Kiegyenlítő számítások: Hibaelmélet

Barsi Árpád

A hibaelmélet

- Definíciószerűleg: a mérési hibák definiálásával, valószínűségi jellemzőikkel és a jellemzők matematikai statisztikai módszerekkel történő becslésével foglalkozik

A hiba

- A mérési eredmény (*L*) és a hibátlan (elméleti) (Λ) érték között:

$$\varepsilon = L - \Lambda$$

- Eredete:
  - Személyi eredetű hiba
  - Műszerhiba
  - Külső körülményekből adódó hiba
- Jellege:
  - Durva hiba
  - Szabályos/szabálytalan hiba

A hibáról

- Ha *L* valószínűségi változó, akkor ε is az
- Igaz a következő:

$$\varepsilon = L - \Lambda = L - M(L) + M(L) - \Lambda$$

- Ebből

$$\varepsilon = \xi + \delta$$

Nem összetévesztendő a valószínűségi változóval, aminek szintén ξ a jele!

- Azaz a hiba szabálytalan (ξ) és szabályos (δ) összetevőkből áll. A szabályos összetevő minden méréskor **azonos**.

A mérési hibákat jellemző mérőszámok

- **Középhiba**

$$\mu^2 = M\left(\varepsilon^2\right) \qquad \mu = \sqrt{M\left(\varepsilon^2\right)}$$

- Némi behelyettesítés után belátható

$$\varepsilon = \xi + \delta \qquad \mu^2 = M\left(\varepsilon^2\right) = M\left((\xi+\delta)^2\right) = M\left(\xi^2\right) + M\left(\delta^2\right) + 2M(\xi)M(\delta)$$

- Ha $M(\delta) = 0$, akkor (új jelölés bevezetésével)

$$\boxed{\mu^2 = M\left(\xi^2\right) + M\left(\delta^2\right) = \mu_\xi^2 + \mu_\delta^2}$$

Gauss után **Gauss-féle középhiba** néven is hívják

- Ha csak szabálytalan hiba terheli a mérést, akkor

$$\mu^2 = \mu_\xi^2 \qquad \xi = L - M(L)$$

- Azaz <u>a középhiba a mérési eredmények szórása</u>.

A mérési hibákat jellemző mérőszámok

- **Relatív középhiba** *t* mennyiség jellemzésére

$$H = \frac{\mu_t}{t} \qquad\qquad H = 1:\left(t / \mu_t\right)$$

- **Súly**

$$p = \frac{c^2}{\mu^2}$$

- Ahol *c* arányossági tényező
- Ha *c* mérésekből becsléssel számított, a neve **súlyegység középhibája**

m_0

A mérési hibákat jellemző mérőszámok

- **Átlagos hiba**

$$\vartheta = M(|\varepsilon|) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|\varepsilon_i|$$

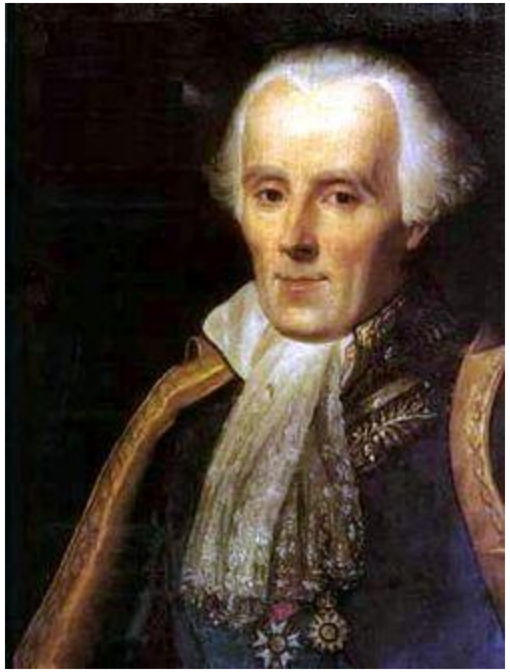
Laplace után **Laplace-féle középhiba** néven is hívják

- **Valószínű hiba**

$$P(|\varepsilon| < \rho) = \frac{1}{2}$$

- Azaz a valószínű hiba ε mediánja.

Pierre-Simon de Laplace



- (1749 – 1827)
- Eredményei:
  - 90 nagyobb mű: legfontosabbnak tartott az „Égi mechanika” $\rightarrow$ ”a francia Newton”
  - Differenciálszámítás, ~-operátor, ~-transzformáció, valószínűségszámítás, hőtan, csillagászat…
  - Utolsó mondata: "Amit tudunk, az vajmi kevés, amit nem tudunk, az roppant sok!"

A mérési hibákat jellemző mérőszámok

- **Kovariancia**

$$c_{ij} = c_{ji} = M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) \qquad \underset{(n,n)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Súlykoefficiens mátrix**

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}} = \frac{1}{c^2} \underset{(n,n)}{\mathbf{C}} \qquad \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

- **Súlymátrix**

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}}^{-1} \qquad \det(\mathbf{Q}) \neq 0$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

A varianciák-kovarianciák tulajdonságai

- Síkbeli pontra

$$\underset{(2,2)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_X^2 & c_{XY} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 \end{bmatrix}$$

$\underset{(n,n)}{\mathbf{M}}$ jelöléssel is

- **A** mátrix sajátértéke (λ) és sajátvektora (**x**)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot \mathbf{x}$$

- Számítása általában

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \qquad (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$$

- Itt:

$$\begin{vmatrix} \mu_X^2 - \lambda & c_{XY} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \lambda^2 - \lambda\left(\mu_X^2 + \mu_Y^2\right) + \mu_X^2 \cdot \mu_Y^2 - c_{XY}^2 = 0$$

A sajátértékek és sajátvektorok kiszámítása

- A sajátértékek

$$\lambda^2 - \lambda\left(\mu_X^2 + \mu_Y^2\right) + \mu_X^2 \cdot \mu_Y^2 - c_{XY}^2 = 0$$

$$\lambda_1 > \lambda_2 \qquad \mu_{\max}^2 = \lambda_1$$

$$\mu_{\min}^2 = \lambda_2$$

- A sajátvektorok

$$\begin{bmatrix} \mu_X^2 - \lambda_1 & c_{XY} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 - \lambda_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \mu_X^2 - \lambda_2 & c_{XY} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 - \lambda_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \end{bmatrix} = 0$$

Matlab:

$$[V, D] = eig(A)$$

$$[U, S, V] = svd(A)$$

$$V, U \approx \mathbf{x}$$

$$D, S \approx \lambda$$

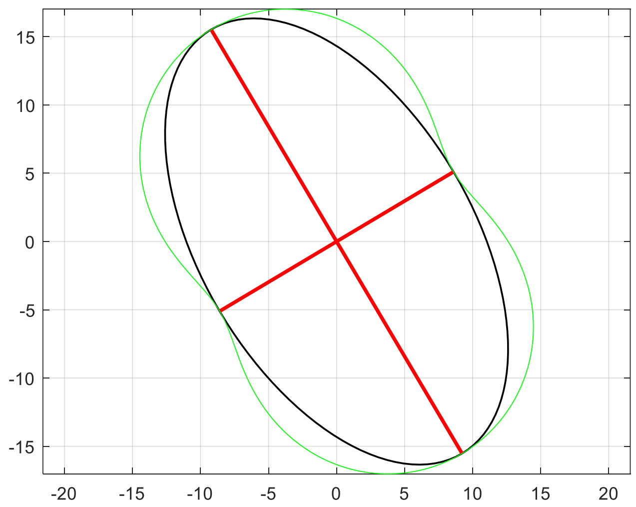
A hibaellipszis és talpponti görbéje

- Felírható

$$\frac{x^2}{\mu_{max}^2} + \frac{y^2}{\mu_{min}^2} = 1$$

- Tetszőleges φ szög esetén

$$\mu_\varphi = \sqrt{\mu_{max}^2 \cos^2 \varphi + \mu_{min}^2 \sin^2 \varphi}$$



A pontok jellemzése

- **Ponthiba**

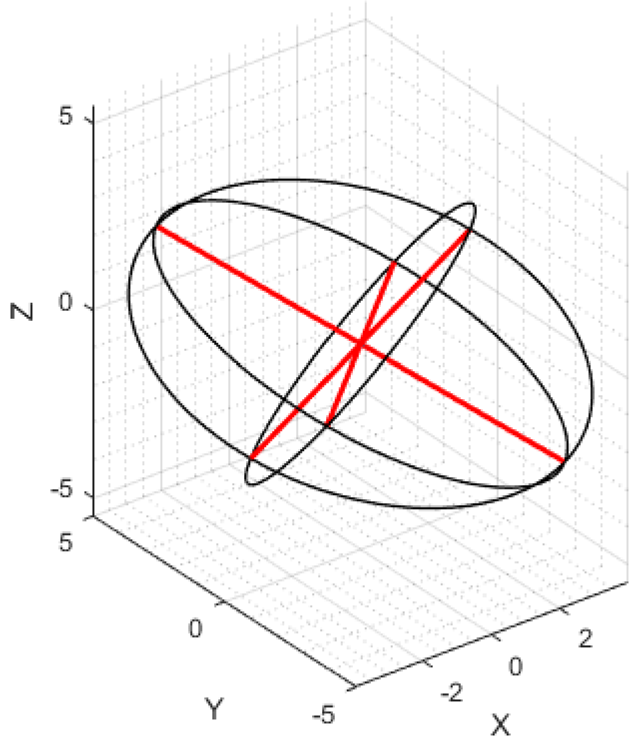
$$P = \sqrt{Sp(\mathbf{C})} = \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2} = \sqrt{\mu_{\max}^2 + \mu_{\min}^2}$$

- **Közepes ponthiba**

$$P \geq \mu_\varphi$$

$$K = \frac{P}{\sqrt{2}}$$

A hibaellipszoid

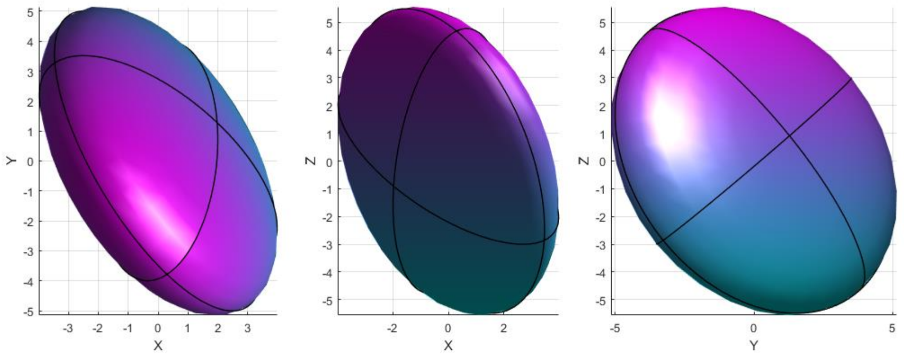


- Térbeli pontra

$$\underset{(3,3)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu_X^2 & c_{XY} & c_{XZ} \\ c_{XY} & \mu_Y^2 & c_{YZ} \\ c_{XZ} & c_{YZ} & \mu_Z^2 \end{bmatrix}$$

- Sajátértékek, sajátvektorok

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3 \qquad \begin{bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \\ s_{13} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{21} \\ s_{22} \\ s_{23} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_{31} \\ s_{32} \\ s_{33} \end{bmatrix} \qquad \frac{x^2}{\lambda_1^2} + \frac{y^2}{\lambda_2^2} + \frac{z^2}{\lambda_3^2} = 1$$



- Ponthiba

$$P = \sqrt{Sp(\mathbf{C})} = \sqrt{\mu_X^2 + \mu_Y^2 + \mu_Z^2} = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2}$$

Köszönöm a figyelmet!