Kiegyenlítő számítások: Legkisebb négyzetek módszere I.

Barsi Árpád

Történeti háttér

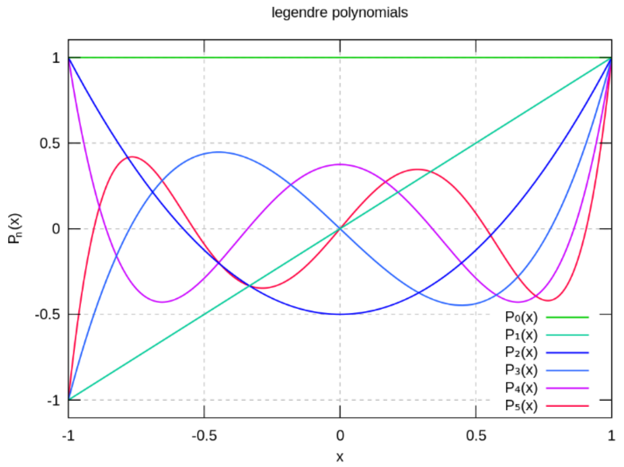
- 1806: Legendre – kisbolygók pályameghatározása
- 1809: Gauss – valószínűségelméleti megalapozás
- 1812: Laplace – valószínűségelméleti alapozás
- 1898: Markov – módszertani fejlesztés

- Említhető még: Csebisev, Bessel

- Angolul: *least squares method (LSM) / least squares adjustment*

Adrien-Marie Legendre

- (1752 – 1833)
- Geometria
- Integrálszámítás: elliptikus függvény, béta- és gamma függvény
- **~-polinomok, asszociált ~-polinomok**
- Számelmélet: kvadratikus reciprocitás tétele
- ~-transzformáció: mechanika, termodinamika
- *Nouvelles Méthodes pour la Détermination des Orbites des Comètes*, 1805 → függelékben a legkisebb négyzetek módszere

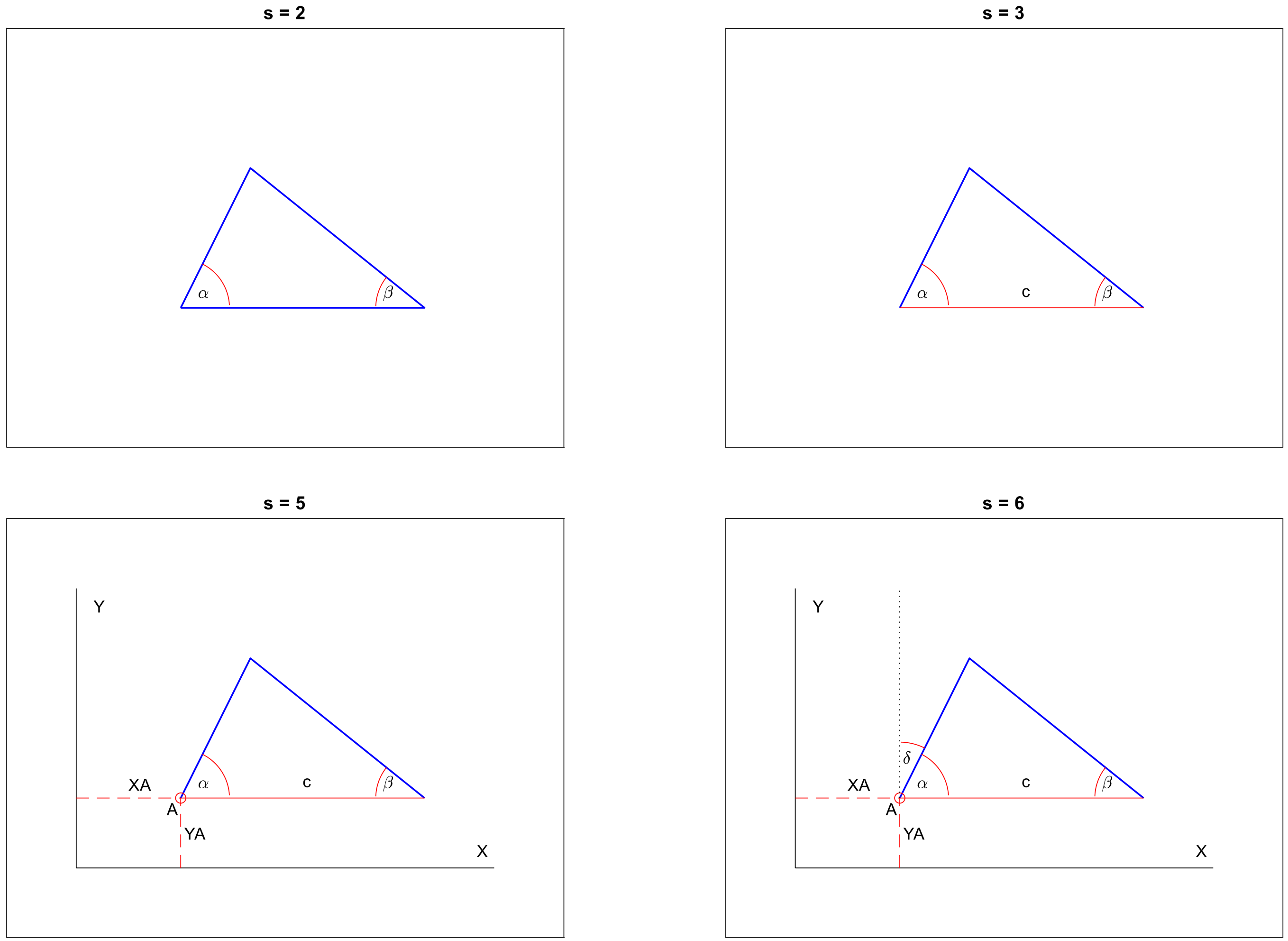


A fölösmérés

Szabadságfokok száma
Mérések száma

Meghatározás:
- Alak
- Alak és méret
- Alak, méret és elhelyezés
- Alak, méret, elhelyezés és tájolás

$$f = n - s > 0$$



A használat előfeltételei

- Legyenek fölös mérések
- Legyen ismert a súlyozás (súlymátrix, súlykoefficiens mátrix…)
- Ne legyen durva hibával terhelt mérés
- A funkcionális modell függvénye legyen lineáris (vagy linearizálható)

Az alapelvek

- $M(\xi_i) = M(L_i)$ becslésére vezessük be: U_i **kiegyenlített érték**
- Ennek felhasználásával a **javítás**: $v_i = U_i - L_i$
- A cél: $\sum p_i v_i^2 = \min$ vagy $\sum v_i^2 = \min$
- Gauss jelölésével: $[pvv] = \min$

- Általános megfogalmazásban: $\boxed{\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v} = \min}$
- Ehhez még a **súlyegység középhibája**

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{c^2}\mathbf{C} \qquad \mathbf{P} = \mathbf{Q}^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad \bar{c}^2 = m_0^2 = f^{-1}\mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v}$$

Elnevezések

- Paraméterek: nem mért mennyiségek (sokszor a cél azok meghatározása)
    - Előzetes értékeik és változásaik
- Feltételi egyenletek: a funkcionális modell (fizikai) törvényszerűségei
- Fajtái:
    - Közvetítő egyenletek: mért mennyiségek és paraméterek
    - Tiszta feltételi egyenletek: csak mért mennyiségek
    - Kényszerfeltételi egyenletek: csak paraméterek

Alkalmazási esetek

- II. kiegyenlítési csoport: kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel
- III. kiegyenlítési csoport: kiegyenlítés csak mért mennyiségeket tartalmazó feltételi egyenletekkel
- IV. kiegyenlítési csoport: kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel és kényszerfeltételekkel
- V. kiegyenlítési csoport: kiegyenlítés mért mennyiségeket és paramétereket tartalmazó feltételi egyenletekkel
- VI. kiegyenlítési csoport: kiegyenlítés mért mennyiségeket és paramétereket tartalmazó feltételi egyenletekkel és kényszerfeltételi egyenletekkel

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- Adottak a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változó $L_1, L_2, \ldots, L_n$ megfigyelései
- Ezeknek a megfigyeléseknek a kiegyenlített értékei $U_1, U_2, \ldots, U_n$
- A hozzájuk tartozó javítások $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\quad U_i = L_i + v_i$
- A $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ paraméterek előzetes értékei és **változás**aik $X_j = X_{0j} + x_j$

- Ugyanezek vektorosan

$$\underset{(n,1)}{\boldsymbol{\xi}} \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

$$\underset{(r,1)}{\boldsymbol{\eta}} \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- A lineáris függvénykapcsolat $M(\xi_i) = f_i(\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r)$

$$
\begin{aligned}
M(\xi_1) &= M(L_1) = a_{11}\cdot\eta_1 + a_{12}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{1r}\cdot\eta_r \\
M(\xi_2) &= M(L_2) = a_{21}\cdot\eta_1 + a_{22}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{2r}\cdot\eta_r \\
&\vdots \\
M(\xi_n) &= M(L_n) = a_{n1}\cdot\eta_1 + a_{n2}\cdot\eta_2 + \ldots + a_{nr}\cdot\eta_r
\end{aligned}
$$

- azaz

$$
\underset{(n,1)}{M(\boldsymbol{\xi})} = \underset{(n,1)}{M(\mathbf{L})} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\boldsymbol{\eta}}
\qquad
\underset{(n,r)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nr} \end{bmatrix}
$$

A – alakmátrix

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- A kiegyenlített mennyiségekre ugyanaz a lineáris függvénykapcsolat

$$
\begin{aligned}
&U_1 = a_{11} \cdot X_1 + a_{12} \cdot X_2 + \ldots + a_{1r} \cdot X_r \\
&U_2 = a_{21} \cdot X_1 + a_{22} \cdot X_2 + \ldots + a_{2r} \cdot X_r \\
&\vdots \\
&U_n = a_{n1} \cdot X_1 + a_{n2} \cdot X_2 + \ldots + a_{nr} \cdot X_r
\end{aligned}
$$

- azaz

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{X}}$$

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- Rakjuk össze az eddigieket!

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \left(\underset{(r,1)}{\mathbf{X}_0} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \right) = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{X}_0} + \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{a}_0} + \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

- Továbbá

$$U_i = f_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) = f_i\left(X_{10} + x_1, X_{20} + x_2, \ldots, X_{r0} + x_r\right) =$$

$$= f_i\left(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{r0}\right) + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_2}\right)_0 \cdot x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial f_i}{\partial X_r}\right)_0 \cdot x_r + R$$

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- Akkor rendezzük a sorainkat!

$$L_i + v_i = a_{i0} + a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ir}x_r$$

- Ugyanez vektorosan

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{a}_0} + \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

- Ebből pedig a javítás-vektor

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{a}_0} + \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{a}_0} - \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

A – alakmátrix
l – tisztatag-vektor

- Ez a **javítási egyenlet**

$$\boxed{\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}}$$

A javítások meghatározása

- Azt definiáltuk, hogy

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \min$$

- A kvadratikus kifejezés szélsőértéke az első differenciál zérushelyén van:

$$d\left(\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}}\right) = 0$$

- A bal oldal ekkor

$$d\left(\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}}\right) = 2\,\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{d\mathbf{v}} = 2\,\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\,\underset{(r,1)}{d\mathbf{x}} \Rightarrow \underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}} = \underset{(1,r)}{\mathbf{0}} \Rightarrow \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{0}}$$

A változások meghatározása

- Ha tehát felhasználva $\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$

$$\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \left(\underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \right) = \underset{(r,1)}{\mathbf{0}}$$

- Rendezve pedig

$$\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \qquad \underset{(r,r)}{\mathbf{N}} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}$$

Normálegyenlet

- Ebből következik

$$\boxed{\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \right)^{-1} \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \right)} \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}} \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}$$

A paraméterek meghatározása

- Így már felírhatjuk

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \quad \Leftarrow \quad \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \Big(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \Big)^{-1} \Big(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \Big)$$

- továbbá

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} \quad \Leftarrow \quad \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

$$m_0^2 = f^{-1} \mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v}$$

Ha a közvetítő egyenletek nem lineárisak…

- A közvetítőegyenleteket sorba kell fejteni
- A paraméterek meghatározása után, iteráció
  - Előzetes érték lesz a kiszámított paraméter
  - A megállási kritérium:
    - Lépésszámtól függően
    - Változások nagyságától függően
- Kezdőértékek!

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel – „Recept”

1. Előzetes paraméterértékek
2. Lineáris vagy linearizált közvetítő egyenletek felírása
3. Javítási egyenletek felírása
4. Súlymátrix felvétele
5. Normálegyenlet felírása
6. A normálegyenlet megoldása
7. Paraméterek, javítások, kiegyenlített mérési eredmények számítása
8. Iteráció?
9. Pontossági mérőszámok levezetése

Köszönöm a figyelmet!