

# Kiegyenlítő számítások: Hibaterjedés

Barsi Árpád



# A terjedés fogalma

- Angol név: *error propagation*
- Tény: valószínűségi változók függvényei is valószínűségi változók
- A terjedés ennek a ténynek a vizsgálatát jelenti.
- Esetei a valószínűségi változó függvényére:
  - Eloszlás vizsgálata
  - Várható érték vizsgálata
  - Szórás, variancia, kovariancia vizsgálata
- Hibaterjedés: a hibákkal kapcsolatos terjedési törvények

# Valószínűségi változó függvényének eloszlása

- (nagyon nehéz!)
- Levezetés nélkül, ha  $\xi_1$  változó (mindig differenciálható) függvénye

$$\xi_2 = \Psi(\xi_1)$$

- Továbbá  $\xi_1$  és  $\xi_2$  sűrűségfüggvényei

$$f(x) \quad g(y)$$

- Akkor a keresett sűrűségfüggvény

$$y = \Psi(x)$$

$$x = \Psi^{-1}(y) = h(y)$$

$$g(y) = f[h(y)] \left| \frac{dh(y)}{dy} \right|$$

# A valódi hibák terjedése

- Hibátlan (elméleti) értékek  $A_1, A_2, \dots, A_n$
- mérési eredményei  $L_1, L_2, \dots, L_n$
- Az elméleti függvény  $Y = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$
- Amihez tartozó mérési eredmények függvénye  $y = f(L_1, L_2, \dots, L_n)$
- A valódi hibák pedig  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$
- A függvény hibája  $\varepsilon = L - A$  alapján:

$$\varepsilon_Y = y - Y$$

# A Taylor-sor (emlékeztető)

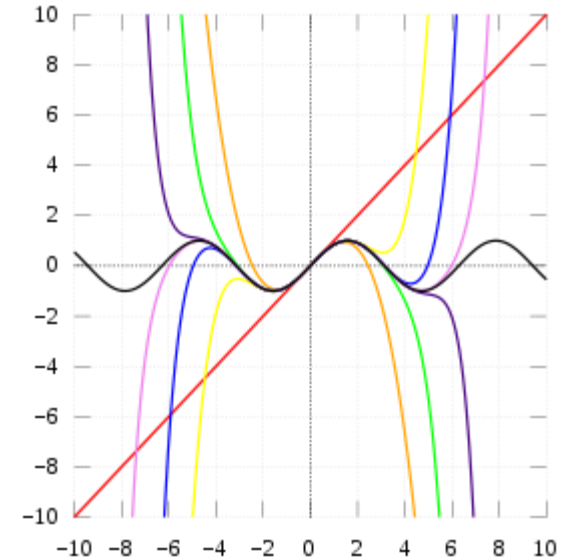
- $f(x)$  függvény hatványsora az  $a$  helyen:  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!} (x-a)^3 + \dots = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} (x-a) + R$$

- ahol

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

- (ha  $a = 0$ , akkor nem Taylor, hanem Maclaurin-sor a neve)



# A valódi hibák terjedése

- $\varepsilon_i = L_i - A_i$  összefüggés átrendezésével:  $A_i = L_i - \varepsilon_i$

- Felírható az elméleti függvény:

$$Y = f(A_1, A_2, \dots, A_n) = f(L_1 - \varepsilon_1, L_2 - \varepsilon_2, \dots, L_n - \varepsilon_n)$$

- Ennek Taylor-sorba fejtett alakja

$$Y = f(L_1, L_2, \dots, L_n) - \left(\frac{\partial f}{\partial A_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial A_2}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 - \dots - \left(\frac{\partial f}{\partial A_n}\right)_0 \cdot \varepsilon_n + R$$

- Ebből a függvény hibája:  $\varepsilon_Y = y - Y$

$$\varepsilon_Y \approx f(L_1, L_2, \dots, L_n) - f(L_1, L_2, \dots, L_n) + \left(\frac{\partial f}{\partial A_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial A_2}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial A_n}\right)_0 \cdot \varepsilon_n$$

# A valódi hibák terjedése

- Egyszerűsítve tehát

$$\varepsilon_Y = \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_0 \cdot \varepsilon_1 + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_2} \right)_0 \cdot \varepsilon_2 + \dots + \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_n} \right)_0 \cdot \varepsilon_n$$

- Vektoros jelöléssel

$$\mathbf{f}_{(n,1)} = \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_0, \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_2} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial f}{\partial \mathcal{A}_n} \right)_0 \right]^T \quad \boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)} = [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n]^T$$

$$\varepsilon_Y = \mathbf{f}_{(1,n)}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_{(n,1)}$$

# Egyetlen függvény varianciája

- A középhiba definíciója szerint

$$\mu_Y^2 = M(\varepsilon_Y^2)$$

- Ebből

$$\mu_Y^2 = M(\varepsilon_Y^2) = M(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{f}) = \mathbf{f}^T \cdot M(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \cdot \mathbf{f}$$

- Ebben pedig már láttuk  $c_{ij} = c_{ji} = M(\varepsilon_i \varepsilon_j)$

- vagyis

$$\mu_Y^2 = \mathbf{f}^T \cdot M(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

$$\mu_Y^2 = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

$(1,n)$     $(n,n)$     $(n,1)$

$$\mathbf{C}_{(n,n)} = M(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) = M \left( \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix} \right)$$
$$\mathbf{C}_{(n,n)} = \begin{bmatrix} M(\varepsilon_1 \varepsilon_1) & M(\varepsilon_1 \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_1 \varepsilon_n) \\ M(\varepsilon_2 \varepsilon_1) & M(\varepsilon_2 \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_2 \varepsilon_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M(\varepsilon_n \varepsilon_1) & M(\varepsilon_n \varepsilon_2) & \cdots & M(\varepsilon_n \varepsilon_n) \end{bmatrix}$$



# Két függvény kovarianciája

- Az elméleti függvények  $Y_1 = f(A_1, A_2, \dots, A_n)$   
 $Y_2 = g(A_1, A_2, \dots, A_n)$

- A valódi hibák

$$\varepsilon_{Y_1} = \mathbf{f}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\varepsilon_{Y_2} = \mathbf{g}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

- A kovariancia pedig  $c_{Y_1 Y_2} = M(\varepsilon_{Y_1} \varepsilon_{Y_2})$   
 $c_{Y_1 Y_2} = M(\varepsilon_{Y_1} \varepsilon_{Y_2}) = M(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{g}) = \mathbf{f}^T \cdot M(\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{g}$

$$c_{Y_1 Y_2} = \begin{matrix} \mathbf{f}^T & \cdot & \mathbf{C} & \cdot & \mathbf{g} \\ (1,n) & & (n,n) & & (n,1) \end{matrix}$$

# Több függvény kovarianciamátrixához

- Az elméleti függvények
$$Y_1 = f_1(A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$Y_2 = f_2(A_1, A_2, \dots, A_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_s = f_s(A_1, A_2, \dots, A_n)$$

- A parciális deriváltak pedig

$$\mathbf{f}_{(n,1)}^1 = \left[ \left( \frac{\partial f_1}{\partial A_1} \right)_0, \left( \frac{\partial f_1}{\partial A_2} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial f_1}{\partial A_n} \right)_0 \right]^T$$

$$\mathbf{f}_{(n,1)}^2 = \left[ \left( \frac{\partial f_2}{\partial A_1} \right)_0, \left( \frac{\partial f_2}{\partial A_2} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial f_2}{\partial A_n} \right)_0 \right]^T$$

$\vdots$

$$\mathbf{f}_{(n,1)}^s = \left[ \left( \frac{\partial f_s}{\partial A_1} \right)_0, \left( \frac{\partial f_s}{\partial A_2} \right)_0, \dots, \left( \frac{\partial f_s}{\partial A_n} \right)_0 \right]^T$$

# A parciális deriváltakról még egyszer

- Jakobi-mátrix

$$\mathbf{F}_{YL}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_s^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{A}_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_1}{\partial \mathcal{A}_n} \right)_0 \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{A}_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_2}{\partial \mathcal{A}_n} \right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left( \frac{\partial f_s}{\partial \mathcal{A}_1} \right)_0 & \left( \frac{\partial f_s}{\partial \mathcal{A}_2} \right)_0 & \dots & \left( \frac{\partial f_s}{\partial \mathcal{A}_n} \right)_0 \end{bmatrix}$$

# Több függvény kovarianciamátrixa

- Az elméleti függvényekkel
- A parciális deriváltak mátrixával
- A mérések kovarianciamátrixával

$$\mathbf{F}_{YL}^T$$

$(s,n)$

$$\mathbf{C}_{LL}$$

$(n,n)$

$$\mathbf{C}_{YY} = \mathbf{F}_{YL}^T \cdot \mathbf{C}_{LL} \cdot \mathbf{F}_{YL}$$

$(s,s)$      $(s,n)$      $(n,n)$      $(n,s)$

$$\mathbf{Q}_{YY} = \mathbf{F}_{YL}^T \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{F}_{YL}$$

$(s,s)$      $(s,n)$      $(n,n)$      $(n,s)$

# No és a történelmi személyiség...

- Andrej Andrejevics Markov (1856–1922)
- Számelmélet, analízis, valószínűségszámítás
  - Centrális határeloszlás tételének bizonyítása
  - Markov-lánc, Markov-modell (és változatai)
  - Gauss-Markov elmélet: a legkisebb négyzetek módszere
  - Híresebb tanítványa az ukrán Georgij Voronoi (1868-1908)



Köszönöm a figyelmet!

A decorative graphic element consisting of a solid green horizontal bar that transitions into a white background. On the right side, there are several thin, parallel white lines of varying lengths, creating a layered, modern look.