

Kiegyenlítő számítások: Bevezetés

Barsi Árpád

A tárgy célja

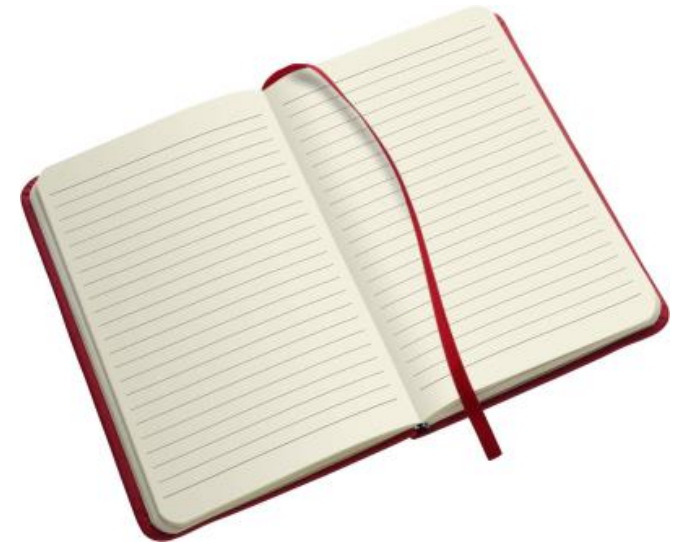
- Idézet a TAD-ból: „A tárgy célja megismertetni a hallgatókat a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika eszközeivel, amelyek a mérések feldolgozásakor használatosak. A földmérési és térinformatikai gyakorlatban gyűjtött **mérési eredmények feldolgozására** bemutatjuk a használatos kiegyenlítési eszközöket, számítógépes megoldásokat és önálló példamegoldáson keresztül begyakoroljuk azokat. Az oktatás során különös hangsúlyt fektetünk a számítógépes támogatás kihasználására, mind a numerikus, mind a grafikus eredmények szempontjából.”

A tárgy célja (nemhivatalos megfogalmazás)

- Általában a földmérés kapcsán felmerülő mérések feldolgozása
- A mérési hibák megértése, kezelése, figyelembe vétele a gyakorlatban
- A pontossági mérőszámok megértése, használata a mérések tervezésében, a mérőműszerek és módszerek minősítésében
- A matematikai eljárások rutinszerű alkalmazása a gyakorlatban
- Numerikus számítógépes környezet használata a feladatok megoldásában
- „Kvantumugrás” a tárgy megítélésében és az elért osztályzatokban

Fontosabb adatok

- Tárgykód: BMEEOFTAG42
- Tárgyfelelős/előadó/gyakorlatvezető:
 - Barsi Árpád (barasi.arpad@emk.bme.hu)
- Követelmények:
 - Vizsga
 - 4 kredit
 - 2 ZH
 - 1 házi feladat



Katalógus

- Beke Zoltán
- Bogicevic Anna
- Czibik-Felső Ádám
- Jámbor Gabriella
- Nagy Attila
- Nagy Szilveszter
- Oláh Márk
- Seltenreich Zsombor Győző
- Szabó Dorottya
- Szécsi Tamás
- Varga Dániel



Órák ütemezése

- Órák kezdése?

Hét		Kiegyenlítő számítások EA		Kiegyenlítő számítások GY	
1	+	2. 14.	Bevezetés, a kiegyenlítő számítások célja, alkalmazásai, eszközei, lineáris algebra	2. 14.	Matlab felfrissítés, lineáris algebrai számítások, grafika
2	#	2. 21.	Valószínűségelméleti alapok	2. 21.	
3	+	2. 28.	Matematikai statisztika	2. 28.	Statisztikai számítások Matlabban
4	#	3. 6.	Hibaelmélet	3. 6.	
5	+	3. 13.	Hibaterjedés	3. 13.	Hibaterjedés számítása Matlabban
6	#	3. 20.	ZH	3. 20.	
7	+	3. 27.	Legkisebb négyzetek módszere, közvetítő egyenletek	3. 27.	Kiegyenlítés számítása Matlabban
8		4. 3.	Tavaszi szünet	4. 3.	Tavaszi szünet
9	#	4. 10.	Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel, pontossági mérőszámok	4. 10.	
10	+	4. 17.	Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel, kényszerekkel	4. 17.	Kiegyenlítés számítása Matlabban
11	#	4. 24.	Hálózatkiegyenlítés, robusztus kiegyenlítés	4. 24.	
12	+	5. 1.	szünet - május 1	5. 1.	szünet - május 1
13	#	5. 8.	ZH	5. 8.	
14	+	5. 15.	Hálózatkiegyenlítés számítása Matlabban	5. 15.	Kiegyenlítés BINGO-val
15	#	5. 22.	Függvénymeghatározás, sztochasztikus folyamatok	5. 22.	

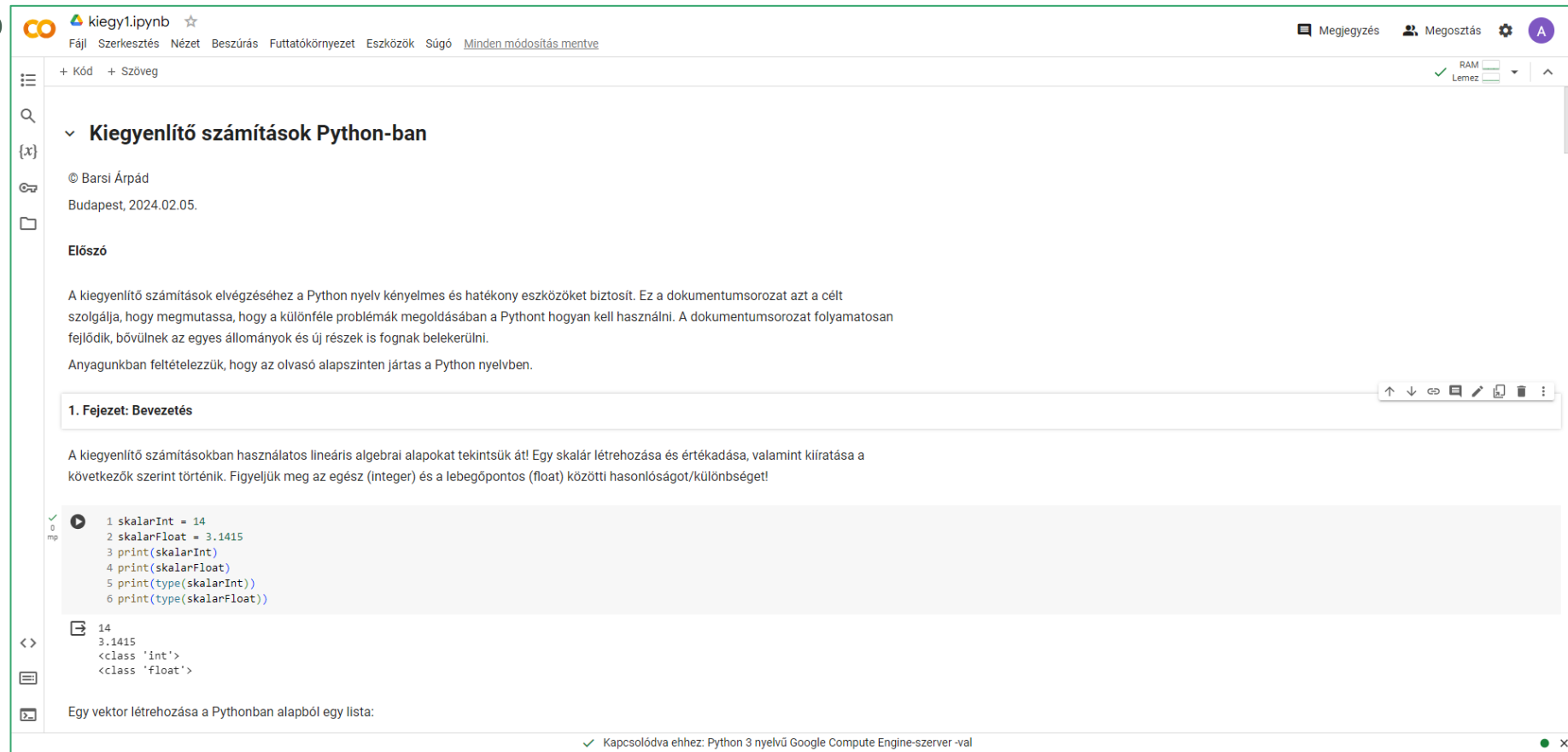
Technikai „körülmények”

- Előadás-gyakorlat ütemezése
 - Ld. Előző dia
- Számítógéphasználat (labor vs saját)
- Anyagok elérhetősége
 - Minden az oktatási portálon
- Házi feladat elkészítése, beadása
 - Csak digitálisan, műszaki leírással együtt, pdf formátumban
- Számonkérések
 - Elektronikus ZH (oktatási portálon)



Jövőbetekintés...

- Matlab helyett Python
- Google Colab munkafüzetek
- Van rá érdeklődés?



The screenshot shows a Google Colab notebook interface. The top bar includes the Colab logo, the filename 'kiegy1.ipynb', and various menu options like 'Fájl', 'Szerkesztés', 'Nézet', 'Beszúrás', 'Futtatókörnyezet', 'Eszközök', 'Súgó', and 'Minden módosítás mentve'. On the right, there are buttons for 'Megjegyzés', 'Megosztás', and a settings icon, along with a RAM usage indicator.

The left sidebar contains a document structure with a search icon, a list icon, and a folder icon. The main content area is titled 'Kiegyenlítő számítások Python-ban' and includes the following text:

© Barsi Árpád
Budapest, 2024.02.05.

Előszó

A kiegyenlítő számítások elvégzéséhez a Python nyelv kényelmes és hatékony eszközöket biztosít. Ez a dokumentumsorozat azt a célt szolgálja, hogy megmutassa, hogy a különféle problémák megoldásában a Pythont hogyan kell használni. A dokumentumsorozat folyamatosan fejlődik, bővülnek az egyes állományok és új részek is fognak belekerülni.

Anyagunkban feltételezzük, hogy az olvasó alapszinten jártas a Python nyelvben.

1. Fejezet: Bevezetés

A kiegyenlítő számításokban használatos lineáris algebrai alapokat tekintjük át! Egy skálár létrehozása és értékadása, valamint kiírása a következők szerint történik. Figyeljük meg az egész (integer) és a lebegőpontos (float) közötti hasonlóságot/különbséget!

```
1 skalarInt = 14
2 skalarFloat = 3.1415
3 print(skalarInt)
4 print(skalarFloat)
5 print(type(skalarInt))
6 print(type(skalarFloat))
```

The output of the code is displayed below the code cell:

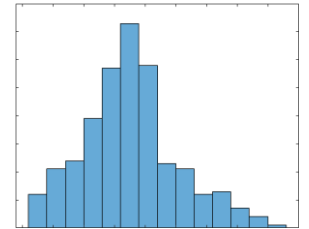
```
14
3.1415
<class 'int'>
<class 'float'>
```

Below the output, there is a text box that says: 'Egy vektor létrehozása a Pythonban alaptól egy lista:'.

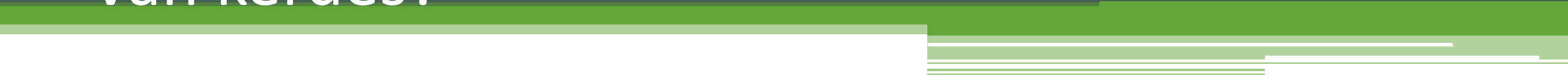
The bottom status bar indicates: 'Kapcsolódva ehhez: Python 3 nyelvű Google Compute Engine-szerver -val'.

MS Teams csoport

- Csatlakozási link:
 - <https://teams.microsoft.com/l/team/19%3AnxuEYmPVtmCKt62LU94jmZ-kFMTYtWEIcDsWtNce1S01%40thread.tacv2/conversations?groupId=36230210-4be0-4ffe-b90f-9f335659512d&tenantId=6a3548ab-7570-4271-91a8-58da00697029>

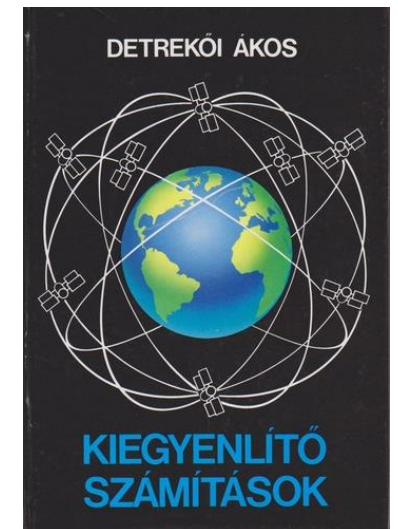


Van kérdés?

The bottom of the slide features a series of horizontal bars. A thick green bar spans the width of the slide. Below it, on the right side, are several thinner bars in varying shades of green and white, creating a stepped, modern design.

Kik oktatták a Kiegyenlítő számításokat?

- Hazay István (1901-1995)
 - az MTA rendes tagja, Kossuth-díjas, a BME tanszékvezetője, rektora, díszdoktora, Budapest díszpolgára
- Detrekői Ákos (1939-2012)
 - az MTA rendes tagja, Széchenyi-díjas, a BME tanszékvezetője, dékánja, rektora



Lineáris algebra - emlékezetfrissítés

The title is centered on a dark green background. Below the title, there is a thick green horizontal bar. To the right of this bar, there are several thin, overlapping horizontal lines in shades of green and white, creating a layered, modern look.

Alapfogalmak, jelölések

- Skalár: a
- Pl. $a = 3,1415$
- Vektor: $\mathbf{a}$
- Kézzel (írásban): $\underline{a}$
- Mátrix: $\mathbf{A}$
- Kézzel (írásban): $\underline{\underline{A}}$

Vektorok

- Sorvektor, oszlopvektor
- Egy elem hivatkozása a_i

$$\mathbf{a} = [1 \quad 3 \quad 5 \quad 7]$$

$$\mathbf{a} = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b}^T = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]$$

$$\mathbf{b} = [2 \quad 4 \quad 6 \quad 8]^T$$

Mátrixok

$$\mathbf{A} = \underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Egy elem hivatkozása

$$a_{ij}$$

Mátrix-típusok

- Négyzetes (kvadratikus) mátrix, felső-alsó háromszögmátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

Mátrix-típusok

- Diagonális mátrix, egységmátrix, zérus/zéró mátrix

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} = \langle d_{11} \quad d_{22} \quad \cdots \quad d_{nn} \rangle$$

$$\mathbf{I}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Jelölik $\mathbf{E}$ -vel is és
diagonális mátrixként is

$$\mathbf{0}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

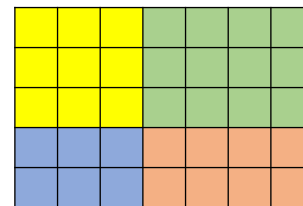
Mátrix-típusok

- Ritka és sűrű mátrix
- Hipermátrix (block-matrix)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} \end{bmatrix}$$

- A méretekre azonban ügyelni kell!

$$\mathbf{A}_{(r+q,s+t)} = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{(r,s)} & \mathbf{C}_{(r,t)} \\ \mathbf{D}_{(q,s)} & \mathbf{E}_{(q,t)} \end{bmatrix}$$



Műveletek

- Összeadás, kivonás

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$$

$(n,m) \quad (n,m) \quad (n,m)$

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$$

$(n,m) \quad (n,m) \quad (n,m)$

$$d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$$

- Tulajdonságok:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

$$\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$$

Műveletek

- Transzponálás

$$\mathbf{A} = \underset{(n,m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{green arrow}} \mathbf{A}^T = \underset{(m,n)}{\mathbf{A}}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

- Régi jelöléssel $\mathbf{A}^*$

Szimmetrikus és ortogonális mátrix

- Szimmetrikus mátrix

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$$

- Ortogonalis mátrix

$$\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$$

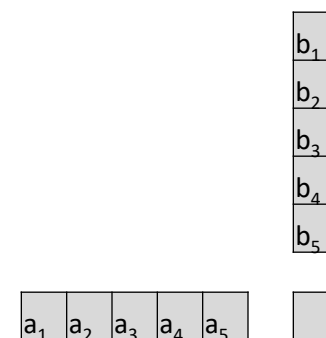
Vektorműveletek

$$\mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\mathbf{b} = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

- Vektor skaláris szorzata

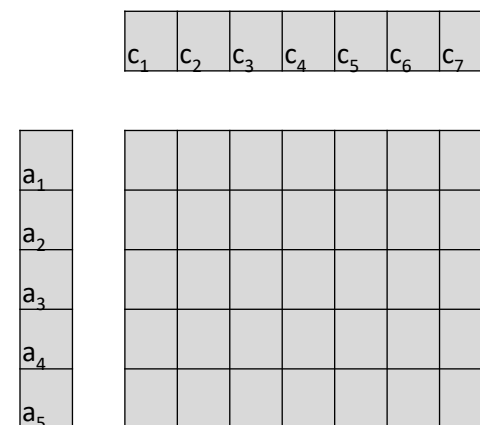
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^T = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$



- Vektor diadikus szorzata

$$\mathbf{c} = [c_1, c_2, \dots, c_m]$$

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{c} = \begin{bmatrix} a_1 c_1 & a_1 c_2 & \dots & a_1 c_m \\ a_2 c_1 & a_2 c_2 & \dots & a_2 c_m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n c_1 & a_n c_2 & \dots & a_n c_m \end{bmatrix}$$



Mátrixműveletek

- Mátrix szorzása skalárral

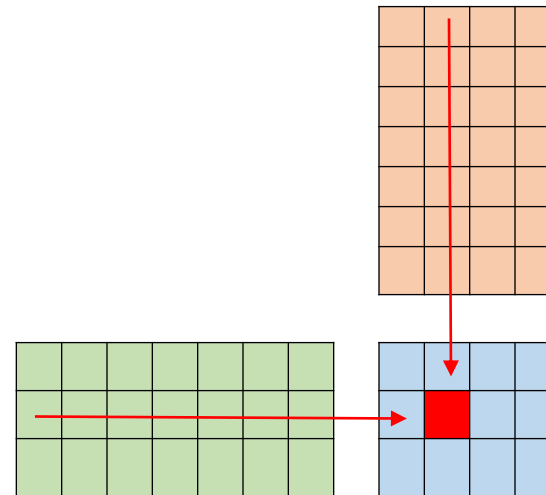
$$\mathbf{C}_{(n,m)} = a \cdot \mathbf{B}_{(n,m)} \quad c_{ij} = a \cdot b_{ij} \quad \forall i, j$$

- Mátrixok szorzása

$$\mathbf{C}_{(n,p)} = \mathbf{A}_{(n,m)} \cdot \mathbf{B}_{(m,p)} \quad c_{ij} = \sum_k a_{ik} \cdot b_{kj} \quad \forall i, j$$

- Általában pedig igaz

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$$



Mátrix inverze

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{I}$$

- Ha

$$|\mathbf{A}| \neq 0$$

- Továbbá igaz

$$\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^{-1} = \mathbf{A}$$

$$\left(\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T$$

Mátrixműveletek sajátosságai

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \quad \mathbf{I} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$$

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \quad (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} = \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^T & \mathbf{B}^T \\ \mathbf{C}^T & \mathbf{D}^T \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{E} & \mathbf{B} + \mathbf{F} \\ \mathbf{C} + \mathbf{G} & \mathbf{D} + \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \mathbf{G} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G} & \mathbf{A} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \\ \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{G} & \mathbf{C} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{D} \cdot \mathbf{H} \end{bmatrix}$$

Minden bemutatott azonosságra érvényes:
Csak ha a mátrixok mérete megfelelő!



Mátrix jellemzése skalárral

- Nyom (Spur)

$$Sp(\mathbf{A}) = \sum_i a_{ii}$$

▫ Jelölik még $tr(\mathbf{A})$

- Determináns

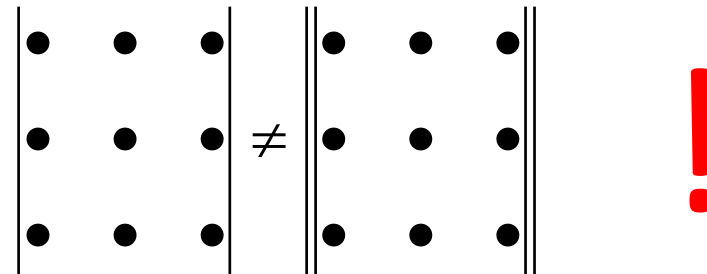
$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \neq \begin{vmatrix} \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet \end{vmatrix} \quad !$$

Mátrix jellemzése skalárral

- Norma
 - Euklideszi norma

$$\|\mathbf{A}\| = \left\| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{\sum_i \sum_j a_{ij}^2}$$



The diagram illustrates a common misconception about matrix norms. It shows two 3x3 matrices, each represented by a 3x3 grid of dots enclosed in vertical bars. A not-equal sign ($\neq$) is placed between the two matrices. To the right of the second matrix is a large red exclamation mark, indicating that the two matrices are not equal, which serves as a warning or correction to a potential misunderstanding.

Köszönöm a figyelmet!



Boldog Valentin Napot!