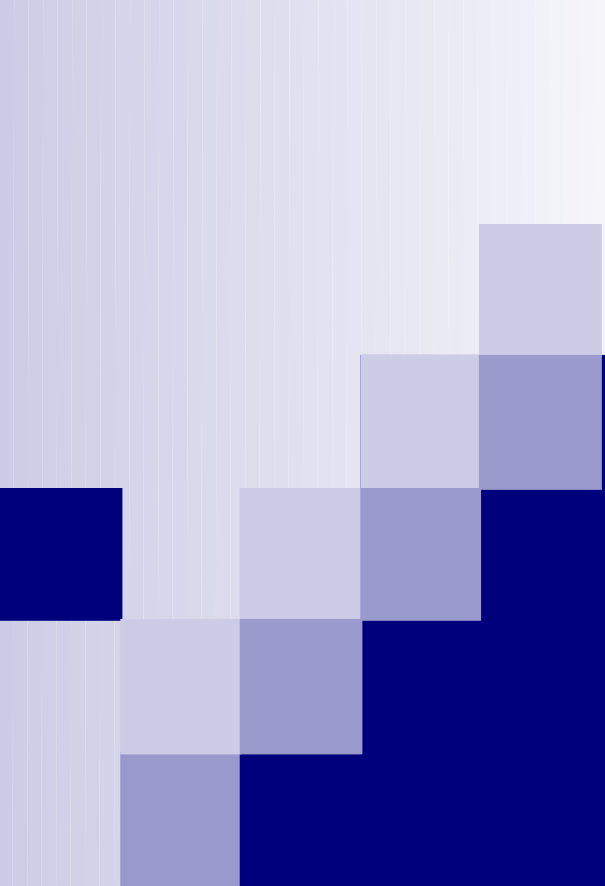




PSD becslés

Korszerű matematikai
módszerek a geodéziában
2019.11.04.

Tartalom

- sztochasztikus folyamatok
- teljesítménysűrűség spektrum
- szűrt jel PSD
- PSD becslési módszerek

Sztochasztikus folyamat frekvencia összetevői

- folytonos jel Fourier transzformáltja: frekvencia összetevőkre bontás

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

- idősor esetében (diszkrét időpontok) a spektrum periódikus

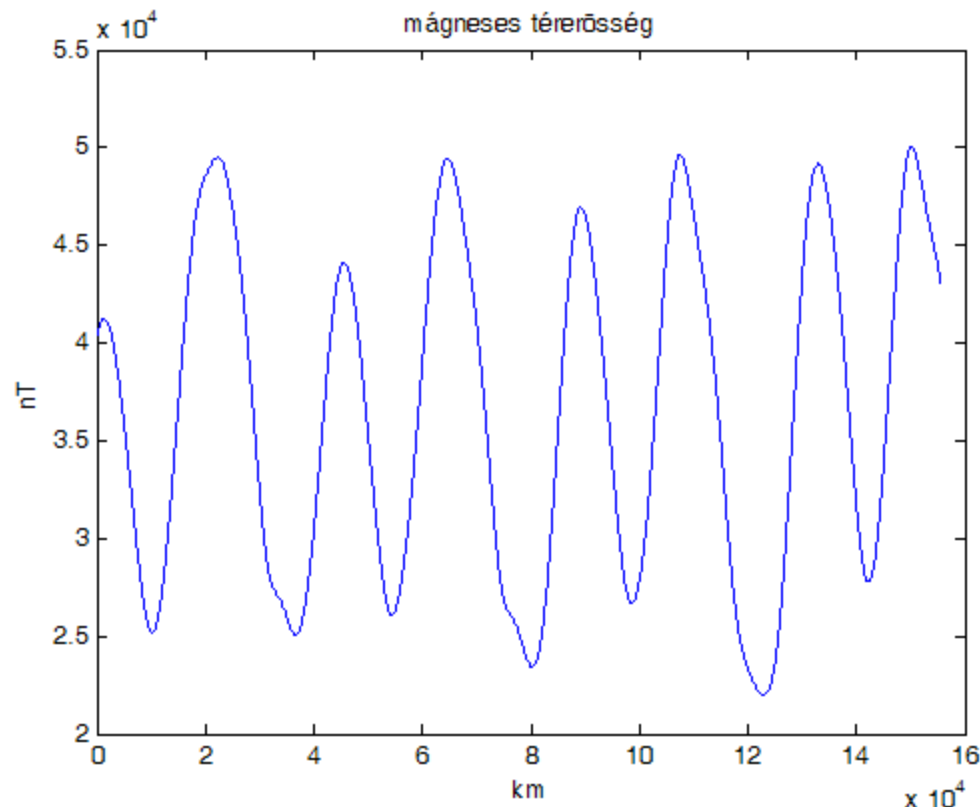
$$X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi i f n} \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

- idősor rekonstrukciója: $x_n = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2\pi i f n} df$

Példa: Magsat műhold adatai

- **Magsat** (**M**agnetic **F**ield **S**atellite, 1979-80) mágneses térerősség mérései

```
% MagSat adatok betöltése  
mag = load('magsat.dat');  
t = mag(:,1);  
d = mag(:,2);  
plot(t,d);  
xlabel('km');  
ylabel('nT');  
title('mágneses térerősség');
```



Sztochasztikus folyamat frekvencia összetevői

- sztochasztikus folyamatra egyik sincs értelmezve ($x(t)$ nem korlátos):

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-2\pi i f t} dt \quad X(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_n e^{-2\pi i f n}$$

- helyes logika: $(f_0 - \frac{1}{2}df, f_0 + \frac{1}{2}df)$ frekvenciasávhoz tartozó jel energia

- f_0 körüli Φ_{f_0} sáváteresztő szűrő

az átengedett jel varianciája (energiája) arányos lesz a sáváteresztő szűrő df sáv szélességével:

$$S_x(f_0)df = \text{var}(\Phi_{f_0} * x)$$

Teljesítménysűrűség spektrum (PSD)

$$S_x(f_0)df = \text{var}(\Phi_{f_0} * x)$$

- S_x $x(t)$ -nek az *energiaspektruma*, másnéven *teljesítménysűrűség spektruma* (Power Spectral Density, PSD)
- PSD *mértékegysége*: sztochasztikus folyamat („jel”) variancia osztva frekvenciával
- vagy négyzetgyök PSD: sztochasztikus folyamatot jellemző mennyiség mértékegysége / (négyzetgyök frekvencia)
- pl. ha gyorsulásról beszélünk, PSD: $\text{m/s}^2/\text{Hz}^{1/2}$

Stacionárius folyamat PSD

- a (kétoldali) PSD az alábbi határértékként írható fel (mivel f -et $-\infty$ -től $+\infty$ -ig változtathatjuk)

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_T(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \right\}$$

$$x_T(t) = \begin{cases} x(t) & -T \leq t \leq T \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

- Ha x valós, akkor $S_x(f)$ az f -nek páros függvénye, ezért csak az $f \geq 0$ -ra kell megadnunk az értékeit (egyoldali PSD, azaz $2S_x(f)$ az $f \geq 0$ -ra)

Autokovariancia és PSD

- az autokovariancia függvény (ACF) és a PSD pontosan ugyanazt az információt tartalmazza:

$$S_x(f) = F\{R_x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(t) e^{-2\pi i f t} dt$$

a PSD az ACF Fourier transzformáltja

- inverz transzformált:

$$R_x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^{2\pi i f t} df$$

Magsat autokovariancia

% egyenközű interpoláció

n = size(mag,1)

% n = 4096

dt = (t(end)-t(1))/(n-1)

% dt = 38

ti = t(1):dt:t(end);

di = interp1(t,d,ti);

% ACF számítása

[c,lags] = xcov(di);

% acf = xcov(di);

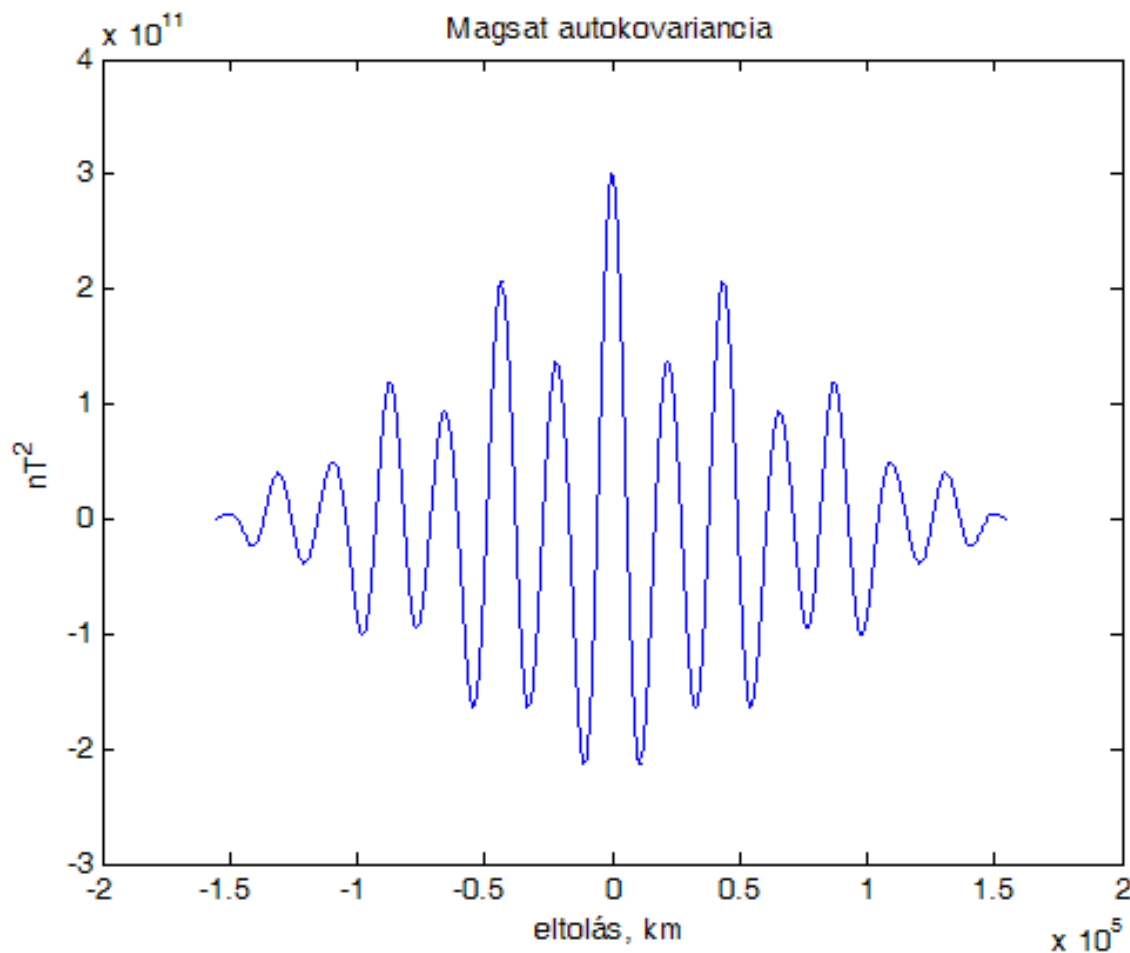
figure(2);

plot(dt*lags,c);

xlabel('eltolás, km');

ylabel('nT²');

title('Magsat
autokovariancia');



PSD tulajdonságai

- a sztochasztikus folyamat variancia az ACF-ből számítható:

$$R_x(0) = E\{x(t) x(t)\} = \text{var}(x) = \sigma_x^2$$

- $t = 0$ -t behelyettesítve

$$R_x(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) e^0 df = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f) df$$

a **PSD alatti terület** a sztochasztikus folyamat varianciája

Fehérzaj PSD

- Folytonos jel esetén a fehérzaj autokovariancia függvénye a Dirac-féle delta függvény (disztribúció) számszorosa, $s^2 \delta(t)$.

a fehérzaj PSD-je:

$$S_W(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_W(t) e^{-2\pi i f t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} s^2 \delta(t) e^{-2\pi i f t} dt = s^2$$

a PSD alatti terület **végtelen!**

a folytonos fehérzaj fizikai értelemben fikció

Szűrt jel PSD

- konvolúciós szűrés egyenlete:

$$y(t) = g(t) * x(t)$$

$g(t)$ a szűrő impulzus átviteli függvénye (magfüggvénye)

- ha ismert a bemenő jel PSD-je, akkor a szűrt jel PSD-je:

$$S_y(f) = |G(f)|^2 S_x(f)$$

a szűrő frekvencia átviteli függvénye *abszolút értékének a négyzetével* kell szorozni

Idősor PSD

- diszkrét idősor PSD-je DFT-k határértéke:

$$S_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N} E \left\{ \left| \sum_{n=-N}^N x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2 \right\}$$

realizációkra vett $E\{ \cdot \}$ átlagolás szükséges

- Alternatív definíció az autokovariancia függvény segítségével:

$$S_x(f) = \sum_{n=-N}^N R_x(n) e^{-2\pi i f n} \quad -1/2 \leq f \leq 1/2$$

Idősor ACF, szűrés

- diszkrét idősor ACF-je megkapható a PSD-ből:

$$R_x(n) = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) e^{2\pi i f n} df$$

ebből

$$\sigma_x^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f) df$$

- szűrt idősor PSD:

$$S_y(f) = |G(f)|^2 S_x(f)$$

$$G(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g_n e^{-2\pi i f n}$$

PSD becslése

- véges számú ismert adatunk van
- olyan függvényt akarunk meghatározni, amely több ismeretlentől függ: több ismeretlen mint ahány egyenlet – rosszul kondicionált inverz feladat
→ a jó PSD becslés hozzáértést kívánó „mesterség”
- N db. mintánk van a sztochasztikus folyamatból
- valódi PSD helyett a valódi PSD és sinc^2 függvény konvolúcióját kapjuk
- a PSD pontos kijavítása (dekonvolúció) lehetetlen
- helyette közelítő, „regularizált” megoldást adunk

PSD becslése

- **realizációkra vett átlag kellene:**

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_T(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \right\}$$

- helyette (ha **ergodikus** a folyamat) **időbeli** átlag és nincs limesz:

$$S_x(f) = M \left\{ \frac{1}{2T} \left| \int_{-T}^T x_T(t) e^{-2\pi i f t} dt \right|^2 \right\}$$

ergodicitás feltétele:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_x(n)^2 = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f)^2 df < \infty$$

PSD becslési módszerei

- periodogram ([periodogram](#)(x))
- paraméteres módszerek
 - Burg ([pburg](#)(x,n))
 - MESE (Maximum Entropy Spectral Estimation) ([pyulear](#)(x,n))
 - előfehérítés (prewhitening)
- nem paraméteres módszerek
 - Welch (szekció átlagolás)
 - multitaper (DPSS, szinuszos)

PSD periodogram becslése

- átlagolást elhagyjuk:

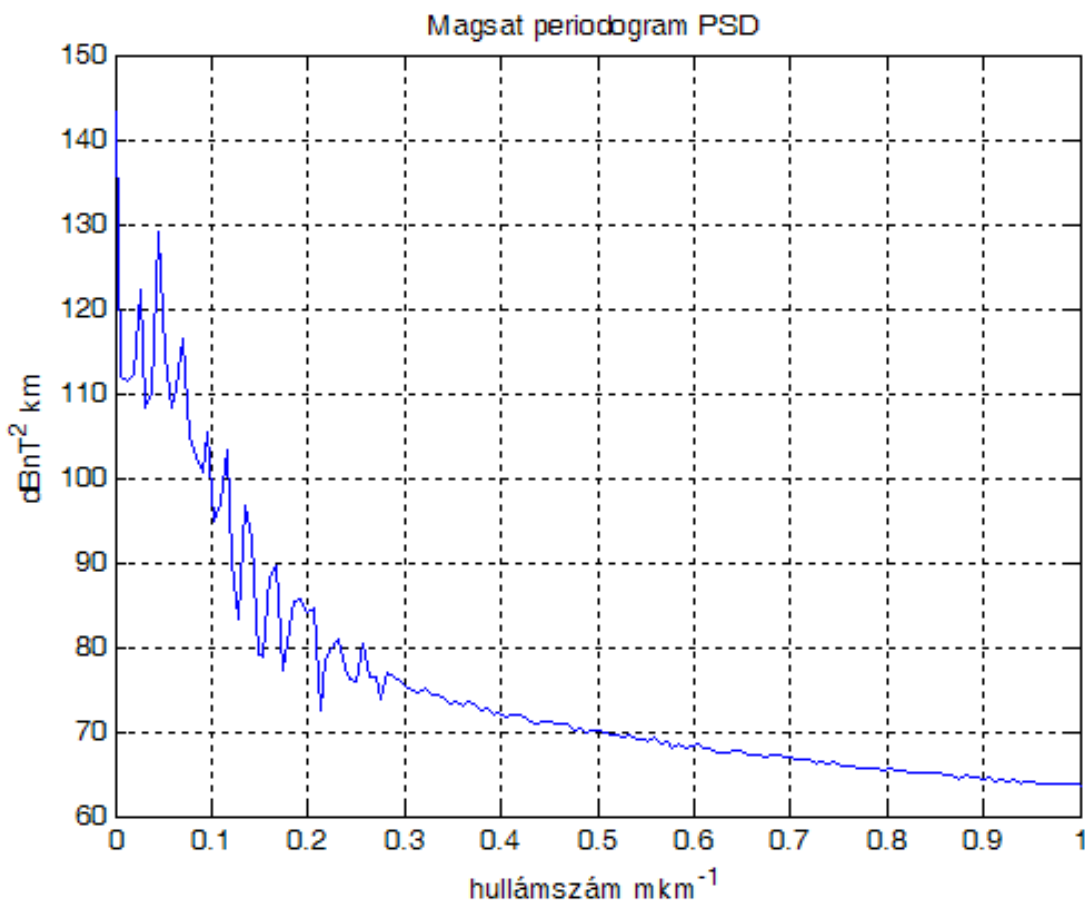
$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2$$

- az adatsort átszámoztuk zérus kezdő indexszel
- Fourier transzformált magnitúdó (négyzet)
- ACF becslés Fourier transzformáltja

$$\hat{R}_x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N-n} x_k x_{k+n} \quad n = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

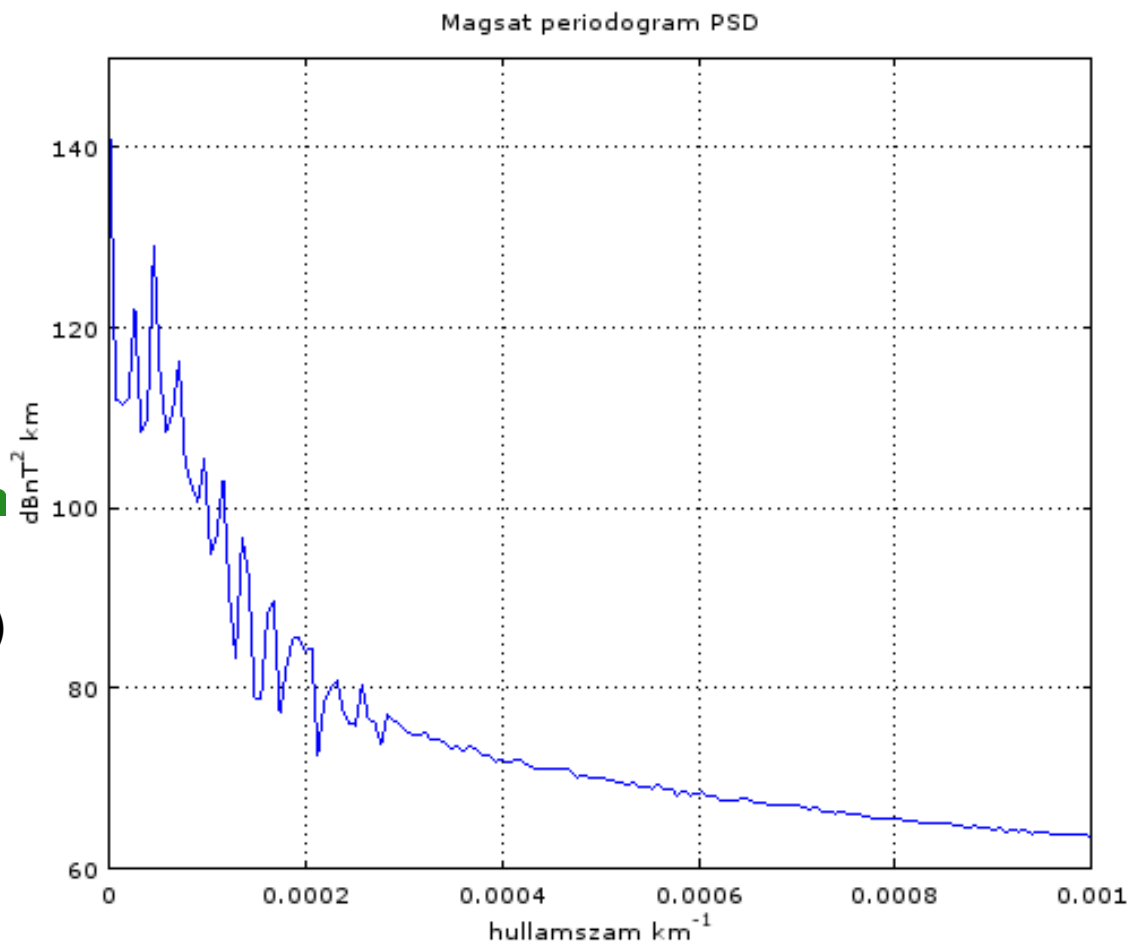
Magsat periodogram becslés

```
% mintavételi frekvencia  
fs = 1/dt;  
% periodogram becslés  
figure(3);  
periodogram(di,[ ],[ ],fs);  
% az érdekes rész 0-1 mili1/km  
xlim([0,1]);  
xlabel('hullámszám mkm^{-1}');  
ylabel('dBnT^2 km');  
title('Magsat periodogram  
PSD');
```



Magsat periodogram becslés

```
% mintavételi frekvencia  
fs = 1/dt;  
% periodogram becslés  
figure(3);  
periodogram(di,[ ],[ ],fs);  
% az érdekes rész 0-1 mili1/kn  
xlim([0,0.001]);  
xlabel('hullamszam km^{-1}');  
ylabel('dBnT^2 km');  
title('Magsat periodogram  
PSD');
```



Periodogram jellemzői

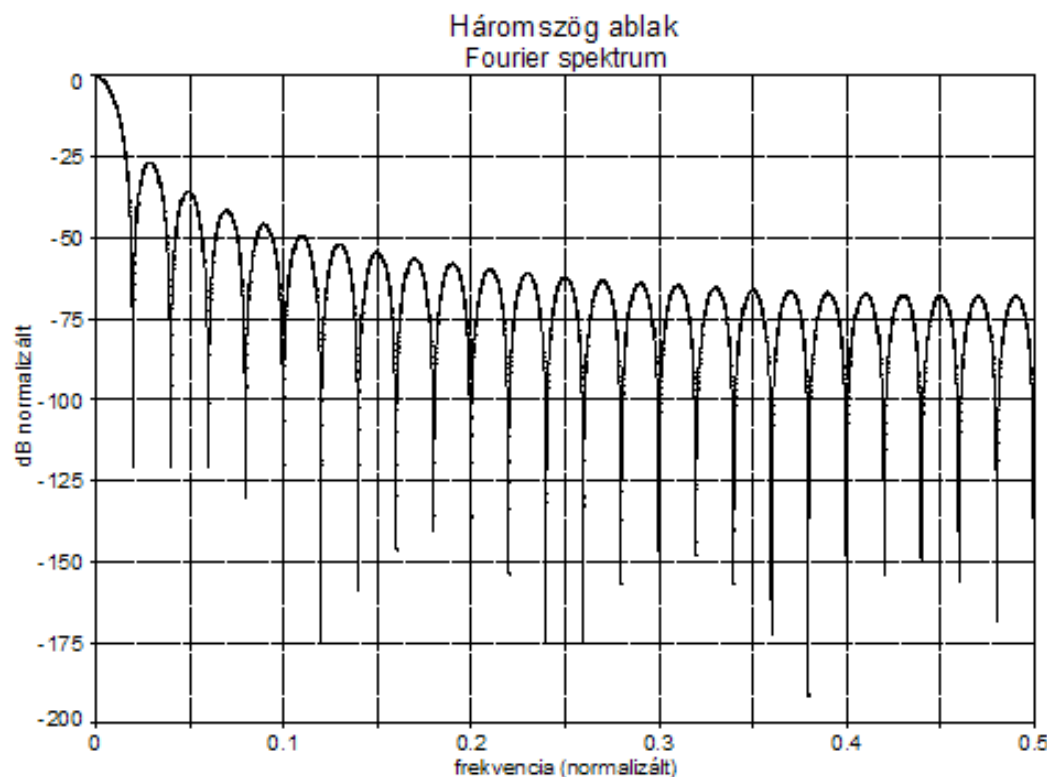
- torzítatlan becslés a PSD-re
- inkonzisztens becslés:

$$\text{var}[\hat{S}_x(f)] = S_x(f)^2$$

- a becslés szórása megegyezik a becsült értékkel és nem csökken N növelésével, mert a becslésenkénti szabadsági fok: 2
→ rendkívül zajos

Periodogram jellemzői

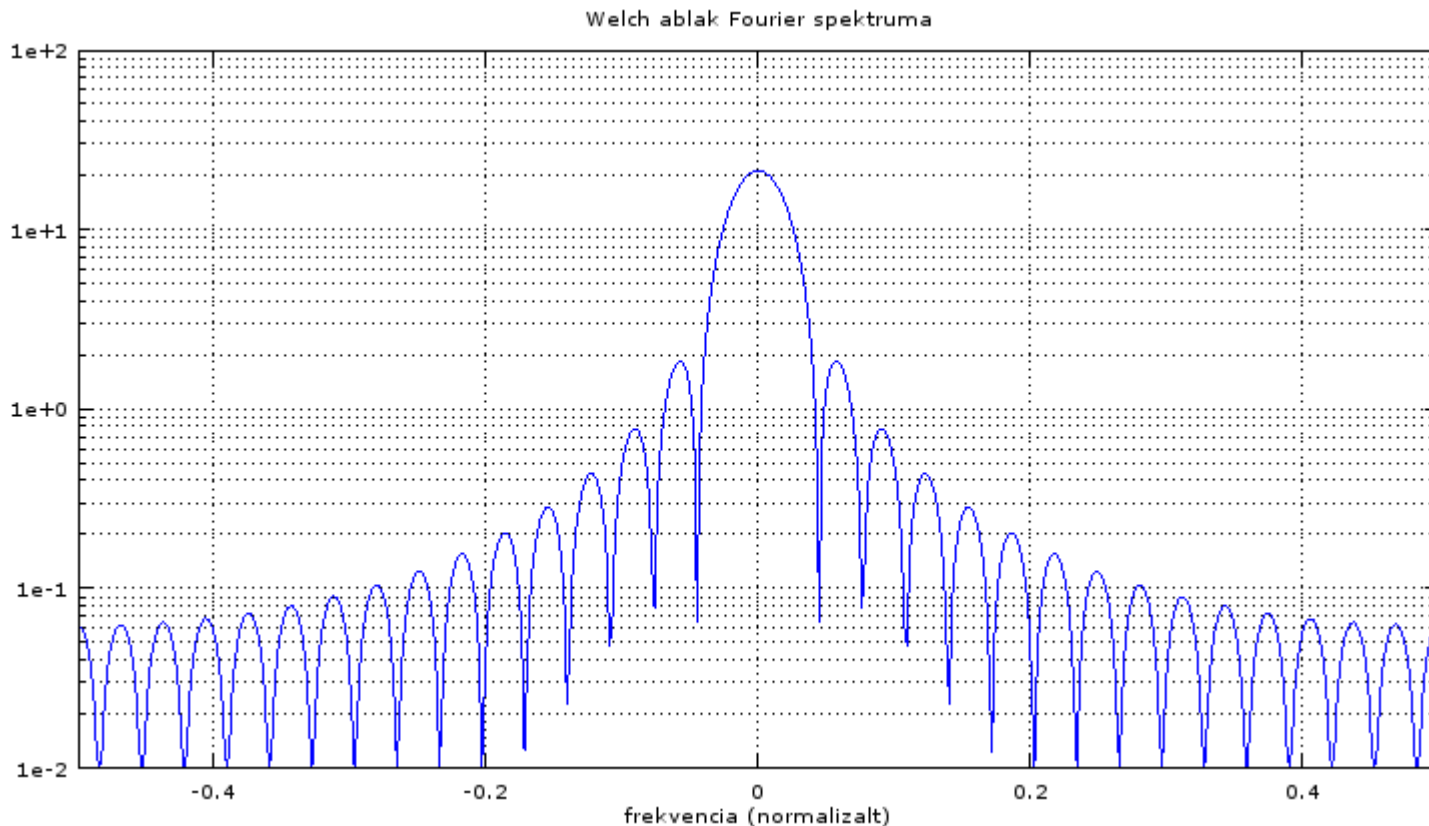
- spektrális szivárgás torzítja,
- a valódi spektrum és egy háromszög (Bartlett) ablak spektrumának (ami egy sinc^2 függvény) a konvolúciója miatt



nagy dinamikájú jelek esetén
teljesen hamis lesz a PSD
becslése

Welch ablakfüggvény

- a középső maximum kiszélesedik (frekvencia felbontás csökken) de nő az oldalfrekvenciák elnyomása (kisebb spektrális szivárgás)



PSD paraméteres becslése

- alapötlet: szűrt fehérzaj PSD = jel PSD

$$x(t) = g(t) * y(t) \quad \rightarrow \quad S_x(f) = |G(f)|^2 S_y(f)$$

- a $g(t)$ szűrő pont olyan, ha $y(t)$ fehérzaj, akkor a kívánt $x(t)$ PSD-jét kapjuk meg, vagyis

$$S_x(f) = c |G(f)|^2$$

- a gyakorlatban a $g(t)$ szűrő rekurzív (AR) szűrő

$$x_n = y_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$$

Yule-Walker egyenletek

- y_n fehérzaj, cél az a_i szűrő együtthatók meghatározása
- a szűrő egyenleteket:

$$x_n = y_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$$

végigszorozzuk x_j -vel és vesszük a várható értéket

→ **Yule-Walker** egyenleteket kapjuk

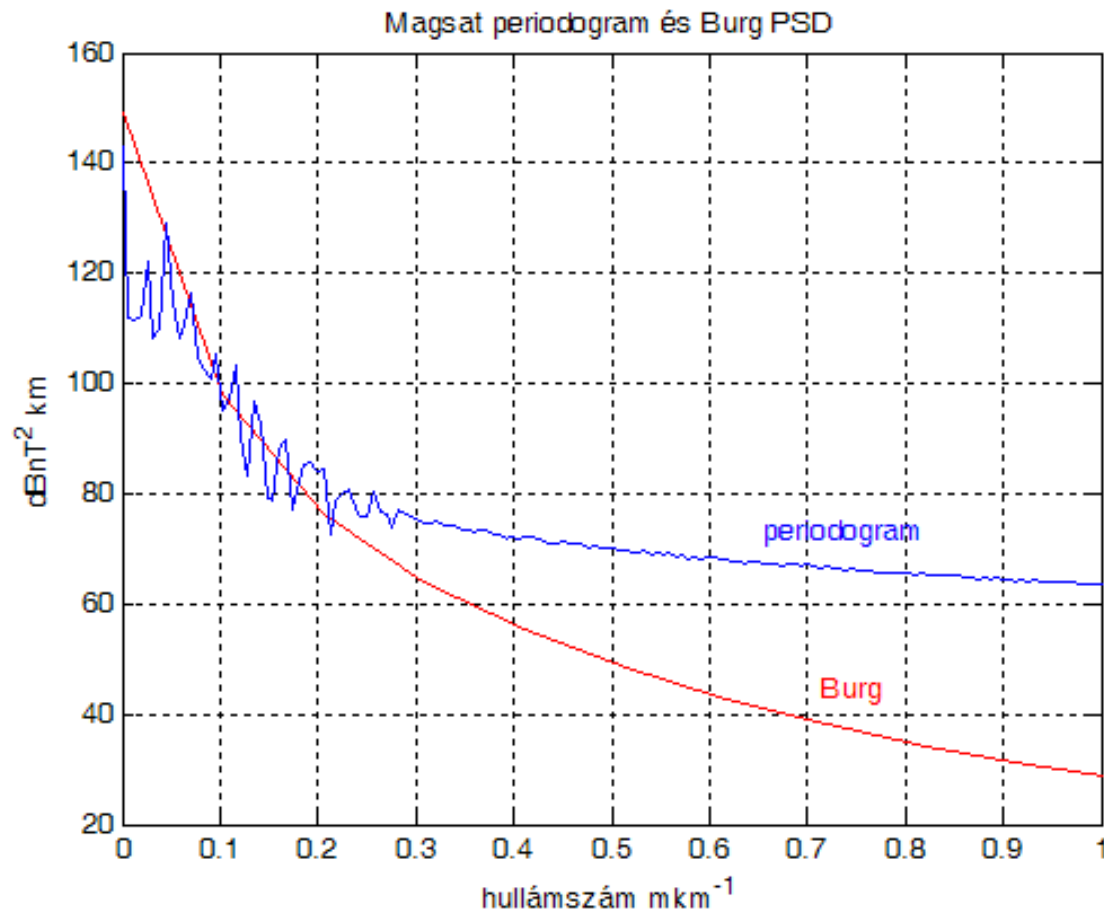
a kapott egyenletrendszerből az a_i szűrő együtthatók meghatározhatók

Problémák

- nehéz meghatározási hibát rendelni a spektrum becsléséhez
- a szűrő fokszámának (k) meghatározása kérdéses
- kiegészítő módszerek:
 - Burg
 - MESE (Maximum Entropy Spectral Estimation)

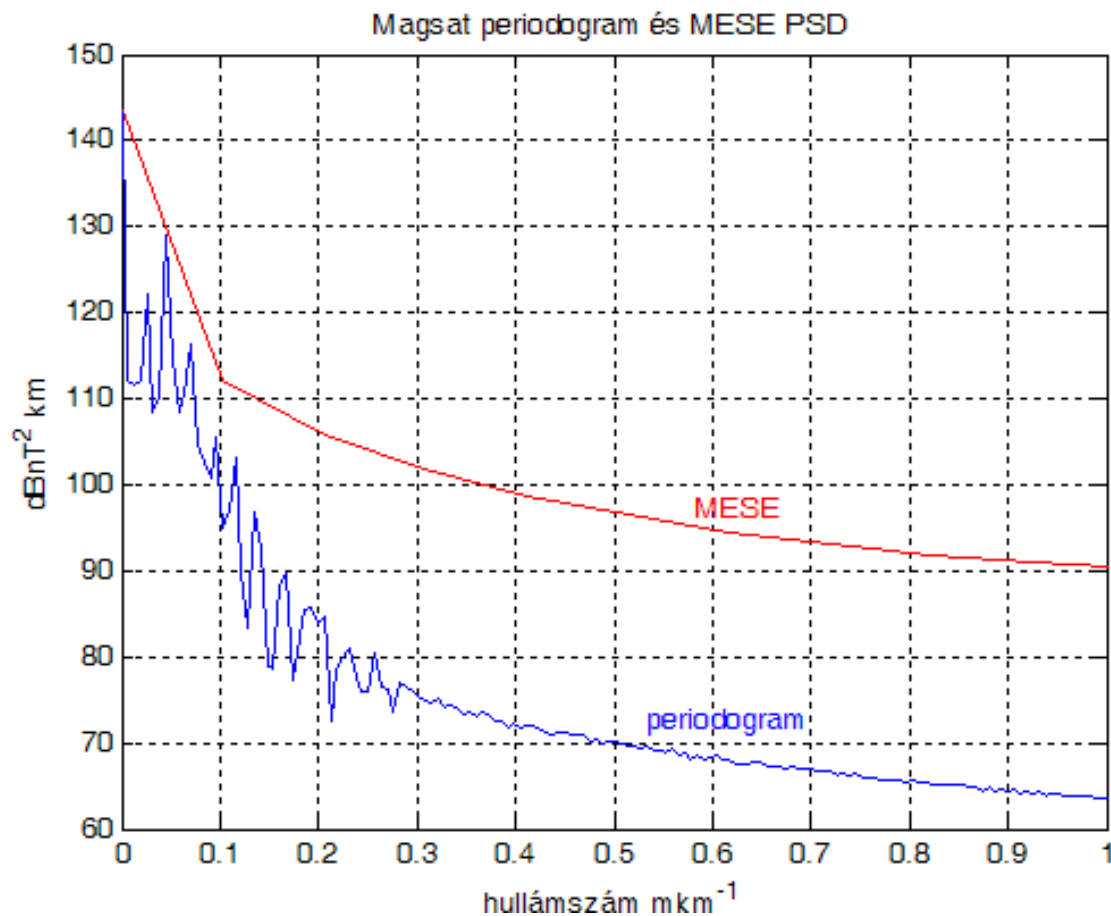
Magsat Burg PSD becslés

```
% Burg módszere  
figure(4);  
pburg(di, 24,[ ],fs);  
hold on  
periodogram(di,[ ],[ ],fs);  
xlim([0,1]);  
xlabel('hullámszám mkm-1');  
ylabel('dBnT2 km');  
title('Magsat periodogram és  
Burg PSD');
```



Magsat MESE PSD becslés

```
% Yule-Walker maximális  
entrópia módszere  
figure(5);  
pyulear(di,24,[],fs);  
hold on  
periodogram(di,[],[],fs);  
xlim([0,1]);  
xlabel('hullámszám mkm^{-1}');  
ylabel('dBnT^2 km');  
title('Magsat periodogram és  
MESE PSD');
```



Előfehérítés (prewhitening)

- AR szűrő hasznos alkalmazása a jel dinamikájának csökkentésére
- viszonylag rövid AR (IIR) szűrővel (pl. $k < 5$)

$$x_n = y_n + a_1 x_{n-1} + a_2 x_{n-2} + \cdots + a_k x_{n-k}$$

- az előfehérített jel PSD becslése könnyebb (kisebb dinamika)
- végén a szűrő hatása eltávolítható

PSD nem paraméteres becslési módszerei

- periodogram becslés varianciáját időbeli átlagolással lehet csökkenteni

$$\text{var}[\hat{S}_x(f)_K] = \frac{S_x(f)^2}{K}$$

- Welch (szekció átlagolás)
- több levágó ablakkal végzett átlagolás (multitapering)
 - ortogonális ablakrendszerek: DPSS, szinuszos

Átlagolás (simítás) hatása

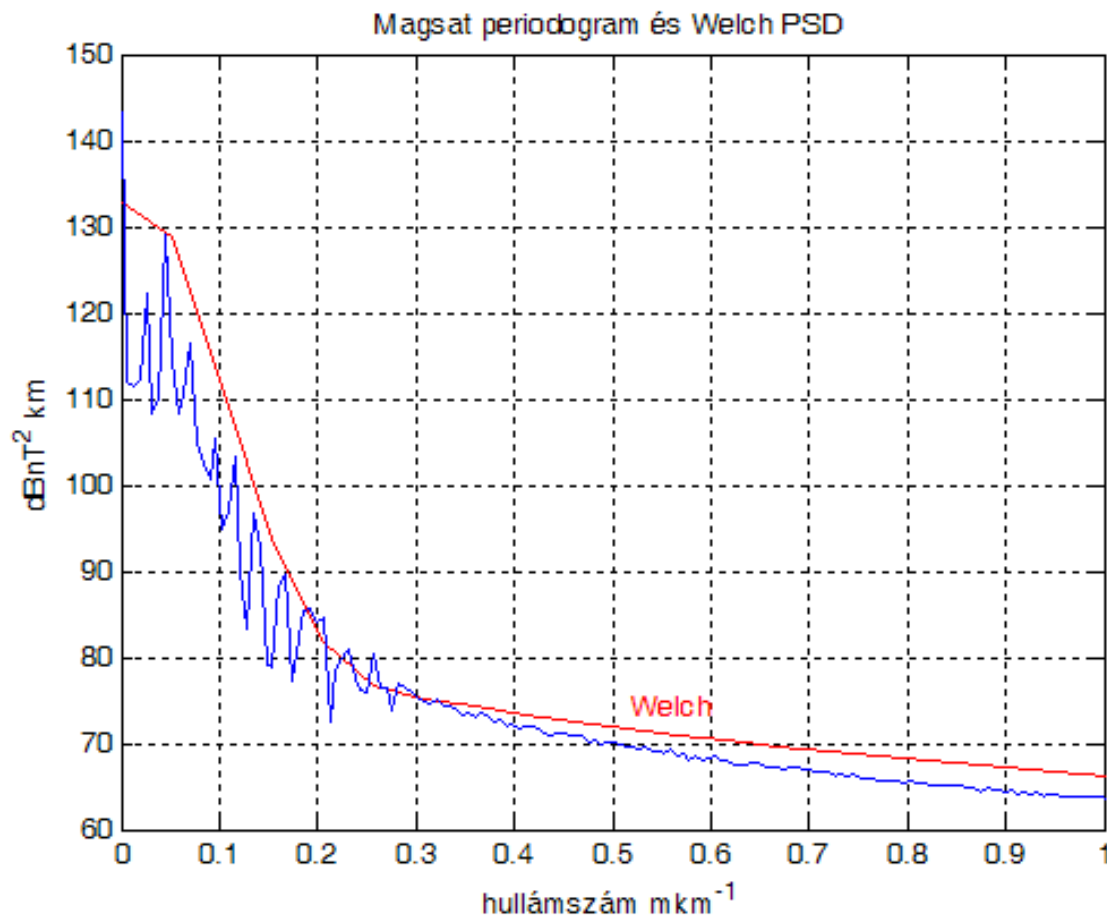
- a simítással (átlagolással) csökken a variancia (zaj), de csökken a felbontás is
- helyes egyensúly: **felbontás** $\leftrightarrow$ **zaj**

Welch szekció átlagolás

- az eredeti idősort K db. egyenlő hosszúságú, egymást (általában 50%-ban) átfedő szekcióra bontjuk és mindegyikből egy-egy spektrumot számítunk ki
- ezek az adatsorok egymástól közel függetlenek, és így a PSD egy-egy független becslését adják, melyeket átlagolunk
- a spektrális szivárgás csökkentése érdekében mindegyik szekciót megfelelő függvényrel ablakoljuk (**tapering**)

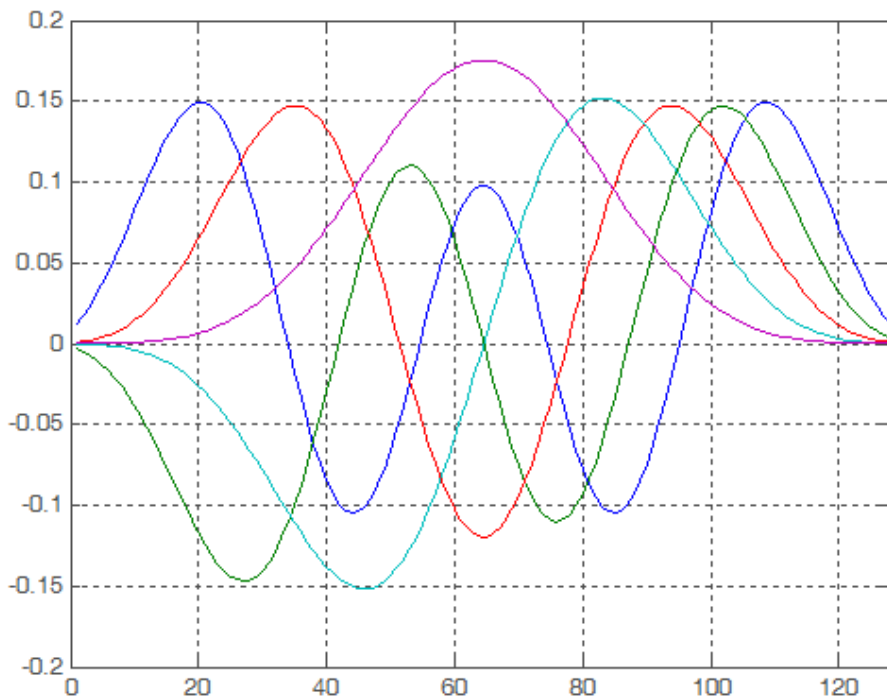
Magsat Welch átlagolás

```
% Welch szekció átlagolás  
pwelch(di,512,[ ],[ ],fs);  
hold on  
periodogram(di,[ ],[ ],fs);  
xlim([0,1]);  
xlabel('hullámszám  
mkm-1');  
ylabel('dBnT2 km');  
title('Magsat periodogram  
és Welch PSD');
```

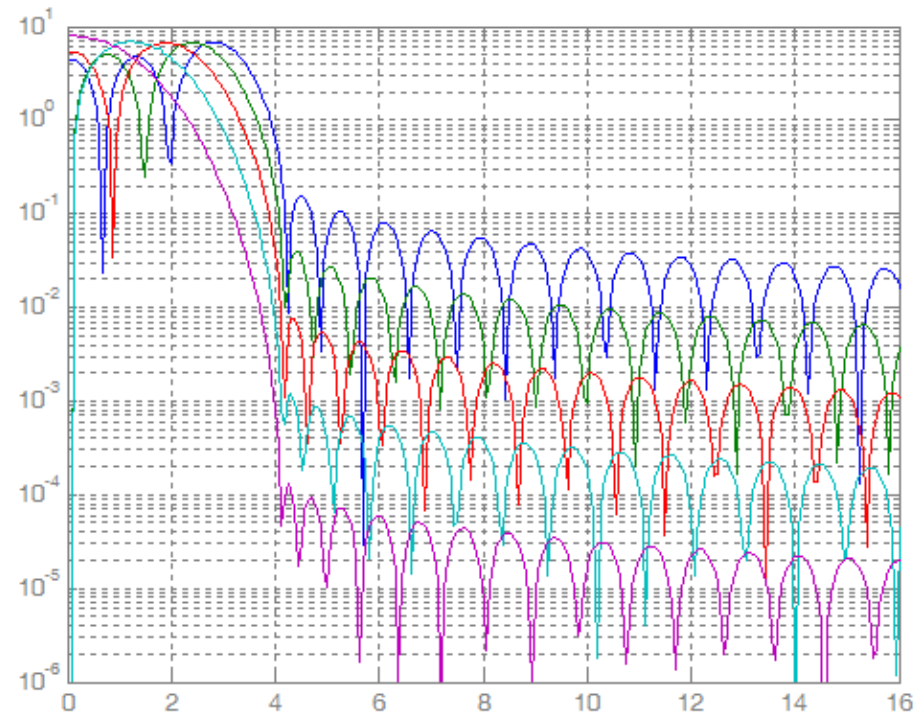


Multitaper módszer

- több levágó ablakkal végzett átlagolás
 - DPSS (Thomson) – optimális jel energia koncentráció adott $2NW$ tartományban
 - szinusz (Riedel és Sidorenko)



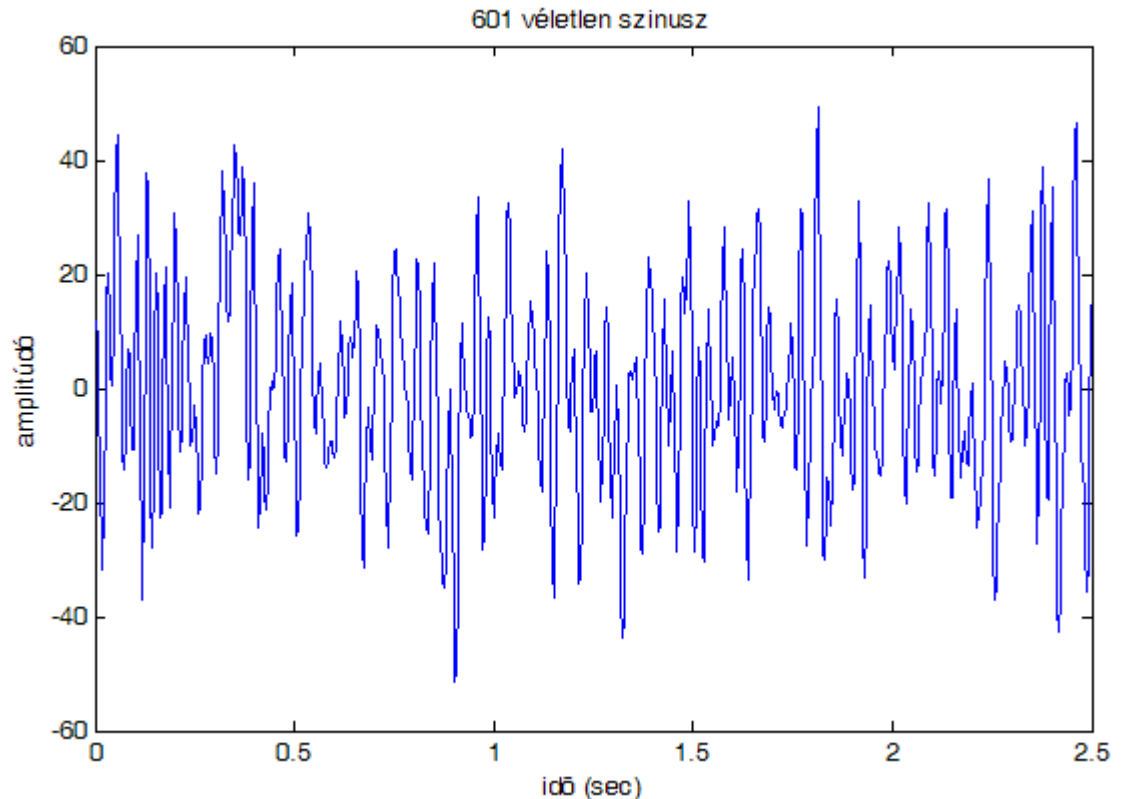
DPSS ablakok, $NW = 4$



DPSS ablakok DFT amplitúdó, $NW = 4$

601 véletlen szinuszhullám

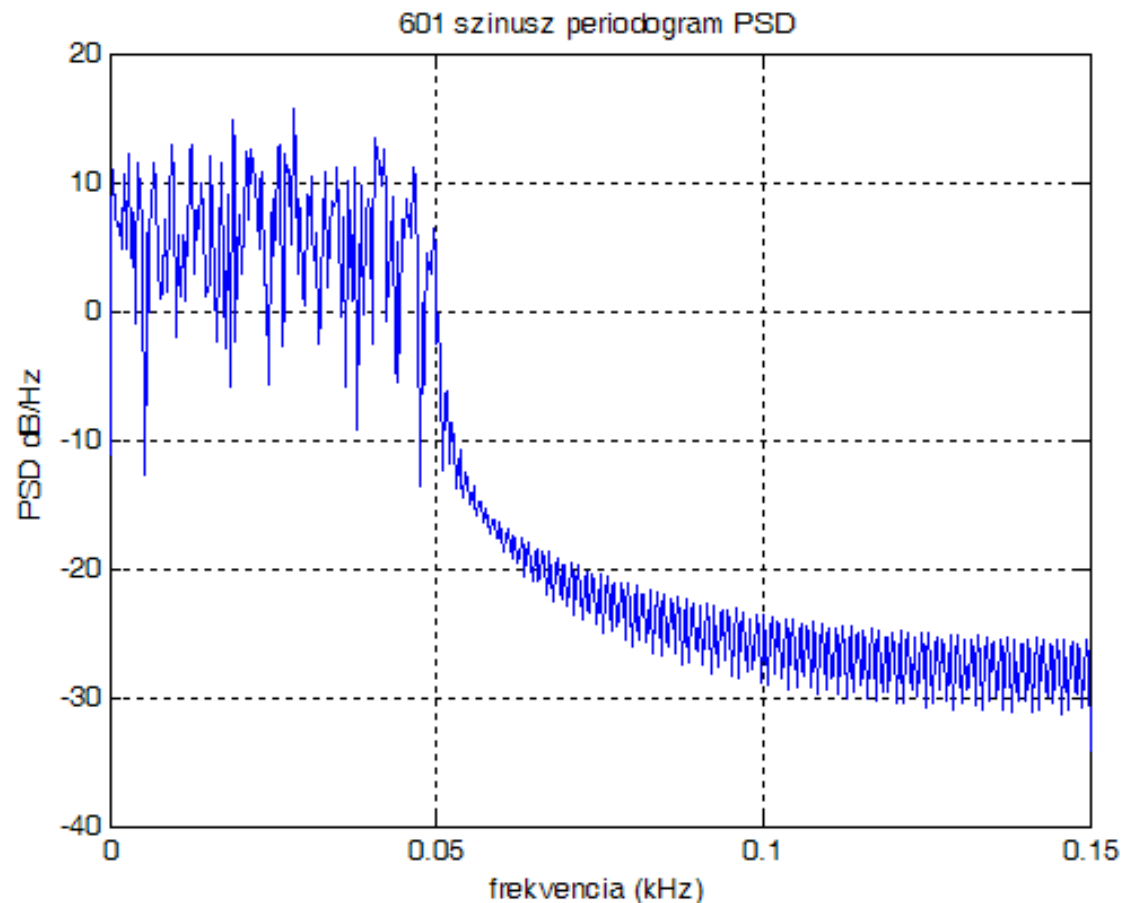
```
% 601 véletlen szinusz összege
ss = 300; % mintavételi frekvencia (Hz)
Ts = 2.5; % 2.5 sec jel
nsa = Ts*ss; % minták száma
nsi = 600 % véletlen szinuszok
ti = [0:(nsa-1)]/ss; % időegyenés
frq = 50*rand(1,600); % frekvencia
phs = 2*pi*rand(1,600); % fázis
xsi = zeros(1,nsa);
for i=1:nsi
    xsi = xsi+sin(2*pi*frq(i)*ti+phs(i));
end
% véletlen szinusz -25 dB-en, 62 Hz-en
a601 = 10^(-25/10);
xsi = xsi+a601*sin(2*pi*62*ti);
figure(1);
plot(ti,xsi);
xlabel('idő (sec)');
ylabel('amplitúdó');
title('601 véletlen szinusz');
```



**600 db, $0 < f < 50$ Hz véletlen frekvenciájú és fázisú,
egységnyi amplitúdójú szinusz
 $f = 62$ Hz-es, -25 dB szinusz**

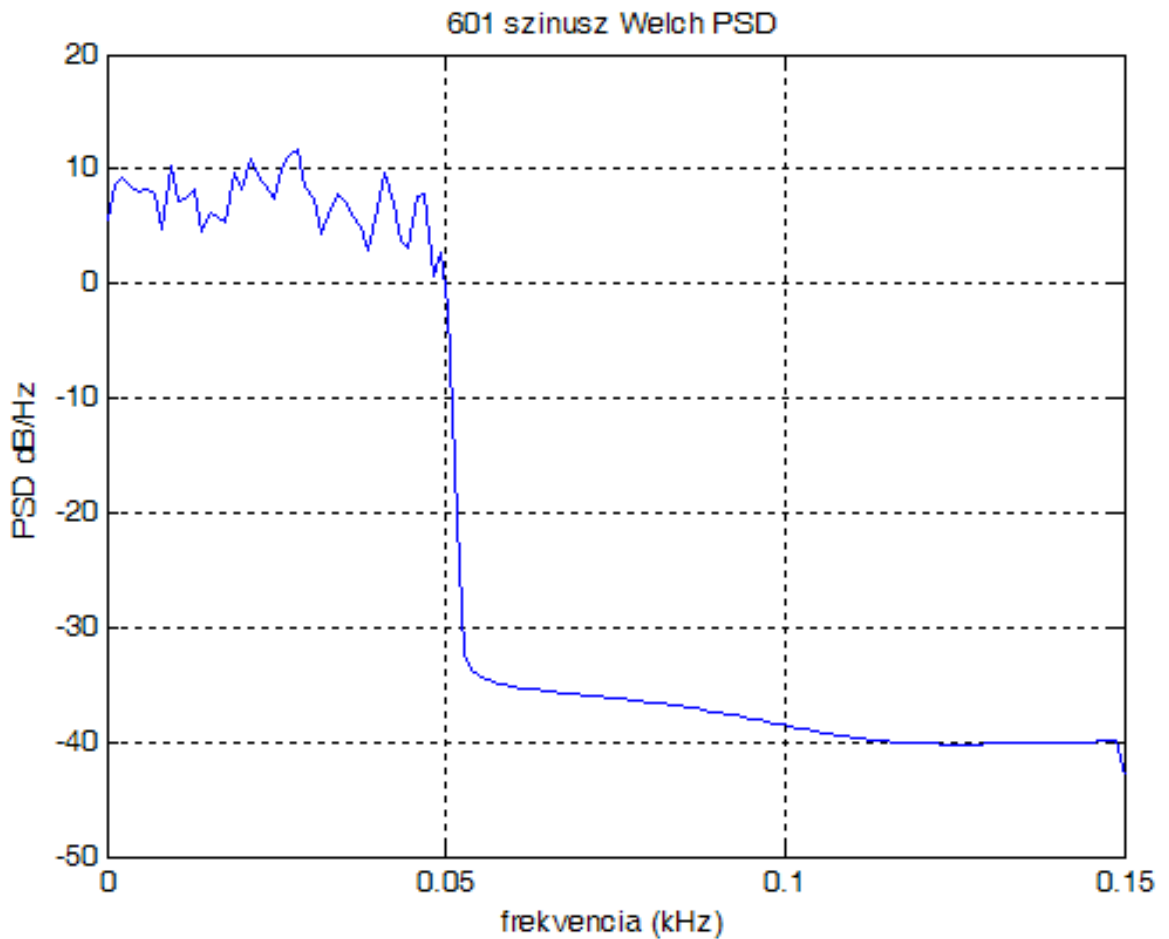
periodogram PSD

```
% periodogram PSD becslés  
figure(2);  
periodogram(xsi,[],[],ss);  
xlabel('frekvencia (kHz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz periodogram PSD');
```



Welch PSD

```
% Welch PSD becslés  
figure(3);  
pwelch(xsi,250,[],[],ss);  
xlabel('frekvencia (kHz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Welch PSD');
```



Ablakfüggvény alkalmazása

- spektrális szivárgás hatását lehet csökkenteni úgy, hogy az adatokat egy $w(n)$ súlyfüggvénnyel ('ablakfüggvény', taper) beszorozzuk:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{1}{N} \left| \sum_{n=0}^N w(n) x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2$$

- becslés várható értéke:

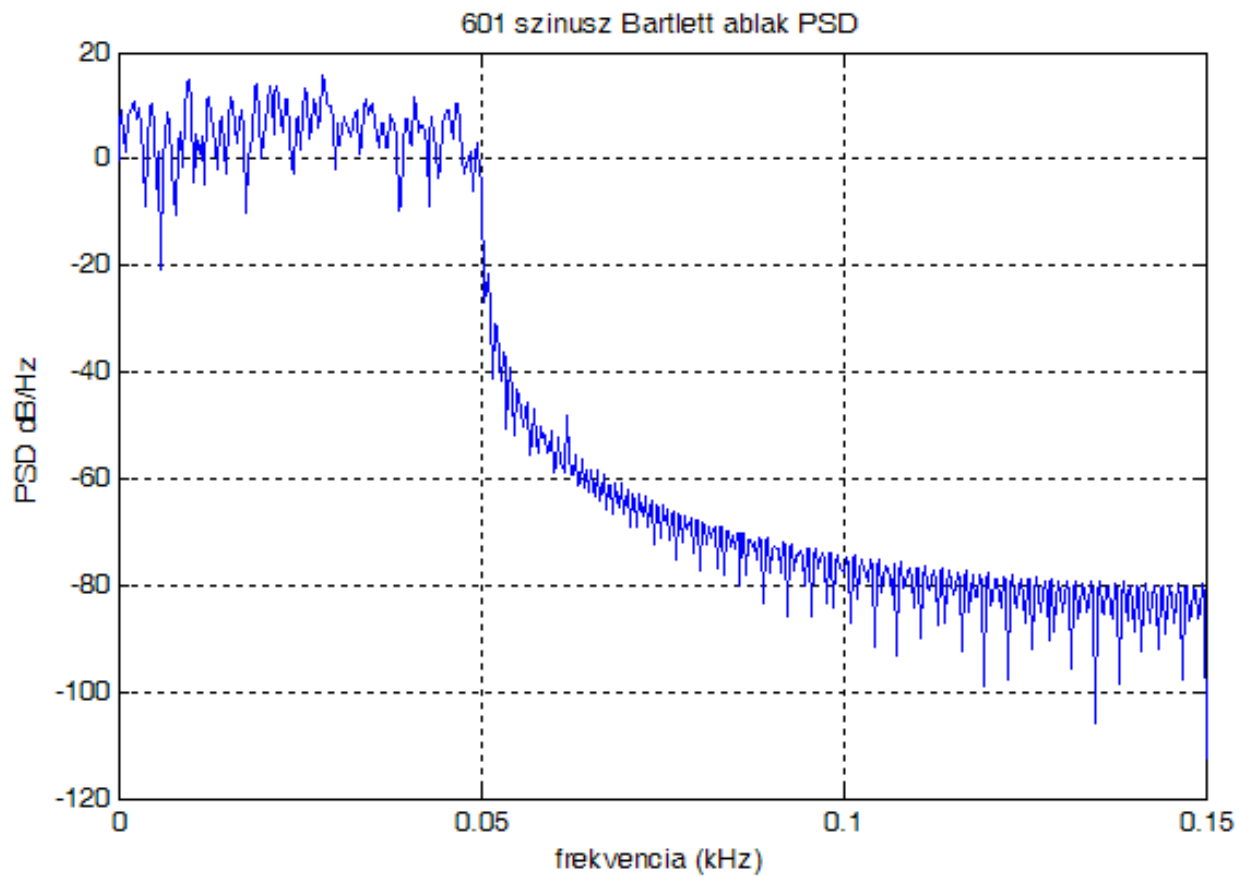
$$E\{\hat{S}_x(f)\} = \int_{-1/2}^{1/2} S_x(f') W(f'-f) df'$$

ahol a konvolváló függvény

$$W(f) = \frac{1}{N} |F\{w(n)\}|^2$$

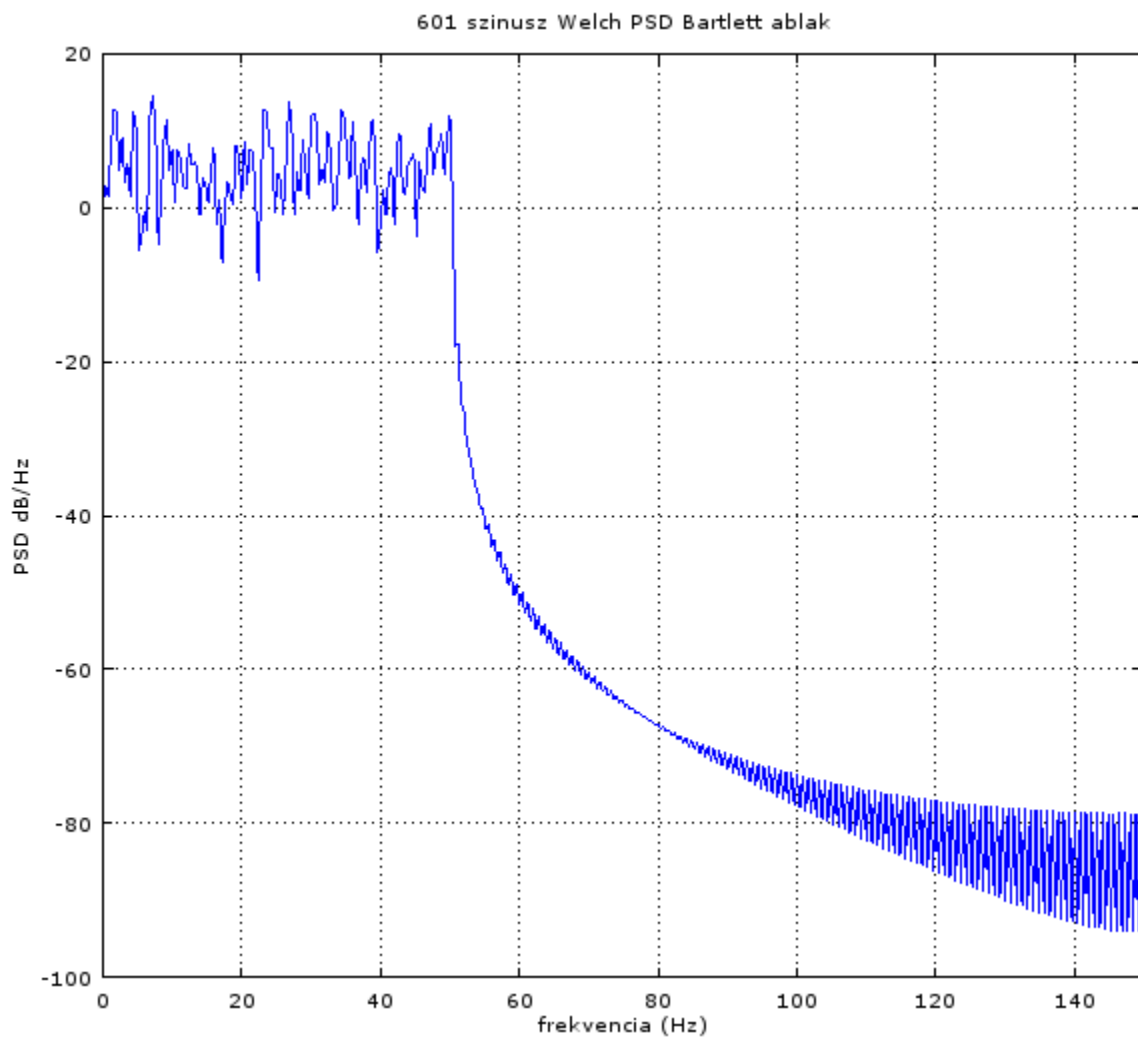
Bartlett (háromszög) ablak PSD

```
% Periodogram PSD, Bartlett ablakkal  
figure(1);  
periodogram(xsi,bartlett(length(xsi)),[],ss);  
xlabel('frekvencia (kHz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Bartlett ablak PSD');
```



Welch átlagolás, Bartlett ablak

```
% Welch PSD becslés Bartlett ablakkal  
figure(1);  
pwelch(xsi', bartlett(length(xsi)), [], [], ss, 'onesided', 'dB');  
xlim([0, 150]);  
xlabel('frekvencia (Hz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz Welch PSD Bartlett ablak')
```



Ortogonalis ablakrendszer (multitapering)

- az ablakok túl kis súlyt adnak az idősor kezdetén és végén levő adatoknak
megoldás: ortogonalis ablakfüggvény rendszer
- az egyes ablakfüggvényekkel súlyozott spektrumokat átlagoljuk
- alkalmazott ortogonalis függvénycsaládok:
 - Slepian-féle, nyújtott szferoidikus függvények (DPSS, Discrete Prolate Spheroidal Sequence)
 - minimális torzítású szinuszos ablakfüggvények (Riedel és Sidorenko, 1995)

szinuszos ablakfüggvények

- ortogonális szinuszos függvénycsalád:

$$v_k(N; n) = \sqrt{\frac{2}{N+1}} \sin \frac{\pi(k+1)(n+1)}{N+1} \quad k, n = 0, 1, \dots, N-1$$

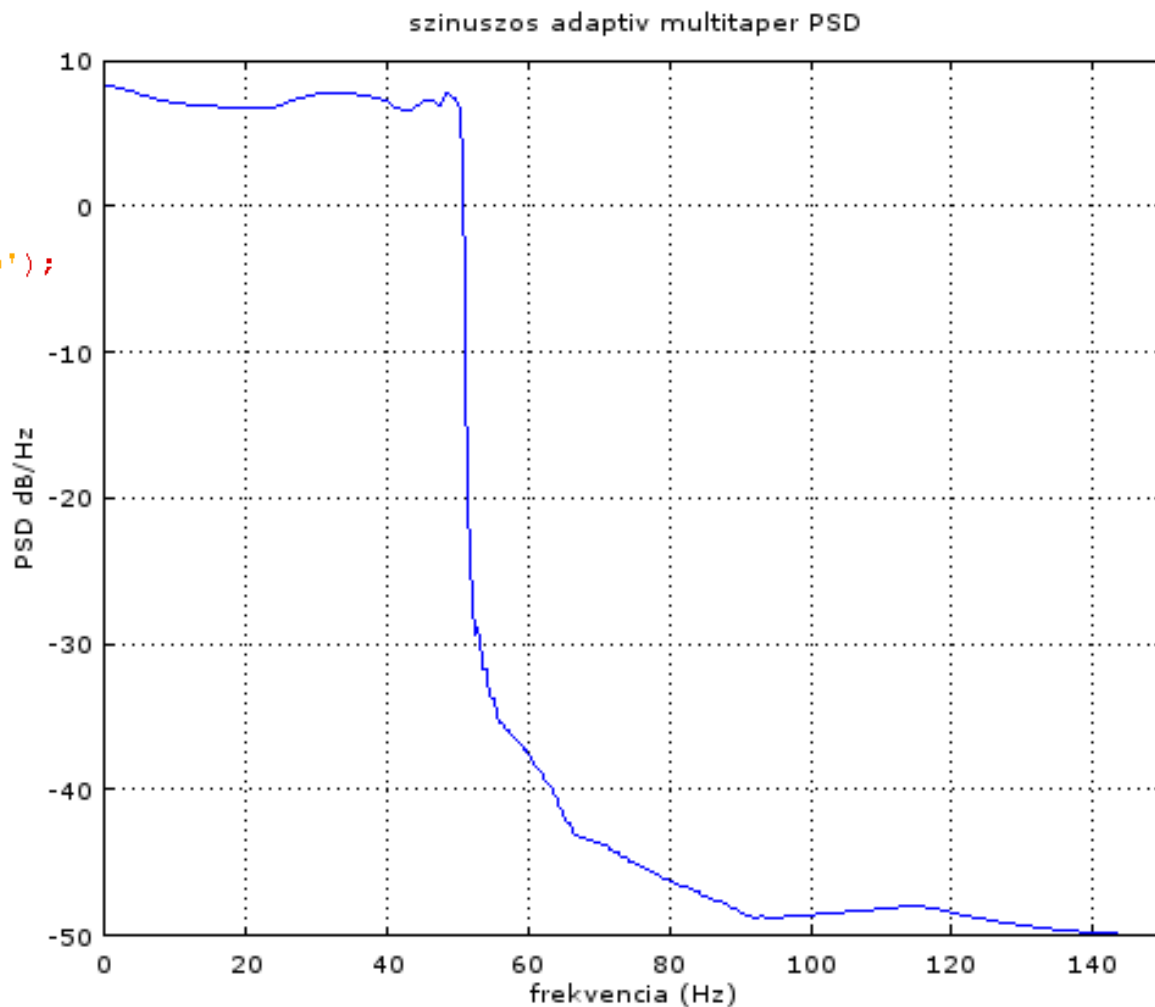
- multitaper spektrumbecslés:

$$\hat{S}_x(f) = \frac{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k \left| \sum_{n=0}^{N-1} v_k(N; n) x_n e^{-2\pi i f n} \right|^2}{\sum_{k=0}^{K-1} \mu_k}$$

ahol $\mu_k = 1 - k^2 / K^2$

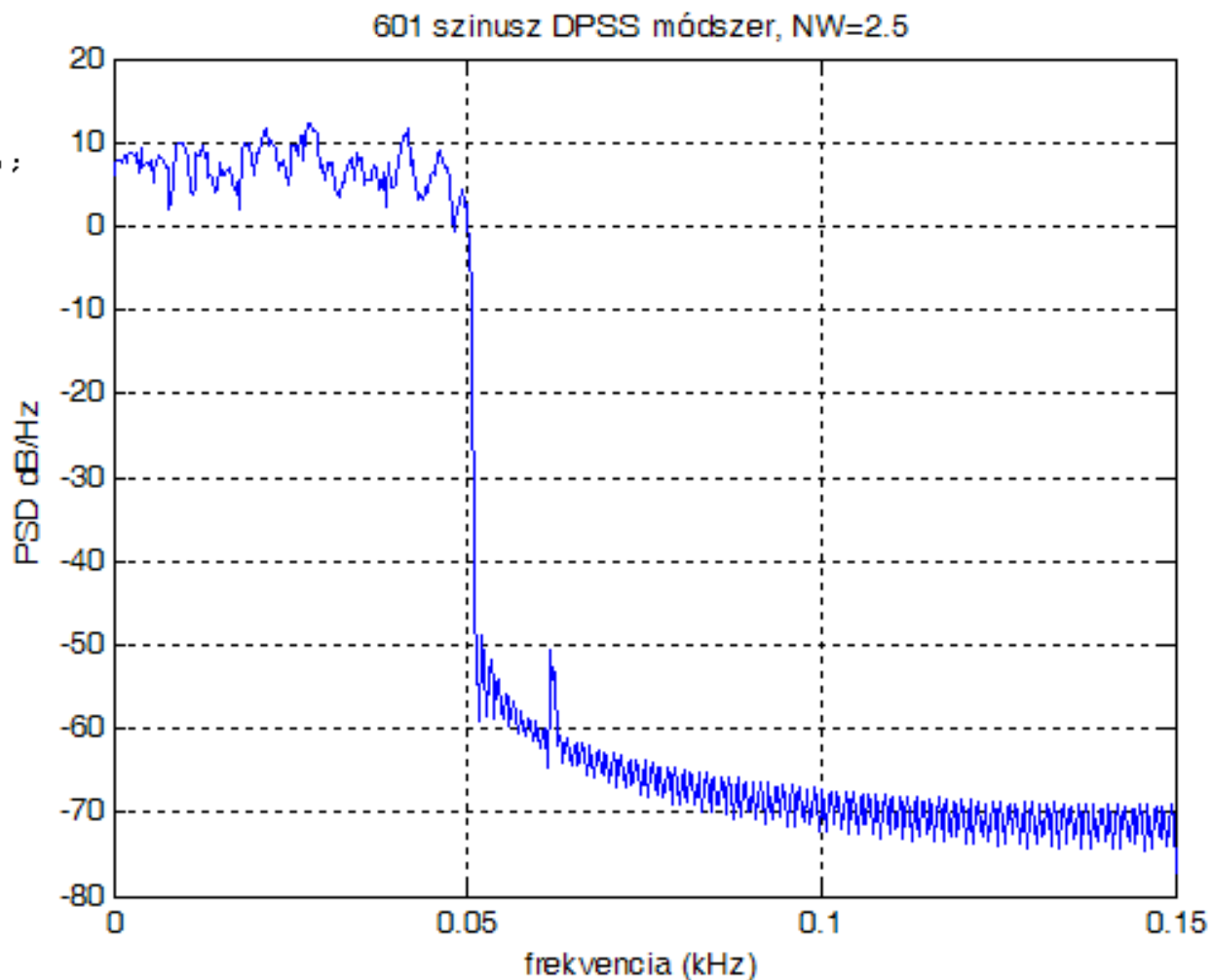
szinusz multitaper PSD becslés

```
% szinuszos adaptív multitaper (Parker)
[psd f] = pspectrum(xsi, ss);
figure(4);
plot(f, 10*log10(psd), '-b');
xlim([0, 150]);
xlabel('frekvencia (Hz)');
title('szinuszos adaptív multitaper PSD');
ylabel('PSD dB/Hz');
```



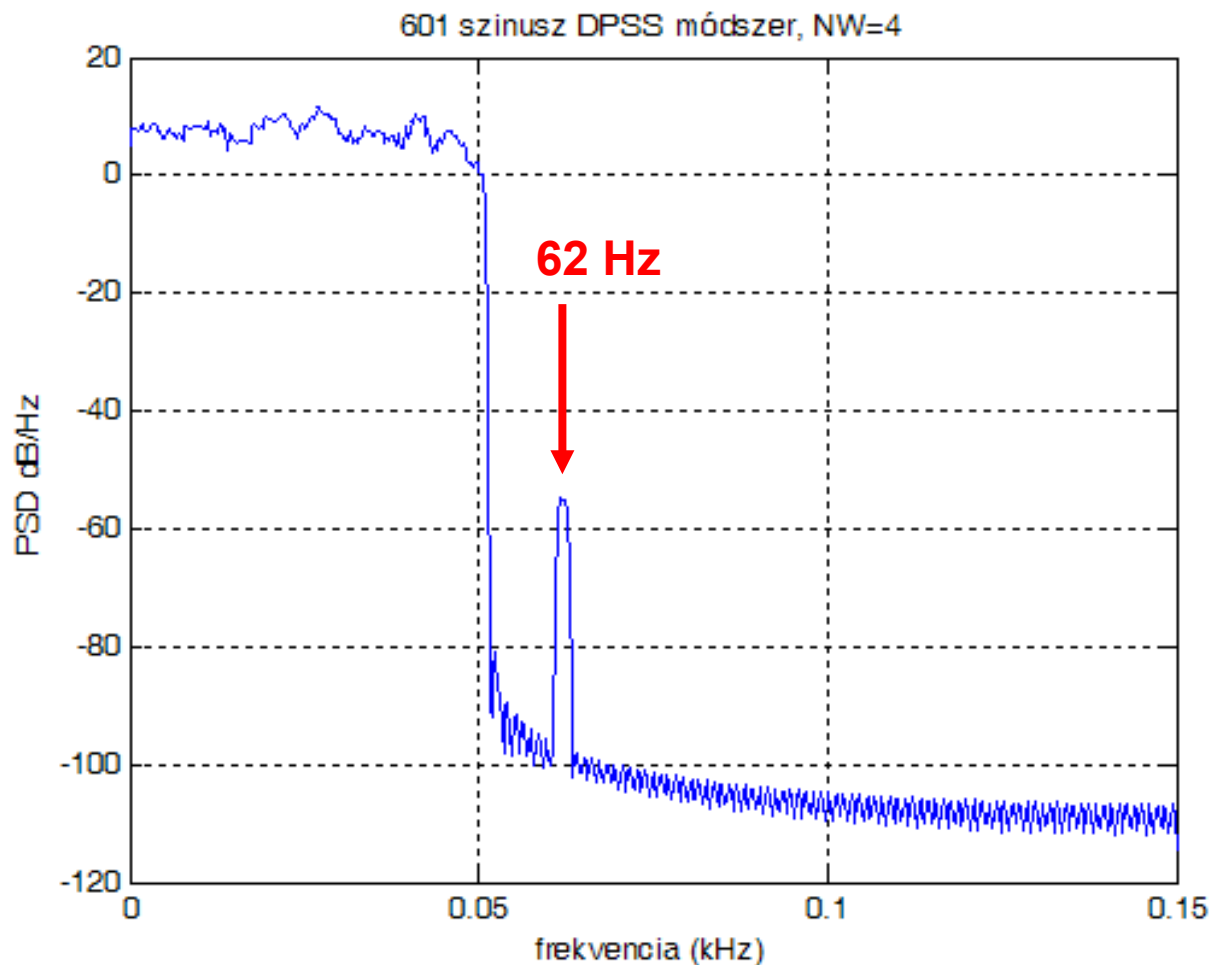
DPSS adaptív PSD becslés

```
% Thomson multitaper módszer PSD becslés  
figure(3)  
pmtm(xsi,2.5,[],ss);  
xlabel('frekvencia (kHz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinusz DPSS módszer, NW=2.5');
```

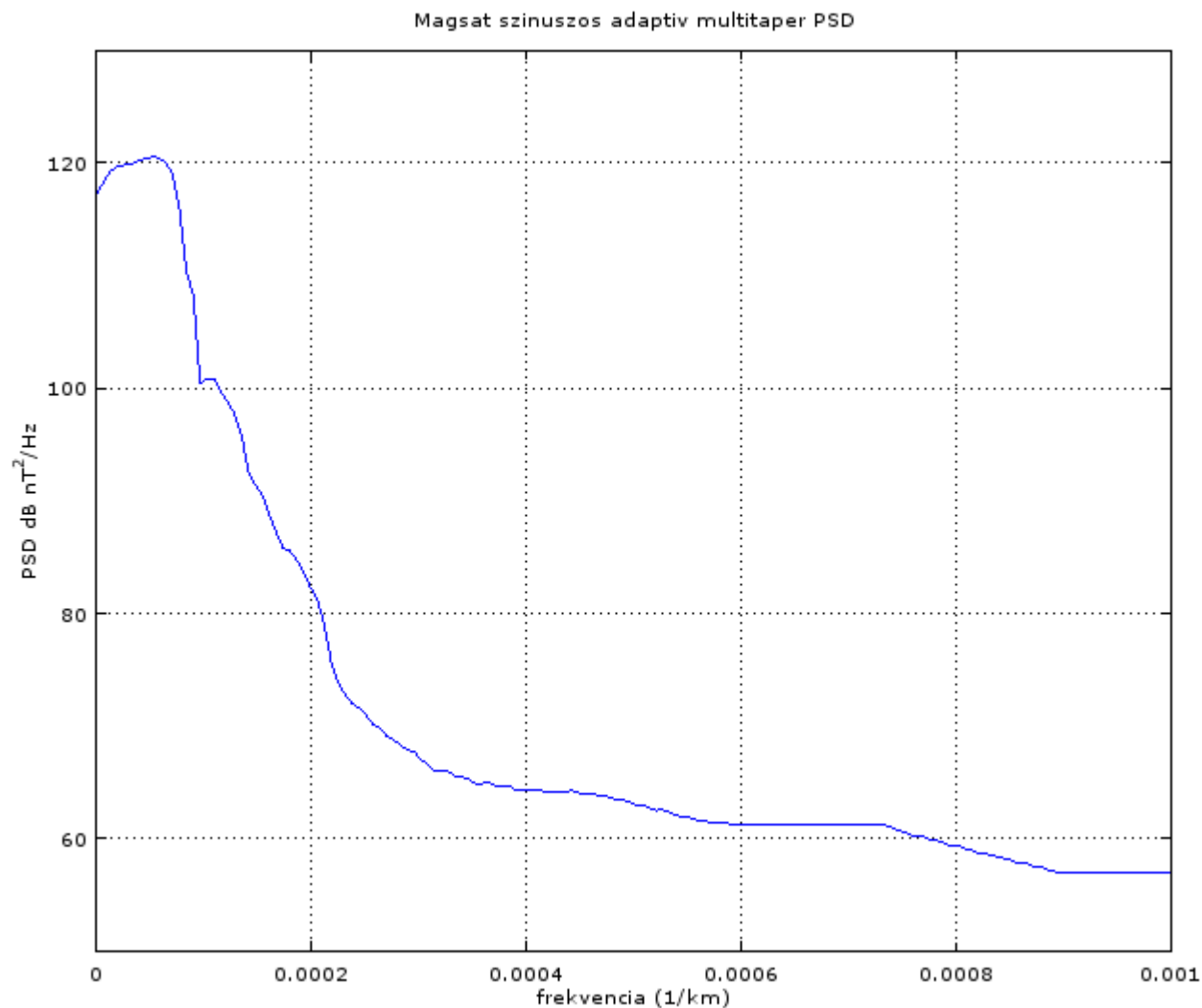


DPSS adaptív PSD becslés, $NW=4$

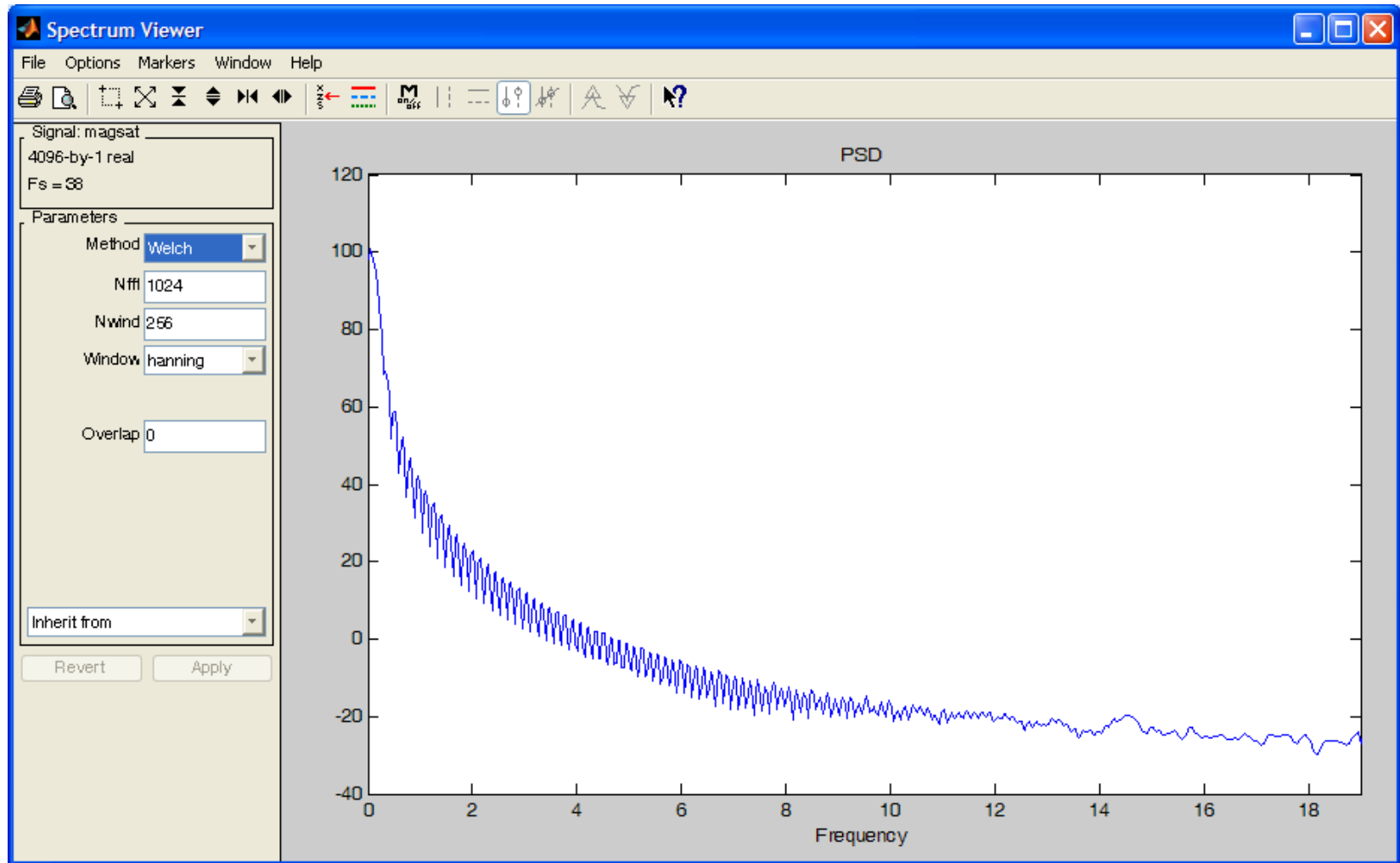
```
% Thomson multitaper módszer PSD becslés  
NW = 4  
figure(3)  
pmtm(xsi,NW,[],ss);  
xlabel('frekvencia (kHz)');  
ylabel('PSD dB/Hz');  
title('601 szinuszos DPSS módszer, NW=4');
```



Magsat multitaper PSD becslés



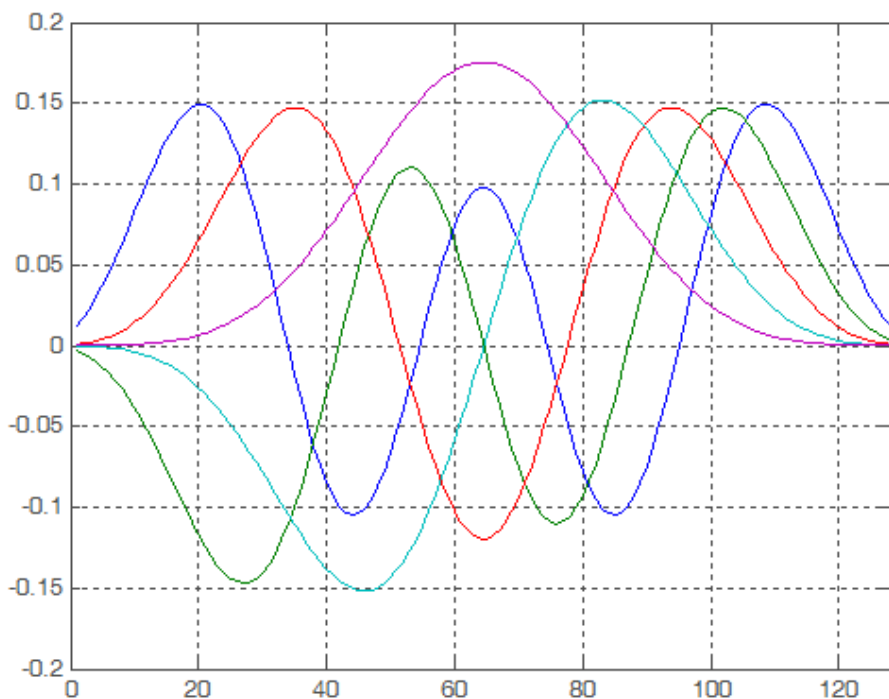
Magsat Welch PSD becslés



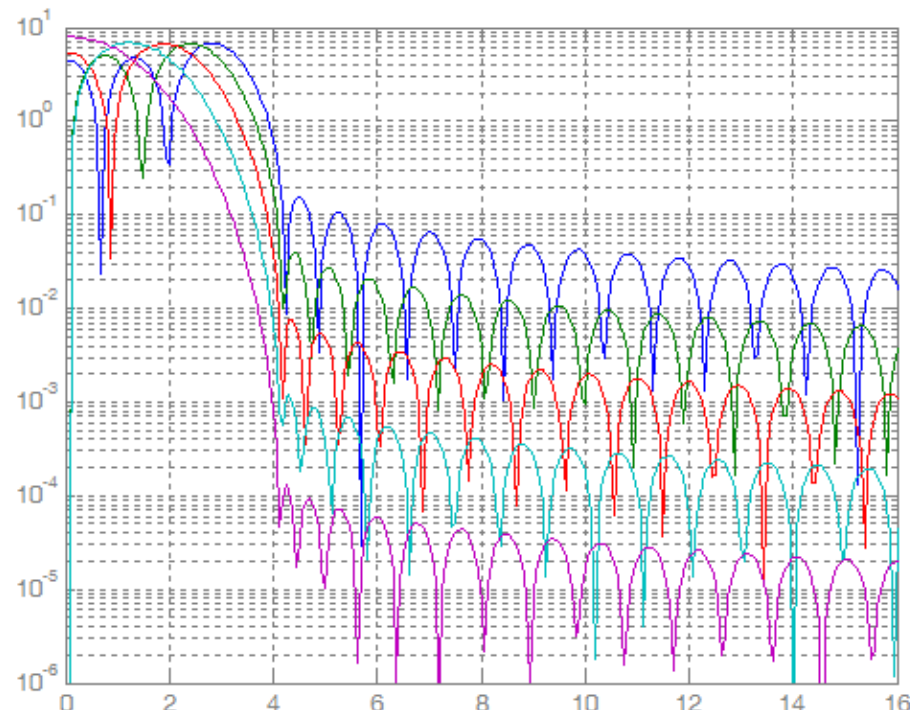
Matlab SPTool

DPSS ablakok

- idő-frekvenciaszélesség szorzata: NW
 - nagyobb NW , szélesebb csúcsok, nagyobb spektrális szivárgás (nem adaptív módszer)

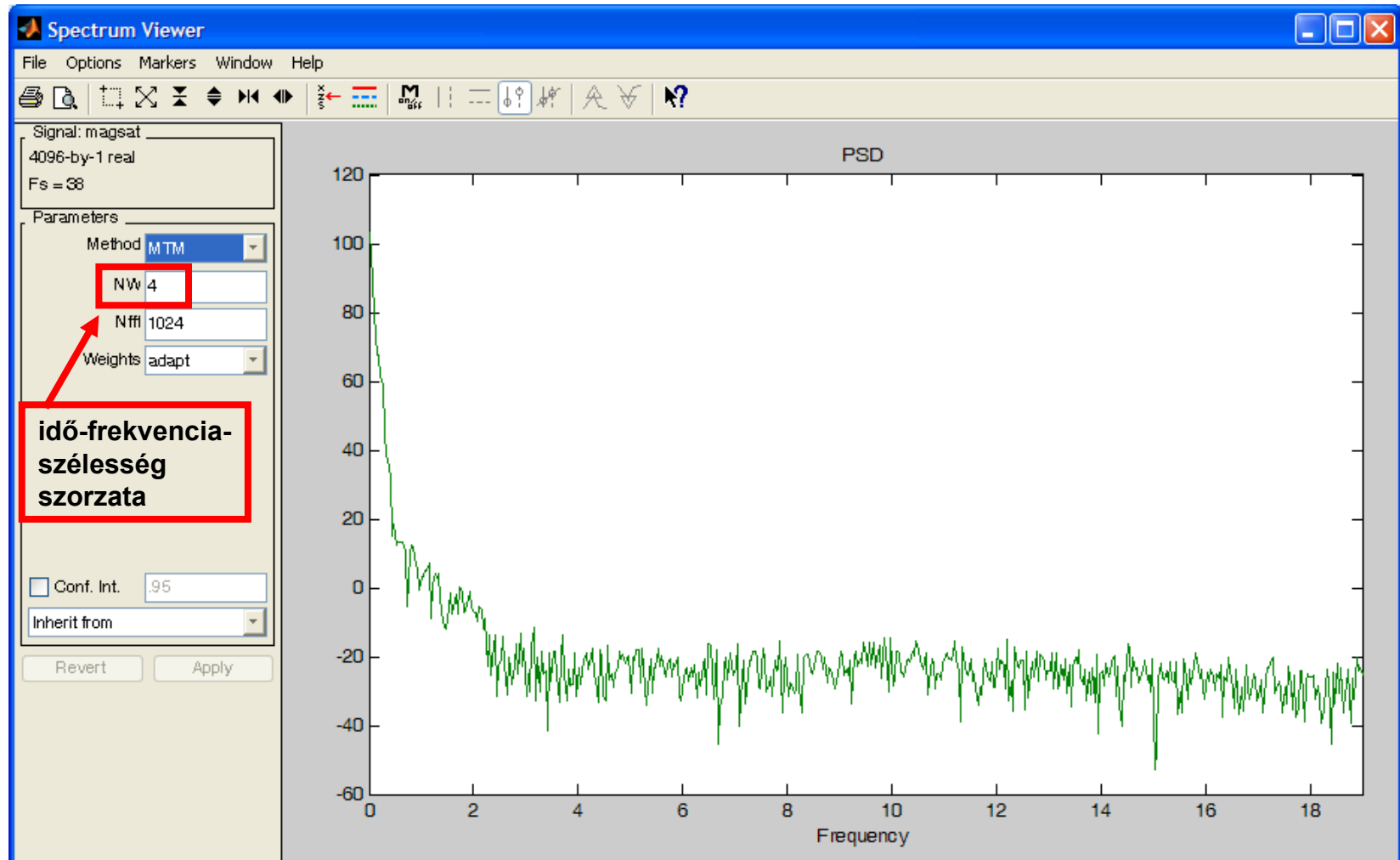


DPSS ablakok, $NW = 4$



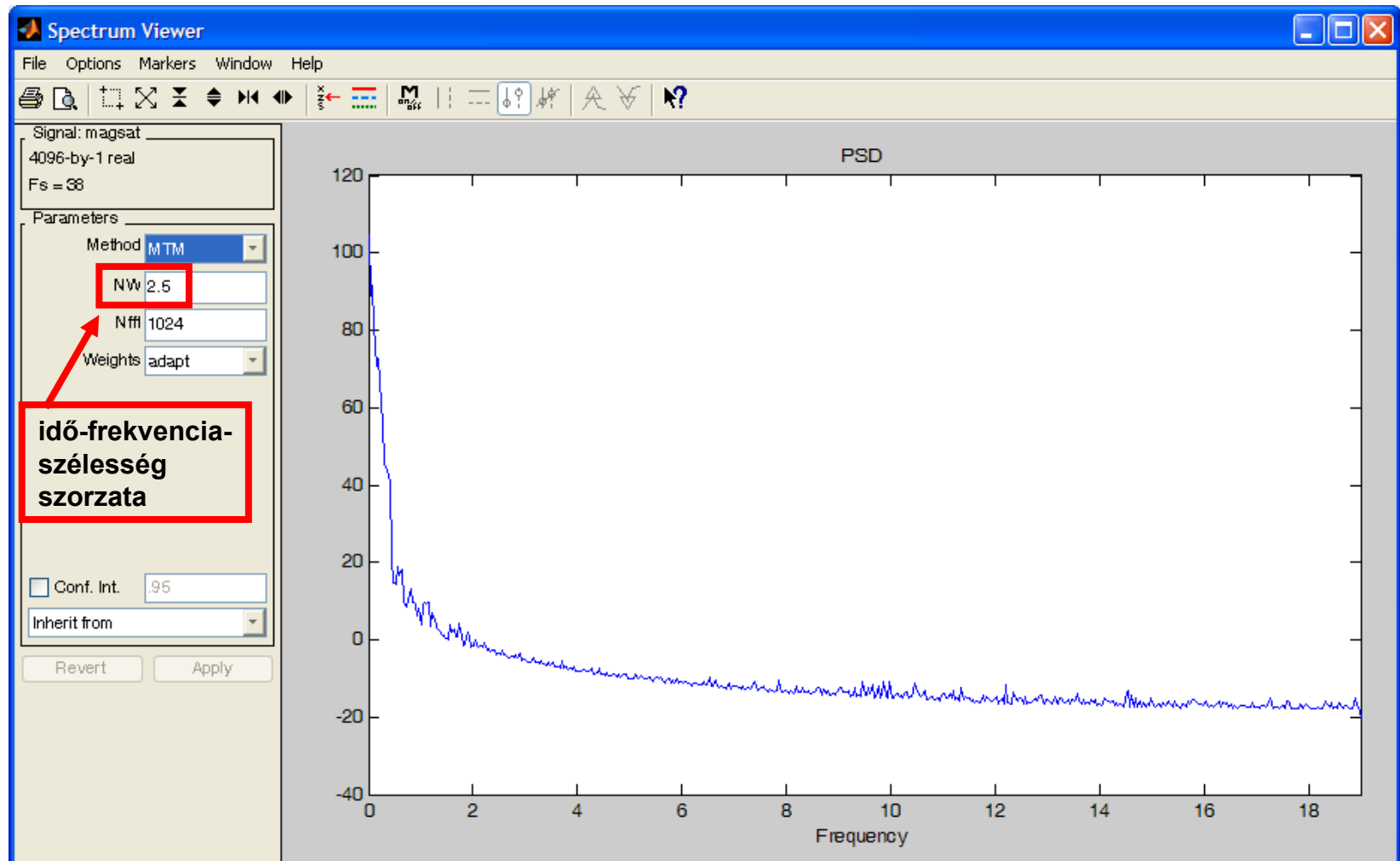
DPSS ablakok DFT amplitúdó, $NW = 4$

Magsat DPSS adaptív PSD becslés



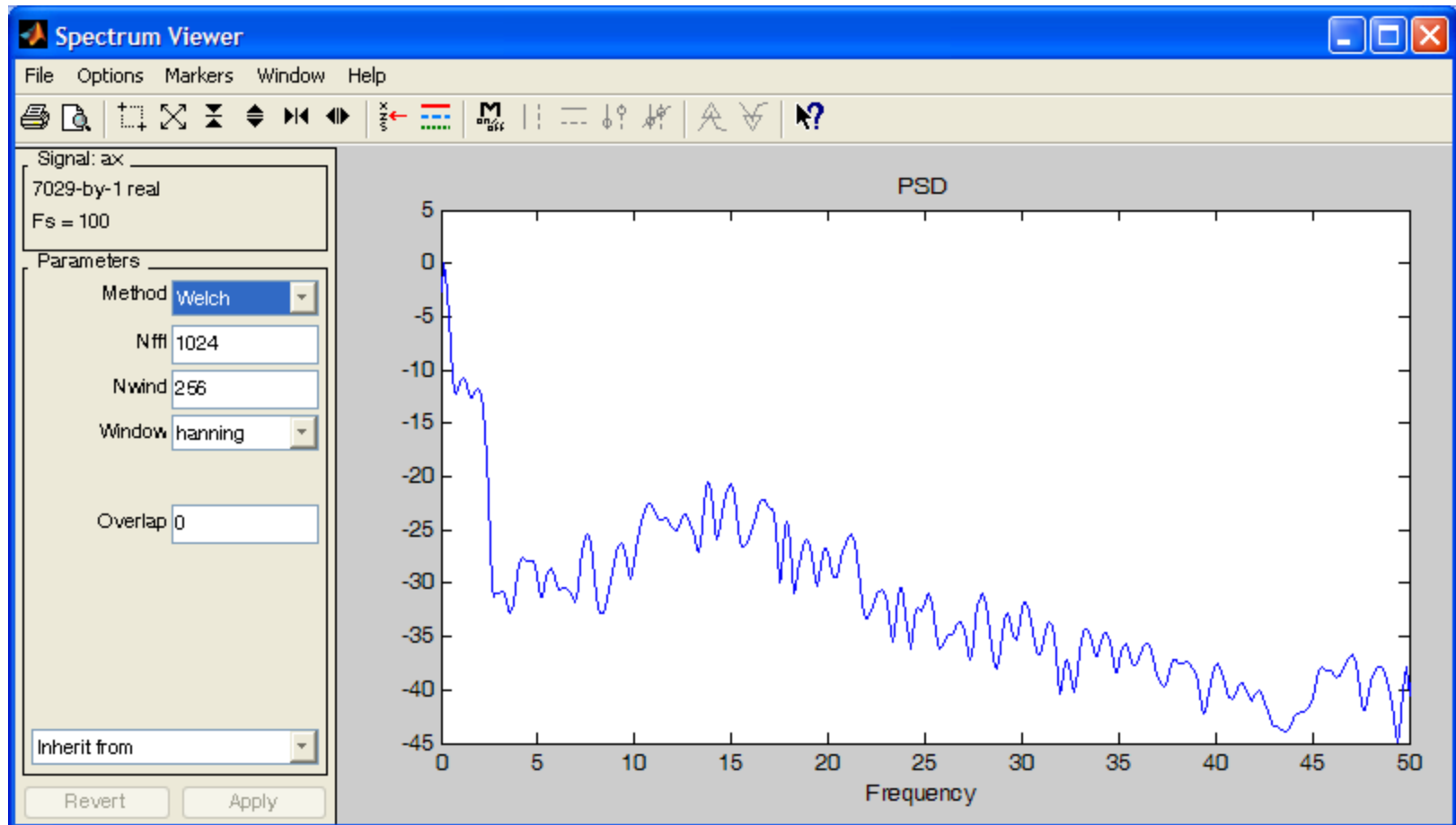
Matlab SPTool

Magsat DPSS adaptív PSD becslés



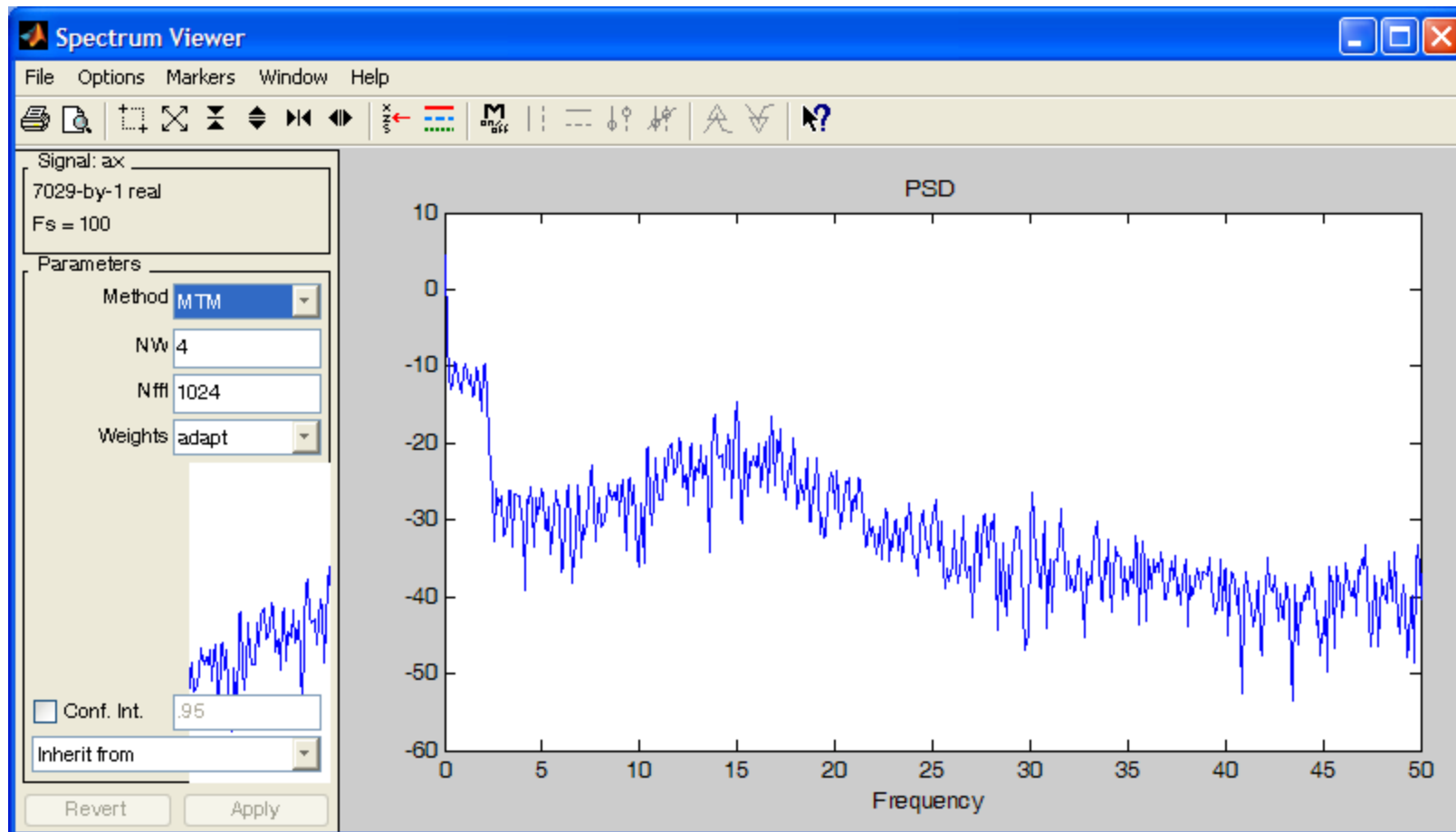
Matlab SPTool

SPTool – kerék gyorsulás PSD



a_x gyorsulás

SPTool – kerék gyorsulás PSD



a_x gyorsulás