Kiegyenlítő számítások: Valószínűségelméleti alapok

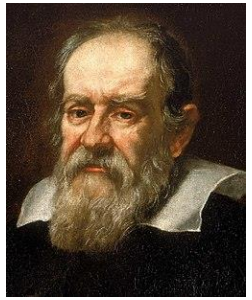
Barsi Árpád

A modell

- A geodéziai mérések célja: a Föld alakjának, nehézségi erőterének, a felszíni alakzatok helyzetének, méretének meghatározása és ábrázolása
- Bonyolult folyamatok és rendszerek (a méréseknél is) kezelése → modell
- Definíció: „fizikai rendszerek, folyamatok egyszerűsített, matematikailag szabatosan leírható idealizált mása, amely annak geometriai, fizikai stb. tulajdonságait szemlélteti”
- Fajtái:
  - Funkcionális: determinisztikus összefüggések
  - Sztochasztikus: véletlenre vonatkozó összefüggések

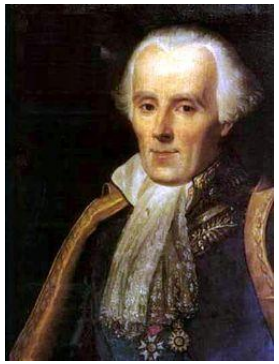
Egy kis történelem…

- Gerolamo Cardano (1501 – 1576)
  - csillagjós, orvos, 131 könyv + 170 elégetett kézirat + 111 hagyaték
  - „A szerencsejátékról” és „A kockajátékról” → bizonytalanság, eseménytér
- Galileo Galilei (1564 – 1642)
  - „Gondolatok a kockajátékról”
- Blaise Pascal (1623 – 1662)
  - Orvosi tanács, „osztozkodás problémája”, levelezés Pierre de Fermat-val
  - Várható érték, rulettkerék

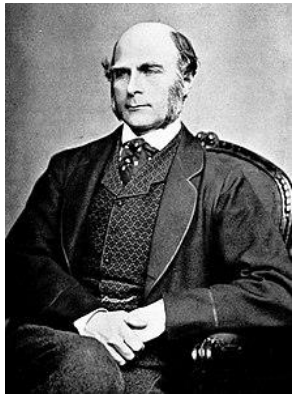


Még egy kis történelem

- Jakob Bernoulli (1654 – 1705)
  - Valószínűség meghatározása, a priori valószínűség, „nagy számok törvénye”
- Thomas Bayes (1702 – 1761)
  - Feltételes valószínűség („Tanulmány a valószínűség tana egyik problémájának megoldásáról”)
- Pierre-Simon de Laplace (1749 – 1827)
  - Mérések elemzése, majd cikk; 1812 és 1814 „A valószínűség analítikus elmélete”
- Antoine Lavoisier (1743 – 1794)
  - méréstechnika



S végül ne maradjon ki



- Jules Henri Poincaré (1854 – 1912)
- Francis Galton (1822 – 1911)
- John Graunt (1620 – 1674) és William Petty (1623 – 1687)
  - „A statisztikai atyjai”
- Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

Alapfogalmak

- Véletlen (*random*):
  - a köznyelvben a meghatározhatatlan, megjósolhatatlan vagy szabálytalan dolgok
  - a filozófiában a nem-determinisztikus, vagyis nem-elrendelt esemény
  - a tudományban ha az esemény kimenete nem jósolható meg vagy az nagyon bonyolult
- Véletlen tömegjelenség: adott körülmények között végbemenő folyamat, ami sokszor megismételhető
- Valószínűségszámítás (valószínűségelmélet) tárgya – (*Probability theory*)

Alapfogalmak

- Elemi esemény (ω): egy jelenség kimenetele
- Esemény: egy konkrét elemi esemény, jelölésük: *A*, *B*, …
- Eseménytér (Ω): elemi események összessége
- Összetett esemény: elemi események bizonyos összessége, az eseménytér részhalmaza

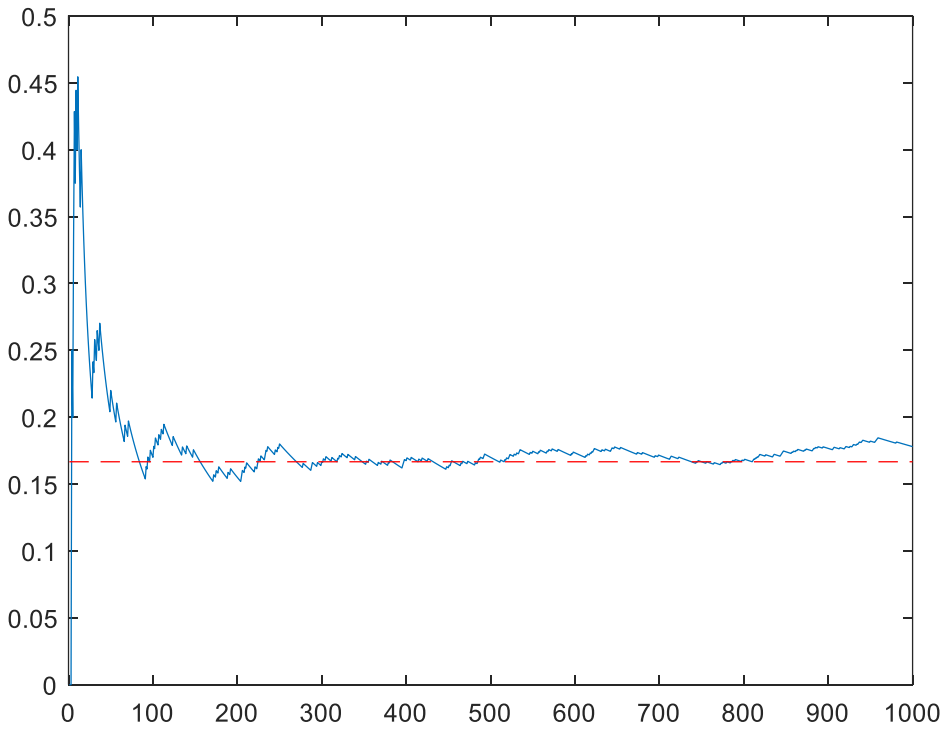
Műveletek az eseményekkel

- Események, mint halmazok
- Esemény ellentéte: $\overline{A}$
- Események összege: $A + B$
- Események szorzata: $A \cdot B$
- Kizáró események: $A \cdot B = 0$
- Események különbsége: $A - B = A \cdot \overline{B}$
- Események összessége: $\sum_i A_i = 1$
- Eseményalgebra

Relatív gyakoriság

- Az összes esemény bekövetkezésének száma: n
- A esemény bekövetkezésének száma: k_A
- Relatív gyakoriság: $\frac{k_A}{n}$
- Erre igaz: $0 \le \frac{k_A}{n} \le 1$
- A valószínűség (*probability*):

$$0 \le P(A) \le 1$$



A valószínűség néhány tulajdonsága

$$\frac{k_{A+B}}{n} = \frac{k_A + k_B}{n} = \frac{k_A}{n} + \frac{k_B}{n}$$

$$P(A+B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

$$P(\Omega) = 1 \qquad 0 \le P(A) \le 1 \qquad P(\Omega) = P(A) + P(\overline{A}) \qquad P(\overline{A}) = 1 - P(A)$$

- Kolmogorov axiomái, valamint néhány tétel

Feltételes valószínűség

- Definíció: $$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{\frac{k_{AB}}{n}}{\frac{k_B}{n}}$$
- Továbbá igaz

$$0 \le P(A|B) \le 1$$

$$P(B|B)=1$$

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \neq P(B|A)=\frac{P(BA)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(A)}$$

Valószínűségi tételek

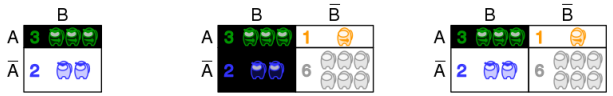
- Teljes valószínűség tétele

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

- Bayes-tétel

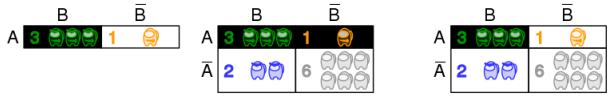
$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Number of occurences		Being suspicious B	Not being suspicious $\bar{B}$	sum
An assassin	A	3	1	4
Not an assassin	$\bar{A}$	2	6	8
sum		5	7	12



P(A, given B) · P(B) = P(A|B) · P(B)

$$\frac{3}{\cancel{3+2}} \cdot \frac{\cancel{3+2}}{3+1+2+6} = \frac{3}{3+1+2+6}$$



P(B, given A) · P(A) = P(B|A) · P(A)

$$\frac{3}{\cancel{3+1}} \cdot \frac{\cancel{3+1}}{3+1+2+6} = \frac{3}{3+1+2+6}$$

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$$

$$\therefore \quad P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Gyakorlati példa következik!

Bayes-tétel és gyakorlati példa (thx ChatGPT)

- „A Bayes-tétel lényege, hogy ha már van egy elképzelésünk (vagy előítéletünk) valamiről, és aztán új információt kapunk, akkor ezt az új adatot beépítve frissíthetjük a véleményünket. Például, képzeld el, hogy azt gondolod, hogy ma esni fog az eső, de előtte még nem tudod pontosan. Majd meglátod, hogy az ég sötét, és ez megerősíti a gyanúdat. A Bayes-tétel segít abban, hogy ezt a változtatást pontosan, matematikailag is meg tudjuk határozni: a korábbi véleményedet (a priori esélyt) úgy módosítod, hogy figyelembe veszed, mennyire valószínű, hogy a megfigyelt jelenség (a sötét ég) akkor is előjönne, ha az eredeti elképzelésed igaz.”

Egy példa konkrét számokkal

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)$$

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k) \cdot P(B_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(A|B_i) \cdot P(B_i)}$$

Tegyük fel, hogy van egy ritka betegség, amely az általános lakosság 1%-át érinti, és létezik egy szűrőteszt, amely a betegség kimutatására szolgál. A teszt jellemzői a következők:

- **Ha valaki beteg (A),** a teszt 90%-os eséllyel pozitív eredményt ad:

$$P(\text{Pozitív} \mid \text{Beteg}) = 0{,}9.$$

- **Ha valaki nem beteg ($\neg A$),** a teszt 5%-os eséllyel tévesen pozitív (hamis pozitív):

$$P(\text{Pozitív} \mid \text{Nem beteg}) = 0{,}05.$$

A betegség előfordulási valószínűsége:

$$P(\text{Beteg}) = 0{,}01 \quad \text{és} \quad P(\text{Nem beteg}) = 0{,}99.$$

Lépés 1: Teljes pozitív valószínűség kiszámítása

A teljes pozitív eredmény valószínűsége (B esemény) az alábbi képlettel számolható:

$$P(\text{Pozitív}) = P(\text{Pozitív} \mid \text{Beteg}) \cdot P(\text{Beteg}) + P(\text{Pozitív} \mid \text{Nem beteg}) \cdot P(\text{Nem beteg}).$$

Behelyettesítve:

$$P(\text{Pozitív}) = 0{,}9 \times 0{,}01 + 0{,}05 \times 0{,}99 = 0{,}009 + 0{,}0495 = 0{,}0585.$$

Lépés 2: Bayes-tétel alkalmazása

A Bayes-tétel segítségével kiszámolhatjuk, hogy ha valaki pozitív tesztet kap, mekkora az esélye annak, hogy tényleg beteg:

$$P(\text{Beteg} \mid \text{Pozitív}) = \frac{P(\text{Pozitív} \mid \text{Beteg}) \cdot P(\text{Beteg})}{P(\text{Pozitív})}.$$

Behelyettesítve:

$$P(\text{Beteg} \mid \text{Pozitív}) = \frac{0{,}9 \times 0{,}01}{0{,}0585} = \frac{0{,}009}{0{,}0585} \approx 0{,}1538 \quad \text{vagyis} \quad 15{,}38\%.$$

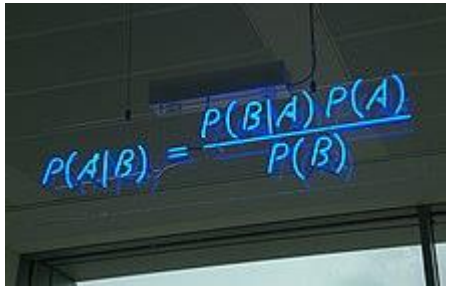
Összefoglalva:

Még ha a teszt igen érzékeny is (90% eséllyel észleli a betegeket), a betegség ritkasága (1%) miatt egy pozitív teszt esetén mindössze körülbelül 15%-os az esélye annak, hogy az illető tényleg beteg. Ez a példán keresztül szemlélteti, hogyan segít a Bayes-tétel az előzetes valószínűségek (a betegség ritkasága) és az új információ (a pozitív teszt eredménye) alapján frissíteni a végső valószínűséget.

Egy sheffieldi lelkész

- Thomas Bayes (1702-1761)
  - Két művet publikált életében
    - Teológiai (1731)
    - Matematikai (1736, névtelenül $\rightarrow$ Newton védelme és Royal Society tagja 1742)
  - Tételét és igazi munkásságát a jegyzeteiből Richard Price adja ki halála után 1763-ban

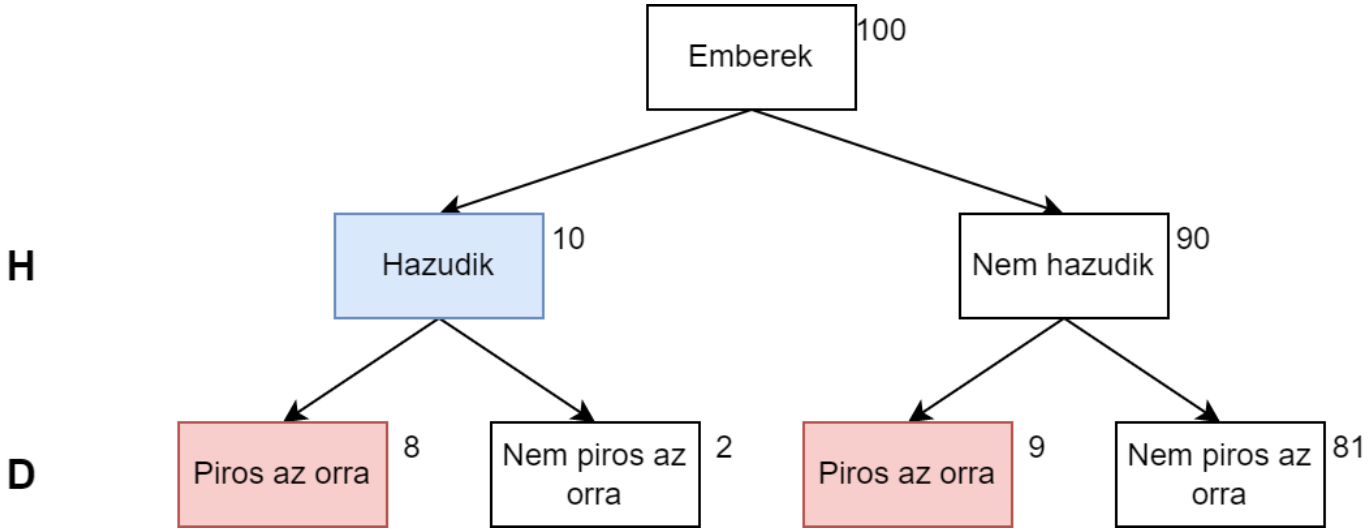
Bayes-tétel alkalmazása



- (*reasoning*)
- Egy faluban 100 emberből 10 hazudik (H). A 10 hazudósból 8-nak piros az orra (D). A 90 nemhazudósból is 9-nek piros az orra. Ha meglátogatjuk a falut és piros orrúval találkozunk, mennyi az esélye, hogy hazudik?

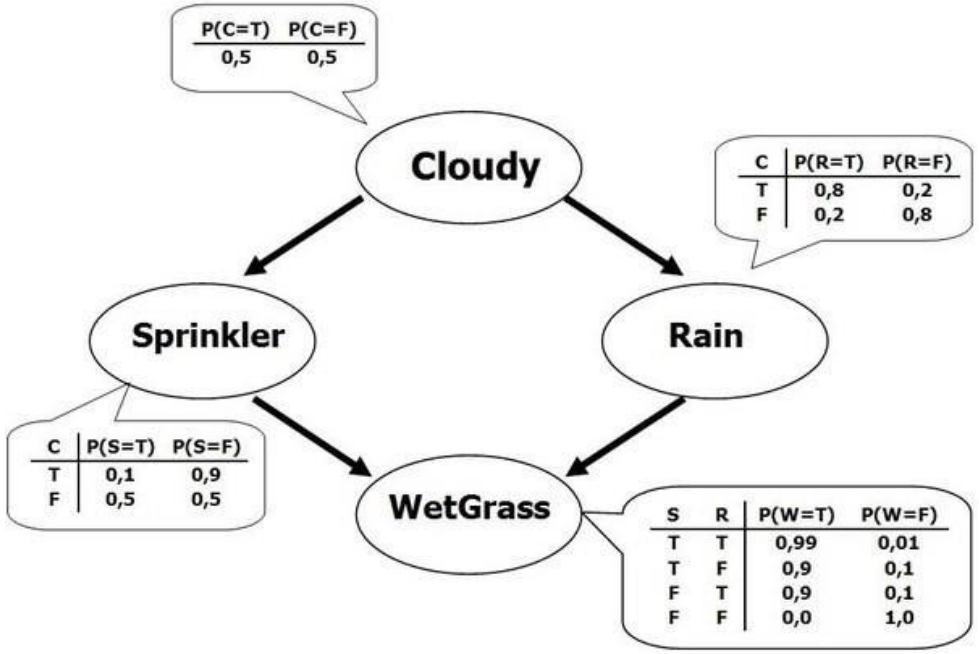
$$p(H|D) = \frac{p(H) \cdot p(D|H)}{p(D)} = \frac{\frac{10}{100} \cdot \frac{8}{10}}{\frac{17}{100}} = 47\%$$

$$p(H|D) = \frac{8}{9+8} = 47\%$$



Még egyszer a Bayes-tétel alkalmazása

- Bayes-háló (valószínűségi háló)



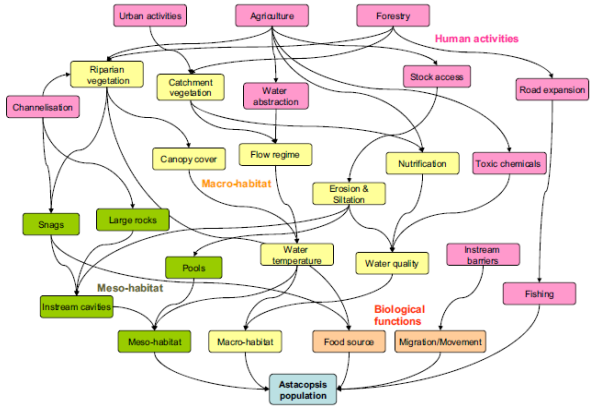
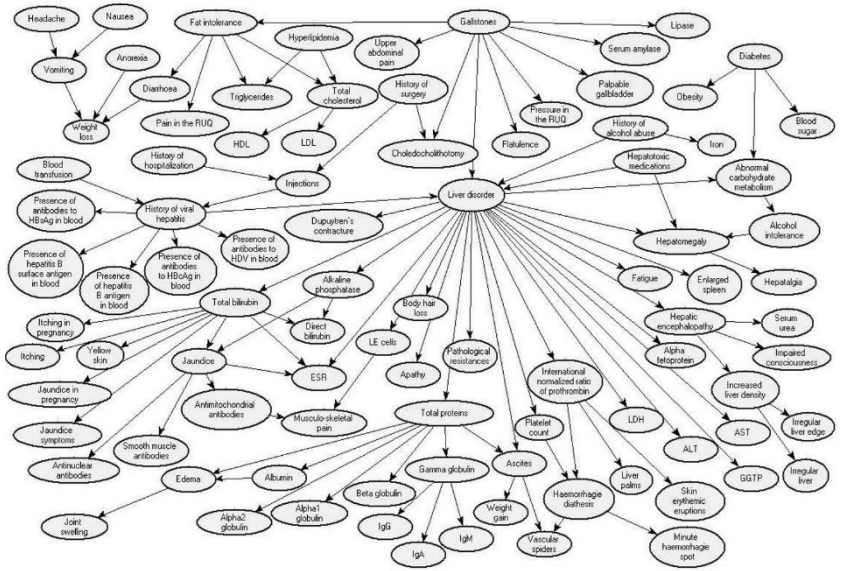


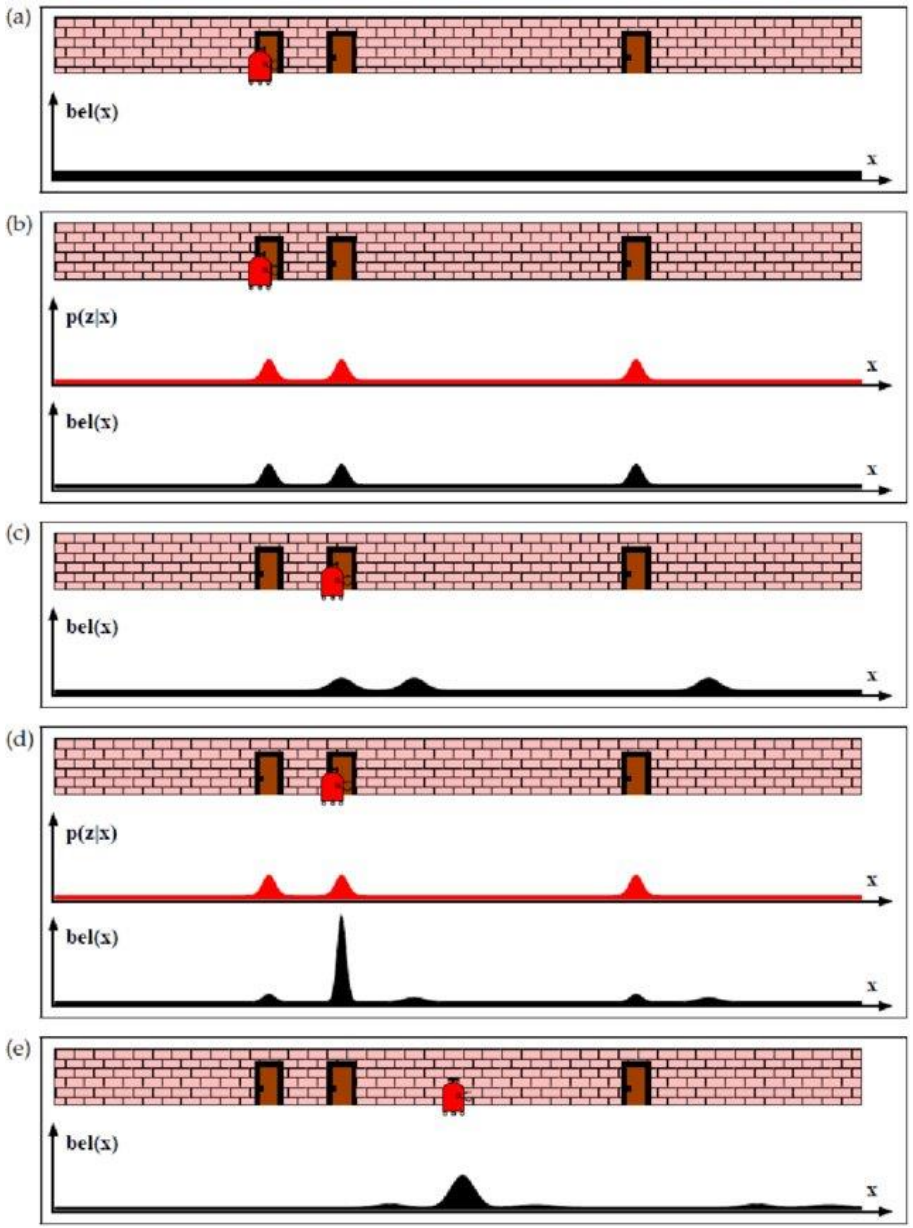
Fig. 2. Conceptual model of the key factors affecting *Astacopsis gouldi* populations.



- Alkalmazások: robotika, (műszaki, orvosi…) diagnosztika, kockázatelemzés…

Utolsó példa

- Robot lokalizáció



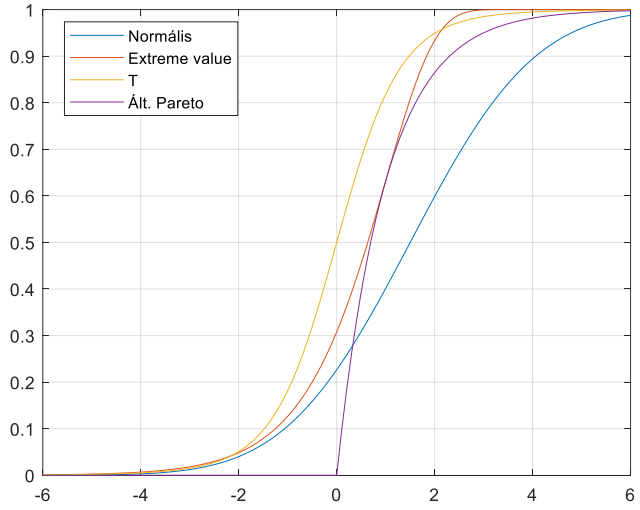
Valószínűségi változó

- *Random variable*
- Definíció: az elemi események kimeneteléhez rendelt valós számérték
- Jelölése: ξ
- Fajtái:
  - Folytonos
  - Diszkrét
- Valószínűségi vektorváltozó: valószínűségi változók vektora
- Jelölése: $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$

Valószínűségi változók eloszlása

- Eloszlásfüggvény – *cumulative distribution function* (CDF)

$$F(x) = P(\xi < x)$$



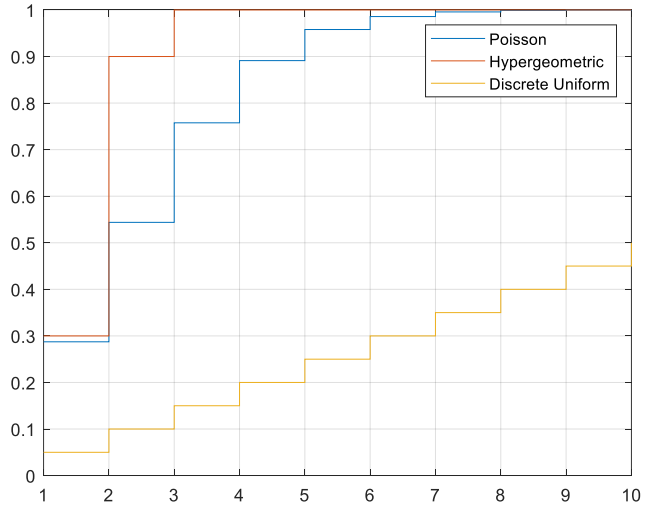
- Jellemzői:

$$0 \le F(x) \le 1$$

$$F(a) \le F(b) \quad ha\ a < b$$

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \qquad \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$

$$P(a \le \xi < b) = F(b) - F(a)$$



Valószínűségi sűrűségfüggvény

- *probability density function* (PDF)

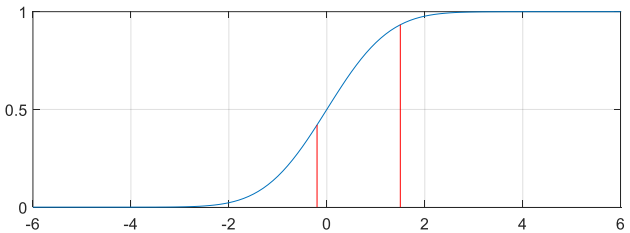
$$\int_{-\infty}^{x} f(t)dt = F(x)$$

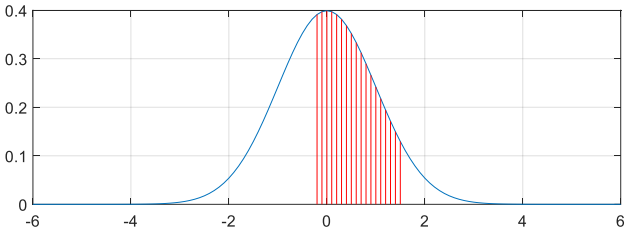
- Jellemzői:

$$f(x) = F'(x)$$

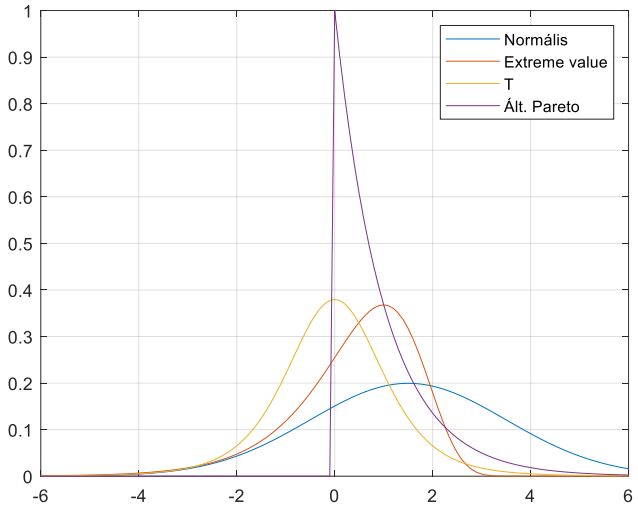
$$f(x) \geq 0$$

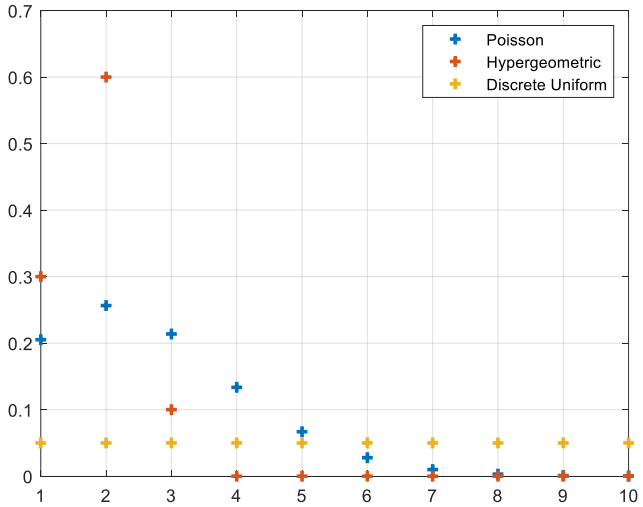
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dt = 1$$





$$P(a \leq \xi < b) = F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(t)dt$$





A valószínűségi változó jellemzői

- Várható érték: a lehetséges értékek valószínűséggel súlyozott közepe

$$M(\xi) = \sum_i x_i p_i$$

- Szórásnégyzet: a várható értéktől való négyzetes eltérés várható értéke

$$D^2(\xi) = M\left([\xi - M(\xi)]^2\right)$$

- Jellemzőik:

$$M(c) = c \qquad M(c\xi) = cM(\xi) \qquad M(\xi_1 + \xi_2) = M(\xi_1) + M(\xi_2) \qquad M(\xi_1\xi_2) = M(\xi_1) \cdot M(\xi_2)$$

$$D^2(\xi) = M(\xi^2) - M^2(\xi)$$

$$D(c) = 0 \qquad D(c\xi) = |c| \cdot D(\xi) \qquad D^2(\xi_1 + \xi_2) = D^2(\xi_1) + D^2(\xi_2)$$

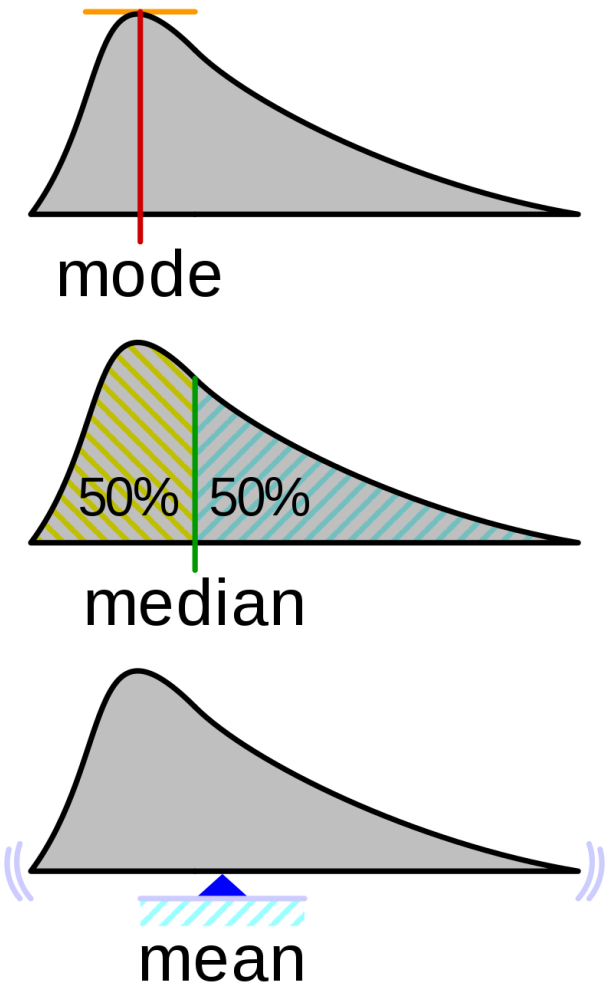
A valószínűségi változó jellemzői

- Medián

$$F(m_e) = \frac{1}{2}$$

- Módusz

$$f(m_o) = \max(f(x))$$



A normális eloszlás

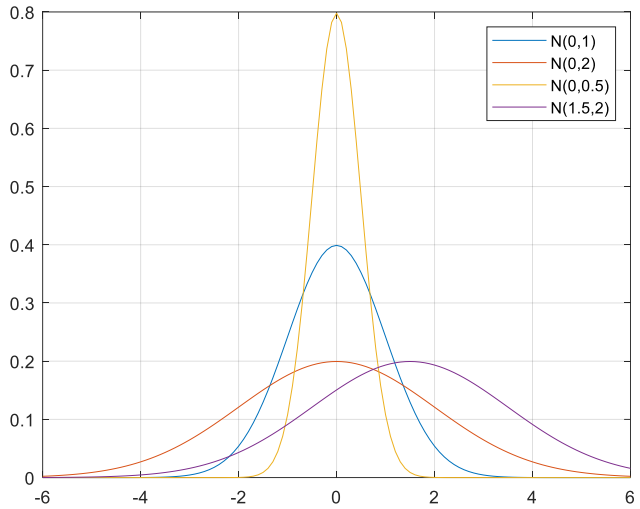
$$N(m,\sigma)$$

- Valószínűségi sűrűségfüggvény

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

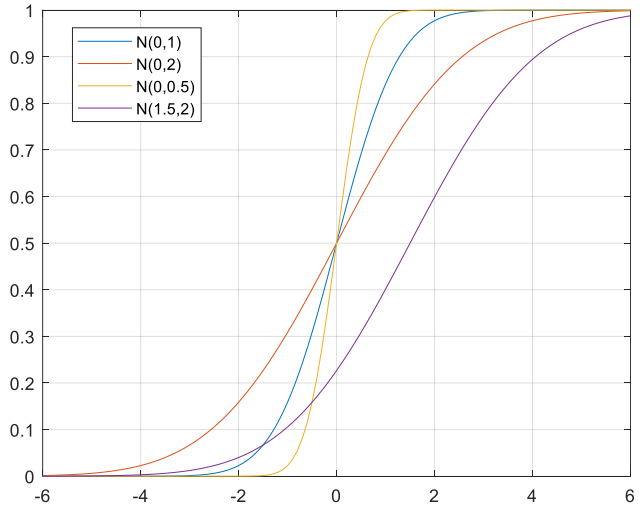
$$M(\xi)=m$$

$$D(\xi)=\sigma \qquad \sigma\neq 0$$



- „haranggörbe”
- Eloszlásfüggvény

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}dt$$



Standardizált normális eloszlás

$N(0,1)$

- Valószínűségi változó standardizálása

$$M(\xi) = m$$

$$D(\xi) = \sigma$$

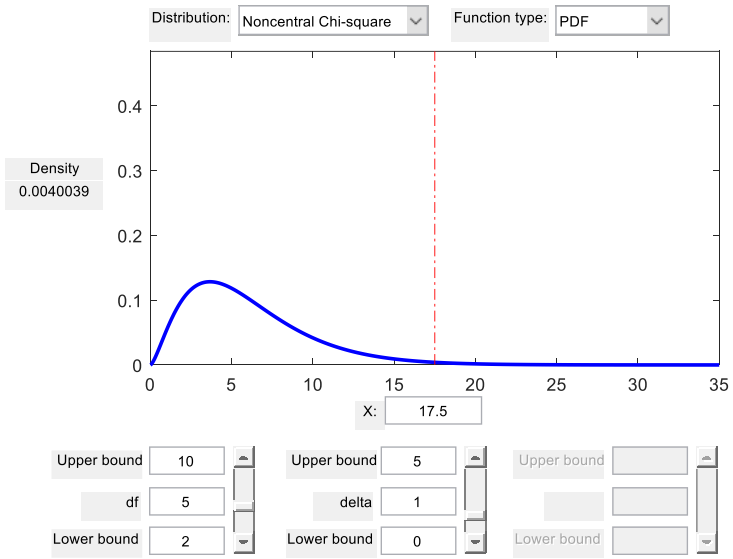
$$\xi' = \frac{\xi - M(\xi)}{D(\xi)}$$

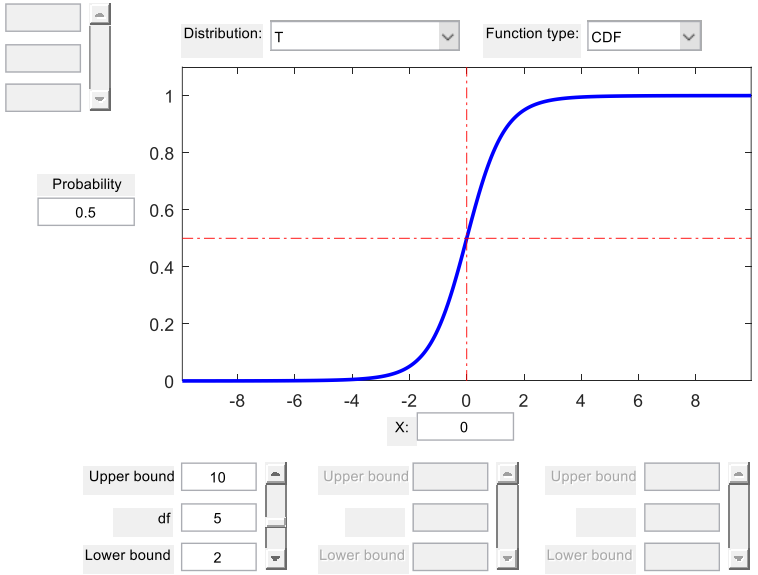
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

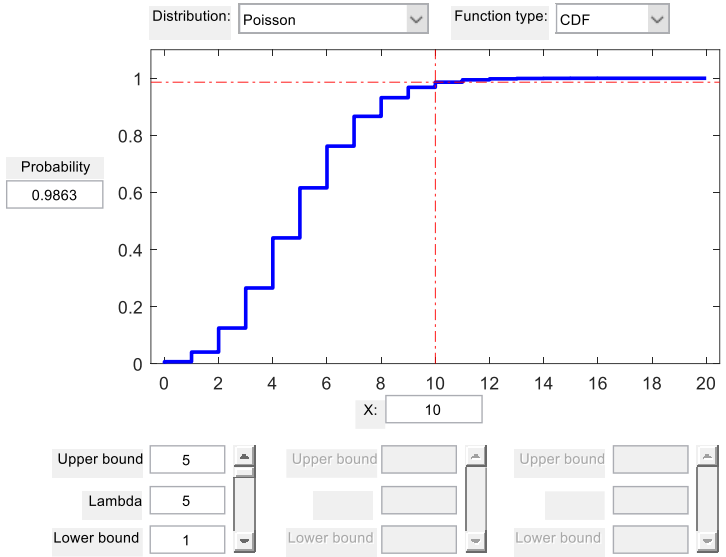
$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

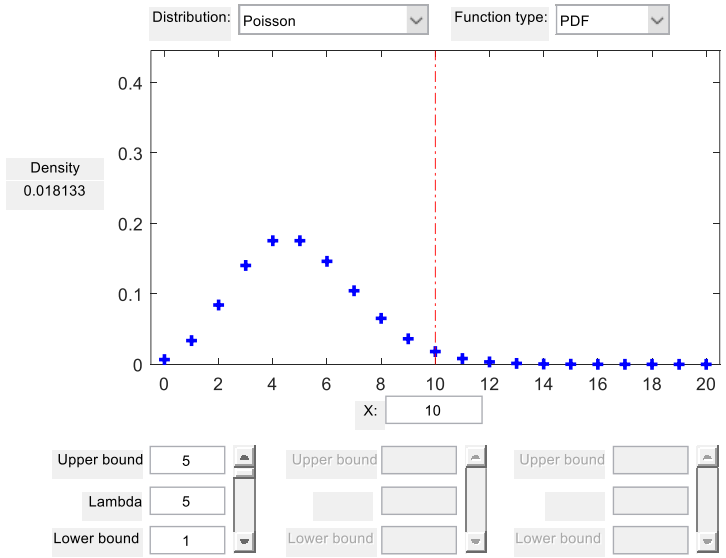
További eloszlások

- Matlab disttool eszköze









Több valószínűségi változó

- Valószínűségi vektorváltozó $\boldsymbol{\xi} = [\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n]$
- Várható érték-vektor

$$m_i = M(\xi_i) \qquad \mathbf{m} = M(\boldsymbol{\xi})$$

- Szórásnégyzet-vektor

$$\sigma_i^2 = D^2(\xi_i) = M\left([\xi_i - M(\xi_i)]^2\right)$$

- Általánosítás: kovariancia

$$c_{ij} = M\left([\xi_i - M(\xi_i)][\xi_j - M(\xi_j)]\right)$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

A kovarianciáról még

- Jellemzők:

$$c_{ij} = M\left(\left[\xi_i - M\left(\xi_i\right)\right]\left[\xi_j - M\left(\xi_j\right)\right]\right)$$

$$c_{ii} = \sigma_i^2 \qquad c_{ij} = c_{ji}$$

- Korreláció:

$$r_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \qquad -1 \le r_{ij} \le 1$$

$$r_{ii} = 1 \qquad r_{ij} = r_{ji}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

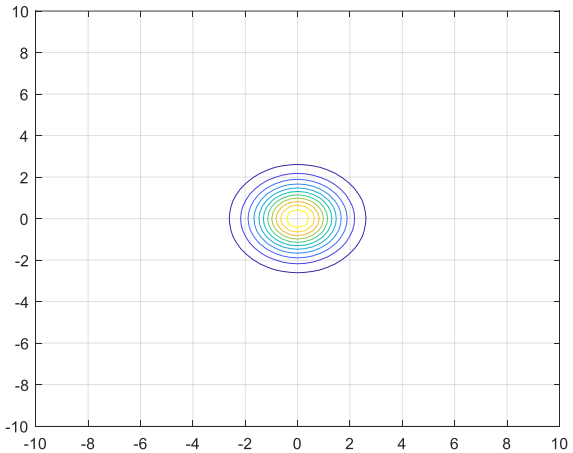
Variancia?

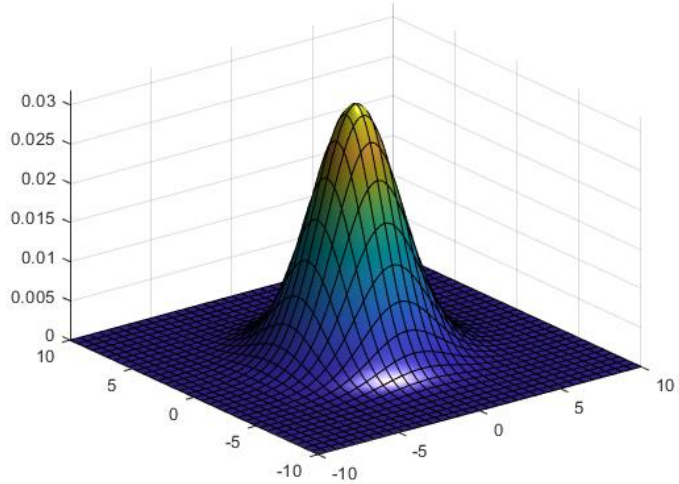
$$\underset{(n,n)}{\mathbf{R}} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}$$

A normális eloszlás általánosítása

- Valószínűségi sűrűségfüggvény

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$





- Kétdimenziós esetben

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left[\frac{(x_1-m_1)^2}{\sigma_1^2}-2r\frac{(x_1-m_1)(x_2-m_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(x_2-m_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}$$

- N-dimenziós esetben

$$f(\mathbf{x})=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\cdot|\mathbf{C}|}\exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\mathbf{m})^T\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{m})\right] \qquad |\mathbf{C}|\neq 0$$

Köszönöm a figyelmet!