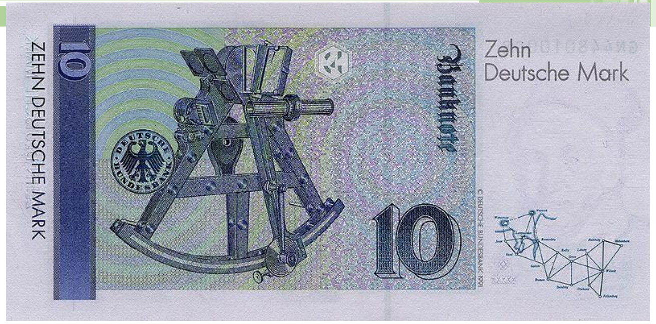
Kiegyenlítő számítások: Legkisebb négyzetek módszere II.

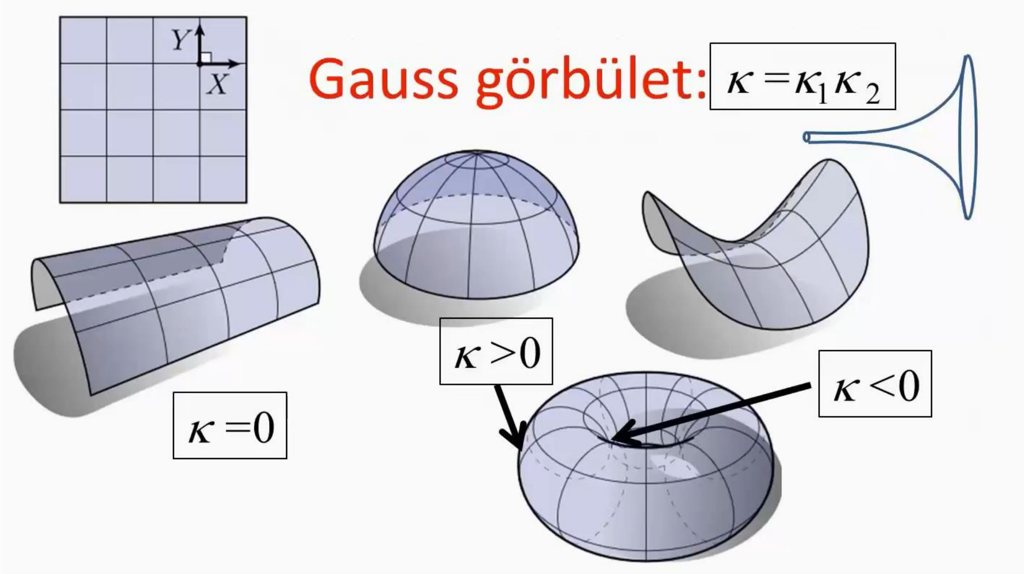
Barsi Árpád

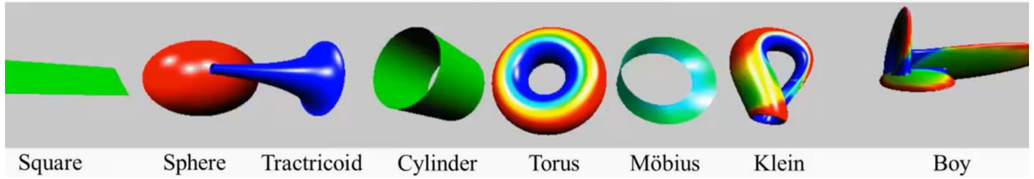
A történelmi tablón: Johann Carl Friedrich Gauss

C. F. Gauß



- (1777 – 1855)
- Matematikus, csillagász, geodéta, fizikus…
- Nem-euklideszi geometria kezdete (1813)
- Legkisebb négyzetek módszere
- Differenciálgeometria (görbület…)
- Elliptikus integrál, hipergeom. függvények
- Lineáris algebra (Gauss-elimináció…)
- Hibaintegrál, hibaterjedés
- Poligon területszámítása (trapézformula)
- Húsvét és pészah ünnepének kiszámítása
- …





A múlt óráról…

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel – „Recept”

1. Előzetes paraméterértékek
2. Lineáris vagy linearizált közvetítő egyenletek felírása
3. Javítási egyenletek felírása
4. Súlymátrix felvétele
5. Normálegyenlet felírása
6. A normálegyenlet megoldása
7. Paraméterek, javítások, kiegyenlített mérési eredmények számítása
8. Iteráció?
9. Pontossági mérőszámok levezetése

Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- A képletek sorra

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \right)^{-1} \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{l}} \right)$$

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X}_0} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

$$m_0^2 = f^{-1} \mathbf{v}^T \mathbf{P}_{LL} \mathbf{v}$$

A pontossági mérőszámok

- Általában mondhatjuk

$$\mathbf{C}_{YY} = c^2 \mathbf{Q}_{YY}$$

- ahol

$$YY = \{X, U, L, v\}$$

- Továbbá a hibaterjedés szerint beláttuk

$$\mathbf{Q}_{YY} = \mathbf{F}_{YL}^T \cdot \mathbf{Q}_{LL} \cdot \mathbf{F}_{YL} \qquad \mathbf{Q}_{LL} = \mathbf{P}_{LL}^{-1}$$

- itt is

$$YY = \{X, U, L, v\}$$

Ez volt a formula?!

A pontossági mérőszámok

- Levezetés nélkül ☺

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \right)^{-1}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \right)^{-1} \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}} \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{vv}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}}$$

A teljes kép – kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel

- A legfontosabb összefüggések általában

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\right)^{-1}\left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,1)}{\mathbf{l}}\right)$$

$$\underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X}_0} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(n,1)}{\mathbf{l}}$$

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}}$$

$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}} = \left(\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}\,\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\,\underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\right)^{-1}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{vv}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}}\,\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}}\,\underset{(r,n)}{\mathbf{A}^T}$$

!

Levezethető mennyiségek

$$m_0^2 = f^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{v}$$

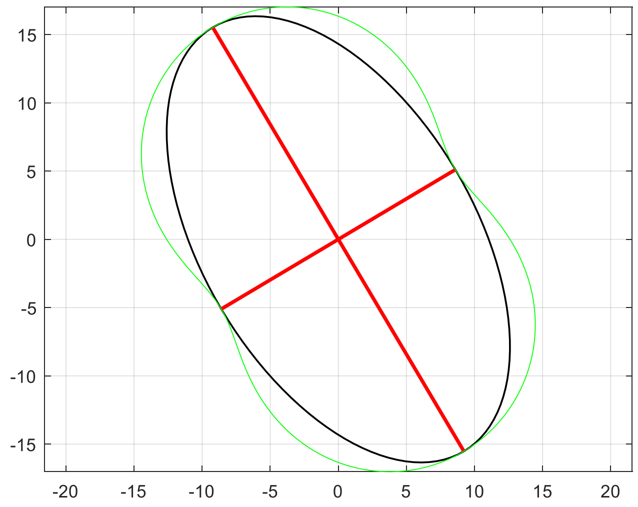
- Varianciák

$$m_{Yi}^2 = m_0^2 q_{YiYi} \qquad Y = \{X, U, L, v\}$$

- Középhibák

$$m_{Yi} = m_0\sqrt{q_{YiYi}}$$

- Ponthiba
- Hibaellipszis
- …



A durva hibákról

- A kimutatás és kezelés módszerei
  - Matematikai statisztikai elemzéssel
    - A mért mennyiségek <u>együttes</u> vizsgálatával (pl. hipotézisvizsgálat)

$$H_0: c^2 = \mu_0^2 \qquad H_a: c^2 > \mu_0^2 \qquad f\frac{m_0^2}{\mu_0^2} < \chi^2_{1-p,f} \qquad f = n - r$$

    - A mért mennyiségek <u>egyenkénti</u> vizsgálatával (pl. Baarda-féle Data snooping)

$$m_{vi} = m_0\sqrt{q_{vivi}} \qquad w_i = \frac{v_i}{m_{vi}} \qquad H_0: w_i = 0 \qquad H_a: w_i \neq 0 \qquad |w_i| < t_{p,f} \qquad f = n - r$$

  - Robusztus kiegyenlítéssel

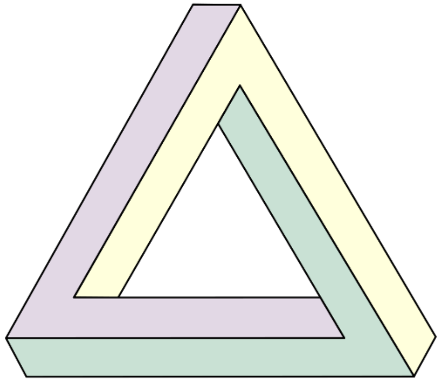
Ha $\mathbf{N}^{-1}$ nem értelmezett…

- A normálegyenlet megoldása: $\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}} \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}$
- Akkor **N** szinguláris
- Oka: defektus (szabadságfokok és mérések közötti „egyensúlytalanság”)
- Kimutatása: $\det \mathbf{N} = |\mathbf{N}| = 0$

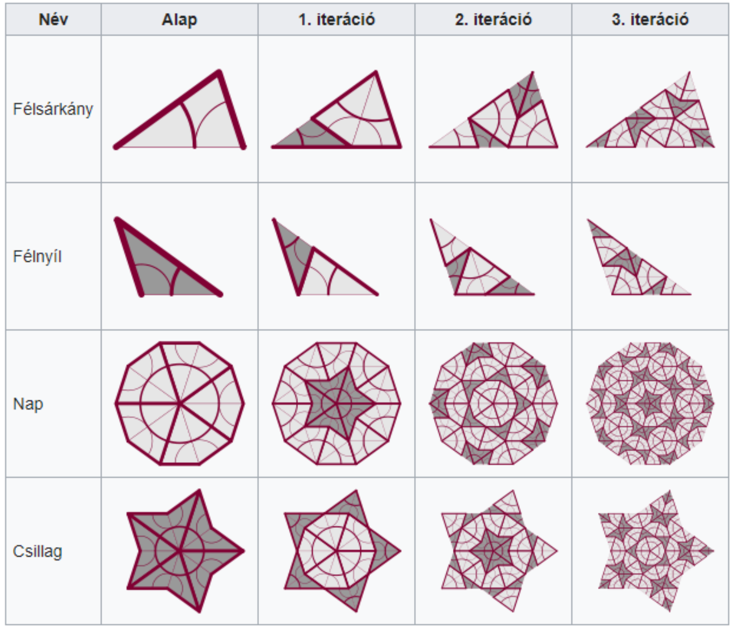
- Megoldás:
  - Paraméterek megkötése
  - Általánosított inverz (másnéven pszeudoinverz) használata (pl. Moore-Penrose)

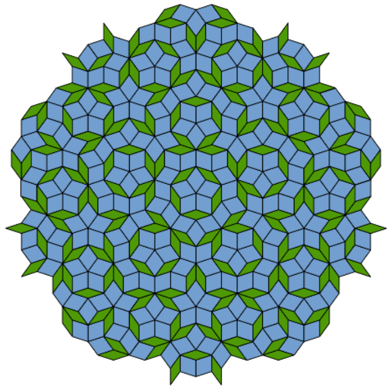
$$\underset{(r,1)}{\mathbf{x}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{+}} \underset{(r,1)}{\mathbf{n}}$$

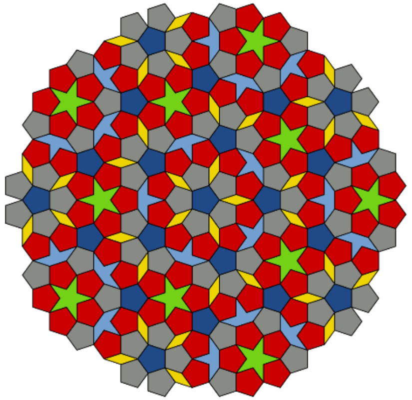
Még egy híres ember

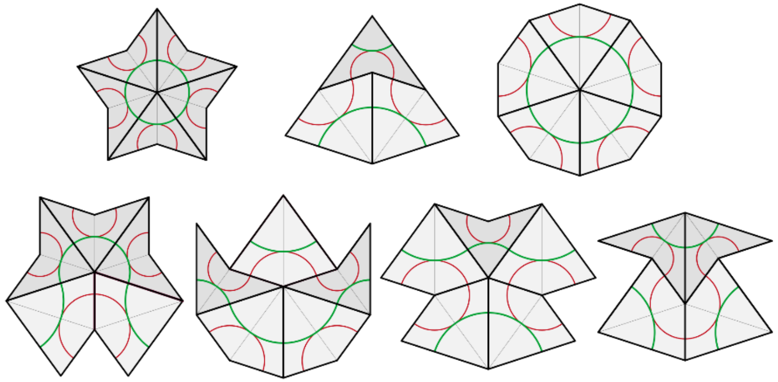


- Roger Penrose (1931-)
- Fizikai Nobel-díj (2020): fekete lyukak kialakulása
- Stephen Hawking kutatótársa
- **Pszeudoinverz**
- ~-csempézés (doktori algebrai geom-ból)









Köszönöm a figyelmet és áldott szép Húsvétot kívánok!

(ChatGPT)