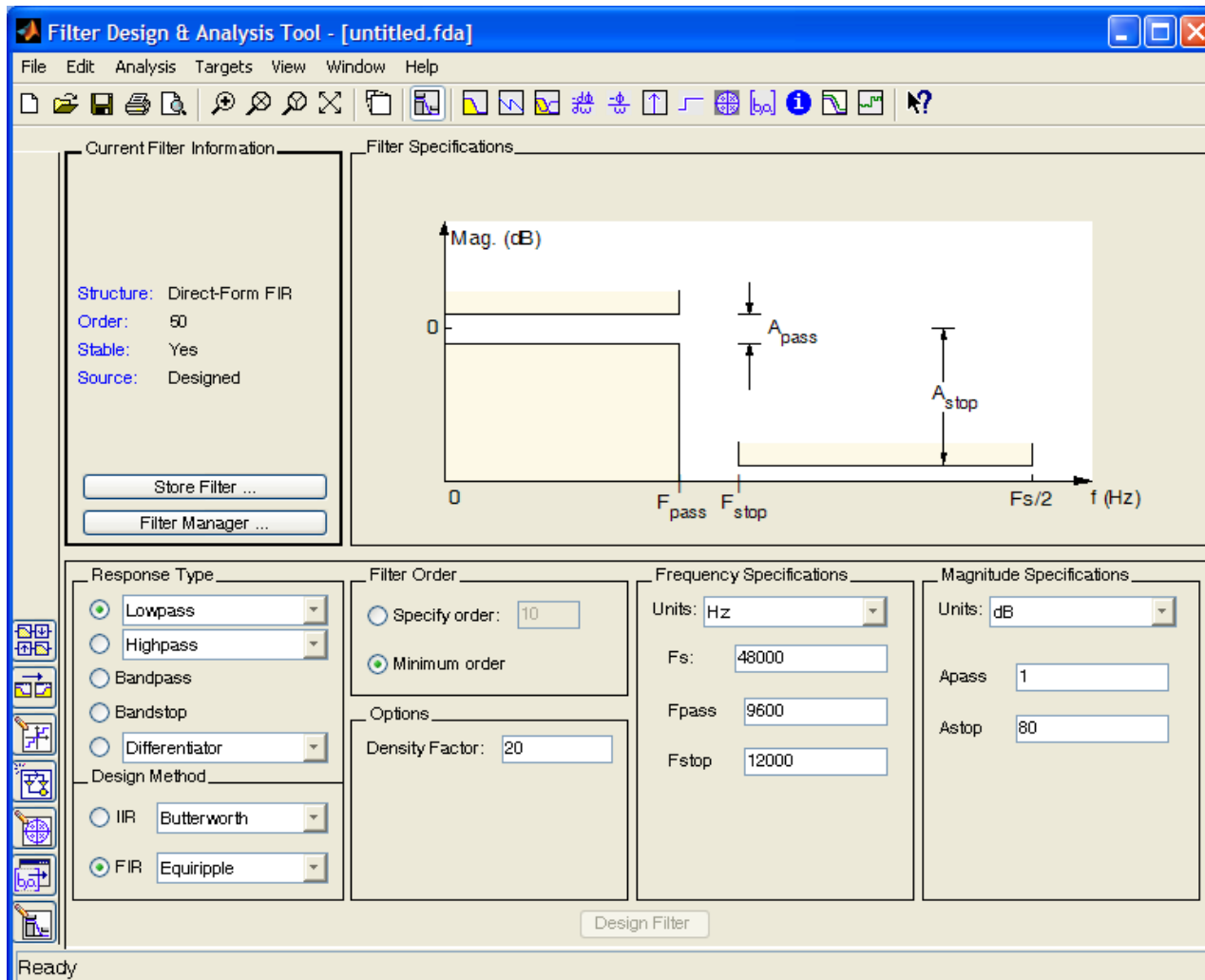
```
nn = -2:19;
```

```
hh = filter( bb, aa, (nn==0) );
```

```
HH = freqz( bb, aa, [-pi:pi/100:pi] );
```

Szűrőtervezés

- Matlab grafikus **fdatool**:



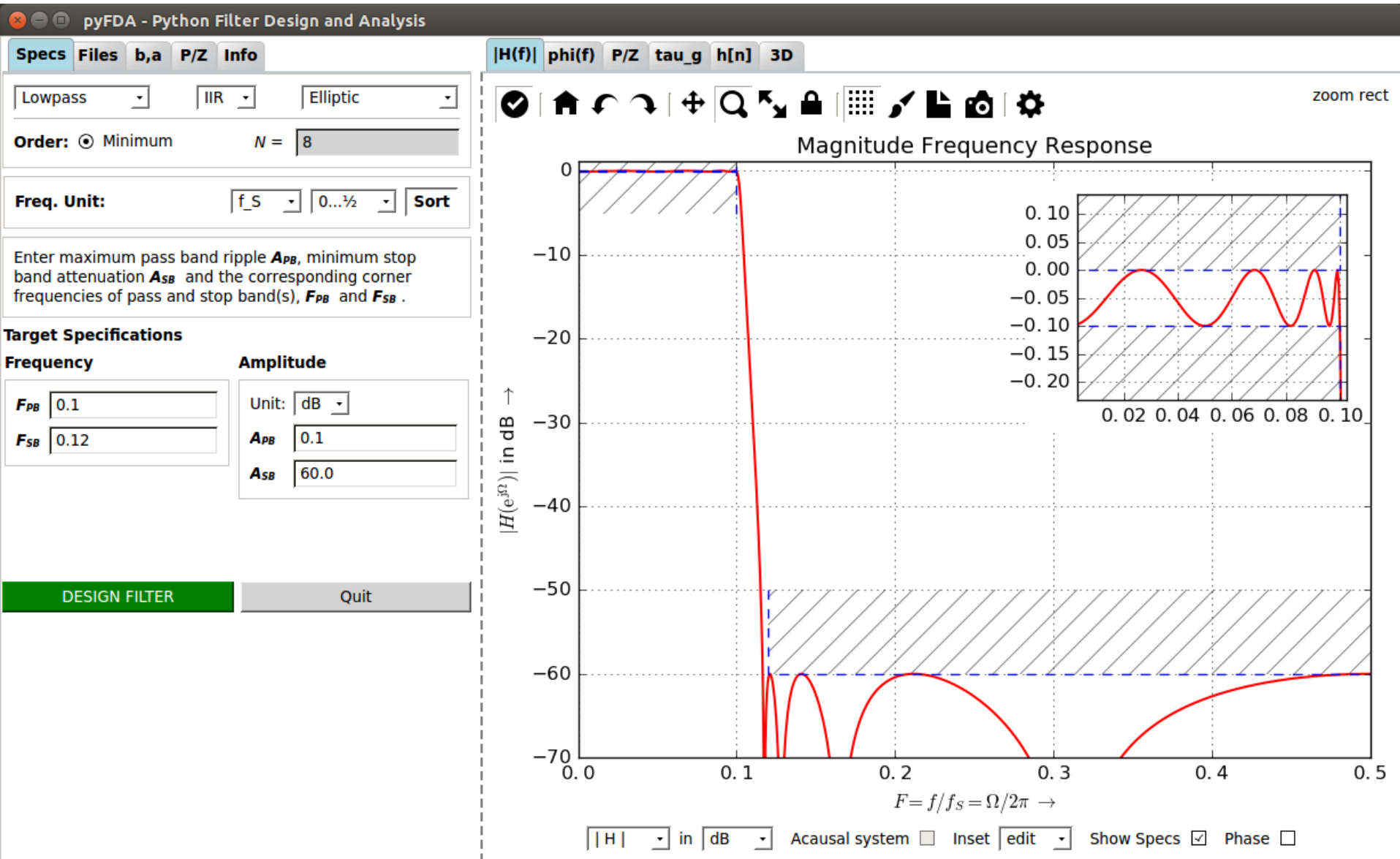
IIR szűrő példa – Python

$$\frac{1 - 0.45z^{-1}}{1 - 0.9z^{-1} + 0.81z^{-2}}$$

$$y[n] = 0.9y[n-1] - 0.81y[n-2] + x[n] - 0.45x[n-1]$$

```
import numpy as np
from scipy import signal
aa = [ 1, -0.9, 0.81 ]
bb = [ 1, -0.45 ]
nn = np.zeros(22); nn[2]=1
hh = signal.lfilter( bb, aa, nn )
HH = signal.freqz(bb, aa, worN=np.arange(
    -np.pi, np.pi, np.pi/100))
```

Szűrőtervezés: Python grafikus pyFDA:



Kerék gyorsulás adatok szűrése

■ Jupyter munkafüzet Python kóddal

<https://nbviewer.jupyter.org/github/gyulat/Filter/blob/master/DigiFilt.ipynb>

```
- In [30]: axf1 = signal.lfilter(a,1,axi)
ayf1 = signal.lfilter(a,1,ayi)

plt.figure(figsize=(12, 8))
plt.hold(True)
plt.plot(tint, axf1, label='ax', color='b')
plt.plot(tint, ayf1, label='ay', color='r')
plt.xlim(xlim[:])
plt.xlabel('idő (s)')
plt.ylabel('m/s^2')
plt.title('kerék gyorsulás, FIR szűrés után')
plt.legend()
plt.show()
```

