Kiegyenlítő számítások: Hibaterjedés

Barsi Árpád

A terjedés fogalma

- Angol név: *error propagation*
- Tény: valószínűségi változók függvényei is valószínűségi változók
- A terjedés ennek a ténynek a vizsgálatát jelenti.
- Esetei a valószínűségi változó függvényére:
  - Eloszlás vizsgálata
  - Várható érték vizsgálata
  - Szórás, variancia, kovariancia vizsgálata
- Hibaterjedés: a hibákkal kapcsolatos terjedési törvények

Valószínűségi változó függvényének eloszlása

- (nagyon nehéz!)
- Levezetés nélkül, ha ξ_1 változó (mindig differenciálható) függvénye

$$\xi_2 = \Psi(\xi_1)$$

- Továbbá ξ_1 és ξ_2 sűrűségfüggvényei

$$f(x) \quad g(y)$$

- Akkor a keresett sűrűségfüggvény

$$y = \Psi(x) \qquad x = \Psi^{-1}(y) = h(y) \qquad g(y) = f[h(y)]\left|\frac{dh(y)}{dy}\right|$$

A valódi hibák terjedése

- Hibátlan (elméleti) értékek $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$
- mérési eredményei $L_1, L_2, \ldots, L_n$

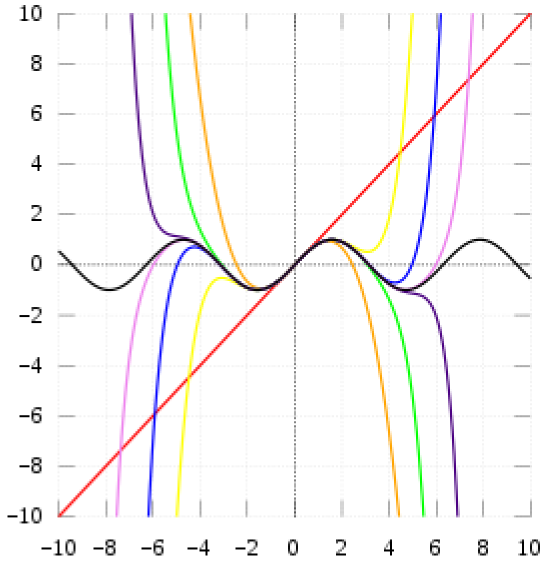
- Az elméleti függvény $Y = f\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n\right)$
- Amihez tartozó mérési eredmények függvénye

$$y = f\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right)$$

- A valódi hibák pedig $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$
- A függvény hibája $\varepsilon = L - \Lambda$ alapján:

$$\varepsilon_Y = y - Y$$

A Taylor-sor (emlékeztető)



- *f(x)* függvény hatványsora az *a* helyen: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + R$$

- ahol

$$f^{(n)} = \frac{d^n f}{dx^n}$$

- (ha *a = 0*, akkor nem Taylor, hanem Maclaurin-sor a neve)

A valódi hibák terjedése

- $\varepsilon_i = L_i - \Lambda_i$ összefüggés átrendezésével: $\Lambda_i = L_i - \varepsilon_i$
- Felírható az elméleti függvény:

$$Y = f\left(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n\right) = f\left(L_1 - \varepsilon_1, L_2 - \varepsilon_2, \ldots, L_n - \varepsilon_n\right)$$

- Ennek Taylor-sorba fejtett alakja

$$Y = f\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right) - \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_2}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 - \ldots - \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \cdot \varepsilon_n + R$$

- Ebből a függvény hibája: $\varepsilon_Y = y - Y$

$$\varepsilon_Y \approx f\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right) - f\left(L_1, L_2, \ldots, L_n\right) + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_2}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \cdot \varepsilon_n$$

A valódi hibák terjedése

- Egyszerűsítve tehát

$$\varepsilon_Y = \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_1}\right)_0 \cdot \varepsilon_1 + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_2}\right)_0 \cdot \varepsilon_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \cdot \varepsilon_n$$

- Vektoros jelöléssel

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{f}} = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f}{\partial \Lambda_n}\right)_0\right]^T \qquad \underset{(n,1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left[\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n\right]^T$$

$$\varepsilon_Y = \underset{(1,n)}{\mathbf{f}^T} \cdot \underset{(n,1)}{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

Egyetlen függvény varianciája

- A középhiba definíciója szerint

$$\mu_Y^2 = M\left(\varepsilon_Y^2\right)$$

- Ebből

$$\mu_Y^2 = M\left(\varepsilon_Y^2\right) = M\left(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{f}\right) = \mathbf{f}^T \cdot M\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\right) \cdot \mathbf{f}$$

- Ebben pedig már láttuk $c_{ij} = c_{ji} = M\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right)$
- vagyis

$$\mu_Y^2 = \mathbf{f}^T \cdot M\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\right) \cdot \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{f}$$

$$\boxed{\mu_Y^2 = \underset{(1,n)}{\mathbf{f}^T} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{C}} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{f}}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}} = M\left(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^T\right) = M\left(\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_n \end{bmatrix}\right)$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} M\left(\varepsilon_1\varepsilon_1\right) & M\left(\varepsilon_1\varepsilon_2\right) & \cdots & M\left(\varepsilon_1\varepsilon_n\right) \\ M\left(\varepsilon_2\varepsilon_1\right) & M\left(\varepsilon_2\varepsilon_2\right) & \cdots & M\left(\varepsilon_2\varepsilon_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ M\left(\varepsilon_n\varepsilon_1\right) & M\left(\varepsilon_n\varepsilon_2\right) & \cdots & M\left(\varepsilon_n\varepsilon_n\right) \end{bmatrix}$$

Két függvény kovarianciája

- Az elméleti függvények

$$Y_1 = f(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n)$$
$$Y_2 = g(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n)$$

- A valódi hibák

$$\varepsilon_{Y_1} = \mathbf{f}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\varepsilon_{Y_2} = \mathbf{g}^T \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$

- A kovariancia pedig

$$c_{Y_1Y_2} = M(\varepsilon_{Y_1}\varepsilon_{Y_2})$$
$$c_{Y_1Y_2} = M(\varepsilon_{Y_1}\varepsilon_{Y_2}) = M(\mathbf{f}^T \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}} \mathbf{g}) = \mathbf{f}^T \cdot M(\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{g} = \mathbf{f}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{g}$$

$$\boxed{c_{Y_1Y_2} = \underset{(1,n)}{\mathbf{f}^T} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{C}} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{g}}}$$

Több függvény kovarianciamátrixához

- Az elméleti függvények

$$Y_1 = f_1(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n)$$
$$Y_2 = f_2(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n)$$
$$\vdots$$
$$Y_s = f_s(\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n)$$

- A parciális deriváltak pedig

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{f}_1} = \left[\left(\frac{\partial f_1}{\partial \Lambda_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f_1}{\partial \Lambda_2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f_1}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \right]^T$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{f}_2} = \left[\left(\frac{\partial f_2}{\partial \Lambda_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f_2}{\partial \Lambda_2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f_2}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \right]^T$$

$$\vdots$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{f}_s} = \left[\left(\frac{\partial f_s}{\partial \Lambda_1}\right)_0, \left(\frac{\partial f_s}{\partial \Lambda_2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial f_s}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \right]^T$$

A parciális deriváltakról még egyszer

- Jakobi-mátrix

$$\mathbf{F}_{\substack{YL\\(s,n)}}^{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1^T \\ \mathbf{f}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_s^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \Lambda_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \Lambda_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \\ \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \Lambda_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \Lambda_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(\dfrac{\partial f_s}{\partial \Lambda_1}\right)_0 & \left(\dfrac{\partial f_s}{\partial \Lambda_2}\right)_0 & \cdots & \left(\dfrac{\partial f_s}{\partial \Lambda_n}\right)_0 \end{bmatrix}$$

Több függvény kovarianciamátrixa

- Az elméleti függvényekkel
- A parciális deriváltak mátrixával $\underset{(s,n)}{\mathbf{F}_{YL}^{T}}$

- A mérések kovarianciamátrixával $\underset{(n,n)}{\mathbf{C}_{LL}}$

$$\boxed{\underset{(s,s)}{\mathbf{C}_{YY}} = \underset{(s,n)}{\mathbf{F}_{YL}^{T}} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{C}_{LL}} \cdot \underset{(n,s)}{\mathbf{F}_{YL}}}$$

$$\underset{(s,s)}{\mathbf{Q}_{YY}} = \underset{(s,n)}{\mathbf{F}_{YL}^{T}} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} \cdot \underset{(n,s)}{\mathbf{F}_{YL}}$$

No és a történelmi személyiség…

- Andrej Andrejevics Markov (1856–1922)

- Számelmélet, analízis, valószínűségszámítás
  - Centrális határeloszlás tételének bizonyítása
  - Markov-lánc, Markov-modell (és változatai)
  - Gauss-Markov elmélet: a legkisebb négyzetek módszere
  - Híresebb tanítványa az ukrán Georgij Voronoi (1868-1908)

Köszönöm a figyelmet!