Kiegyenlítő számítások: Legkisebb négyzetek módszere III.

Barsi Árpád

Mai témáink

- Kiegyenlítés csak mért mennyiségeket tartalmazó feltételi egyenletekkel (röviden: Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel) (III. kiegyenlítési csoport)
- Kiegyenlítés közvetítő egyenletekkel és kényszerfeltételekkel (IV. kiegyenlítési csoport)

Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel (csak mért mennyiségeket tartalmazó v. tiszta felt. egy.)

- Adottak a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változó $L_1, L_2, \ldots, L_n$ megfigyelései
- Ezeknek a megfigyeléseknek a kiegyenlített értékei $U_1, U_2, \ldots, U_n$
- A hozzájuk tartozó javítások $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $U_i = L_i + v_i$
- Paraméterek?

- Ugyanez tehát vektorosan $\underset{(n,1)}{\boldsymbol{\xi}}$ $\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$

Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel

- A lineáris függvénykapcsolat

$$
\begin{aligned}
&b_{11} \cdot M(\xi_1) + b_{12} \cdot M(\xi_2) + \ldots + b_{1n} \cdot M(\xi_n) - d_1 = 0 \\
&b_{21} \cdot M(\xi_1) + b_{22} \cdot M(\xi_2) + \ldots + b_{2n} \cdot M(\xi_n) - d_2 = 0 \\
&\vdots \\
&b_{f1} \cdot M(\xi_1) + b_{f2} \cdot M(\xi_2) + \ldots + b_{fn} \cdot M(\xi_n) - d_f = 0
\end{aligned}
$$

$$f = n - s > 0$$

- azaz

$$\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,1)}{M(\boldsymbol{\xi})} - \underset{(f,1)}{\mathbf{d}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}}$$

$$\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{f1} & b_{f2} & \cdots & b_{fn} \end{bmatrix}$$

Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel

- A lineáris függvénykapcsolat

$$\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,1)}{M(\xi)} - \underset{(f,1)}{\mathbf{d}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}}$$

- felírható másképp is

$$\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{U}} - \underset{(f,1)}{\mathbf{d}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}}$$

- Ez behelyettesítéssel

$$\mathbf{B} \cdot \mathbf{U} - \mathbf{d} = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{L} + \mathbf{v}) - \mathbf{d} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{L} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{d} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} - (\mathbf{d} - \mathbf{B} \cdot \mathbf{L}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{v} - \mathbf{l}$$

Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel

- A feltételi egyenlet tehát

$$\boxed{\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} - \underset{(f,1)}{\mathbf{l}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}}}$$

- A függvénykapcsolat felírható így is

$$g_j(U_1, U_2, \ldots, U_n) - d_j = 0 \qquad g_j(L_1 + v_1, L_2 + v_2, \ldots, L_n + v_n) - d_j = 0$$

- Ez sorbafejtve

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial U_1}\right)_0 \cdot v_1 + \left(\frac{\partial g_j}{\partial U_2}\right)_0 \cdot v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial g_j}{\partial U_n}\right)_0 \cdot v_n + g_{j0} - d_j = 0$$

Kiegyenlítés feltételi egyenletekkel

$$\left(\frac{\partial g_j}{\partial U_1}\right)_0 \cdot v_1 + \left(\frac{\partial g_j}{\partial U_2}\right)_0 \cdot v_2 + \ldots + \left(\frac{\partial g_j}{\partial U_n}\right)_0 \cdot v_n + g_{j0} - d_j = 0$$

- Ez pedig nem más, mint

$$b_{j1} \cdot v_1 + b_{j2} \cdot v_2 + \ldots + b_{jn} \cdot v_n + g_{j0} - d_j = 0$$

- A szokásos cél

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \min$$

- Itt ez lesz: $\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} - 2 \underset{(1,f)}{\mathbf{k}^T} \left(\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} - \underset{(f,1)}{\mathbf{l}} \right) = \min$ ahol

Lagrange-féle multiplikátorok
=
korreláták

$$\underset{(f,1)}{\mathbf{k}} = \begin{bmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_f \end{bmatrix}$$

A megoldás (részletezés nélkül)

- A normálegyenlet

$$\left(\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} \cdot \underset{(n,f)}{\mathbf{B}^T}\right) \cdot \underset{(f,1)}{\mathbf{k}} - \underset{(f,1)}{\mathbf{l}} = \underset{(f,1)}{\mathbf{0}}$$

- A megoldása pedig

$$\boxed{\underset{(f,1)}{\mathbf{k}} = \left(\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} \cdot \underset{(n,f)}{\mathbf{B}^T}\right)^{-1} \cdot \underset{(f,1)}{\mathbf{l}}}$$

- Majd ebből a korreláta-egyenlet

$$\boxed{\underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} \cdot \underset{(n,f)}{\mathbf{B}^T} \cdot \underset{(f,1)}{\mathbf{k}}}$$

A kiegyenlített mennyiségek

- Ahogy felírtuk

$$\underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

- Ebbe már behelyettesítve a javításokkal kész!
- Egy gyors ellenőrzés

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,1)}{\mathbf{v}} = \underset{(1,f)}{\mathbf{l}^T} \underset{(f,1)}{\mathbf{k}}$$

- Tényleg készen vagyunk?

A pontossági mérőszámok

- Ismét részletezés nélkül

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} - \left(\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}} \underset{(n,f)}{\mathbf{B}^T} \right) \left(\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} \underset{(n,f)}{\mathbf{B}^T} \right)^{-1} \left(\underset{(f,n)}{\mathbf{B}} \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}} \right)$$

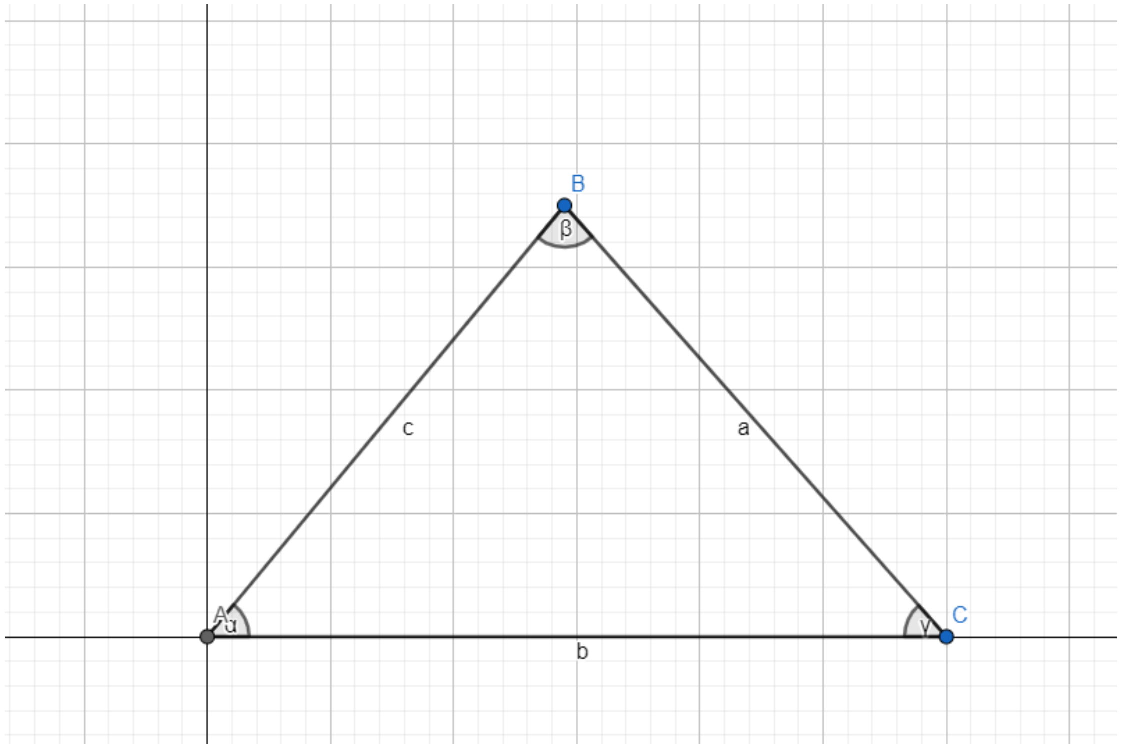
$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{vv}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}}$$

- Q_{xx}?

Nézzünk egy példát!

- Mért:
  - a, b, c oldalhossz
  - α, β, γ szögek

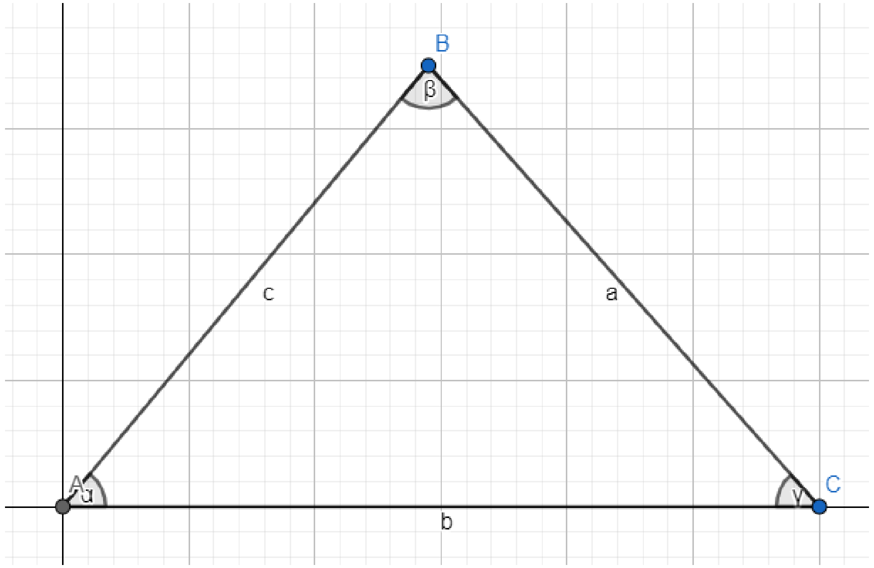
$$f = n - s = 6 - 3 = 3 > 0$$



A felírható feltételi egyenletek

- Szögösszeg

$$U_\alpha + U_\beta + U_\gamma = 180° \qquad g_1 : U_\alpha + U_\beta + U_\gamma - 180° = 0$$



- Szinusz-tételek

$$\frac{U_a}{U_b} = \frac{\sin U_\alpha}{\sin U_\beta} \qquad g_2 : U_a \cdot \sin U_\beta - U_b \cdot \sin U_\alpha = 0$$

$$\frac{U_a}{U_c} = \frac{\sin U_\alpha}{\sin U_\gamma} \qquad g_3 : U_a \cdot \sin U_\gamma - U_c \cdot \sin U_\alpha = 0$$

A felírható mátrixok

$$f = 3$$

$$n = 6$$

$$\underset{(3,6)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial U_\alpha} & \frac{\partial g_1}{\partial U_\beta} & \frac{\partial g_1}{\partial U_\gamma} & \frac{\partial g_1}{\partial U_a} & \frac{\partial g_1}{\partial U_b} & \frac{\partial g_1}{\partial U_c} \\ \frac{\partial g_2}{\partial U_\alpha} & \frac{\partial g_2}{\partial U_\beta} & \frac{\partial g_2}{\partial U_\gamma} & \frac{\partial g_2}{\partial U_a} & \frac{\partial g_2}{\partial U_b} & \frac{\partial g_2}{\partial U_c} \\ \frac{\partial g_3}{\partial U_\alpha} & \frac{\partial g_3}{\partial U_\beta} & \frac{\partial g_3}{\partial U_\gamma} & \frac{\partial g_3}{\partial U_a} & \frac{\partial g_3}{\partial U_b} & \frac{\partial g_3}{\partial U_c} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(3,1)}{\mathbf{l}} = \begin{bmatrix} d_1 - g_{10} \\ d_2 - g_{20} \\ d_3 - g_{30} \end{bmatrix}$$

B mátrix elemei

$$\frac{\partial g_1}{\partial U_\alpha} = \frac{\partial g_1}{\partial U_\beta} = \frac{\partial g_1}{\partial U_\gamma} = 1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial U_a} = \frac{\partial g_1}{\partial U_b} = \frac{\partial g_1}{\partial U_c} = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_\alpha} = -L_b \cos L_\alpha$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_\beta} = L_a \cos L_\beta$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_\gamma} = 0$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_a} = \sin L_\beta$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_b} = -\sin L_\alpha$$

$$\frac{\partial g_2}{\partial U_c} = 0$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_\alpha} = -L_c \cos L_\alpha$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_\beta} = 0$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_\gamma} = L_a \cos L_\gamma$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_a} = \sin L_\gamma$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_b} = 0$$

$$\frac{\partial g_3}{\partial U_c} = -\sin L_\alpha$$

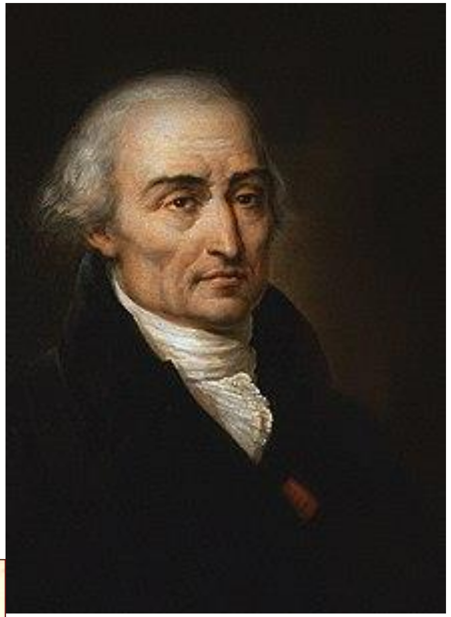
l vektor elemei

$$\mathbf{l} = \begin{bmatrix} 180° - g_{10} \\ -g_{20} \\ -g_{30} \end{bmatrix}$$

$$g_{10} = L_\alpha + L_\beta + L_\gamma$$
$$g_{20} = L_a \cdot \sin L_\beta - L_b \cdot \sin L_\alpha$$
$$g_{30} = L_a \cdot \sin L_\gamma - L_c \cdot \sin L_\alpha$$

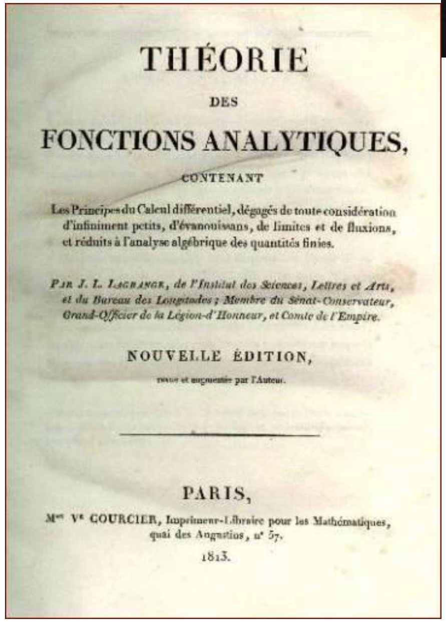
Példa!

A mai történelmi portré



- Giuseppe Luigi Lagrangia (1736-1813)
- Ismertebb nevén Joseph Louis Lagrange

- Számelmélet, valószínűségelmélet
- Klasszikus és égi mechanika, csillagászat
- Analízis, diff. egyenletek megoldása
  - Optimum-számítás, feltételes szélsőértékek ($\rightarrow$ multiplikátorok $\rightarrow$ korreláták)



THÉORIE
DES
FONCTIONS ANALYTIQUES,
CONTENANT
Les Principes du Calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissans, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

Par J. L. Lagrange, de l'Institut des Sciences, Lettres et Arts, et du Bureau des Longitudes; Membre du Sénat-Conservateur, Grand-Officier de la Légion-d'Honneur, et Comte de l'Empire.

NOUVELLE ÉDITION,
revue et augmentée par l'Auteur.

PARIS,
Mme Ve COURCIER, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, quai des Augustins, n° 57.
1813.

„e műben senki nem fog lelni egyetlen számot sem”

Kiegyenlítés közvetítő és kényszerfeltételi egyenletekkel

- Adottak a $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ valószínűségi változó $L_1, L_2, \ldots, L_n$ megfigyelései
- Ezeknek a megfigyeléseknek a kiegyenlített értékei $U_1, U_2, \ldots, U_n$
- A hozzájuk tartozó javítások $v_1, v_2, \ldots, v_n$ $\quad U_i = L_i + v_i$
- A $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_r$ paraméterek előzetes értékei és változásaik $X_j = X_{0j} + x_j$

- Ugyanezek vektorosan

$$\underset{(n,1)}{\boldsymbol{\xi}} \qquad \underset{(n,1)}{\mathbf{U}} = \underset{(n,1)}{\mathbf{L}} + \underset{(n,1)}{\mathbf{v}}$$

$$\underset{(r,1)}{\boldsymbol{\eta}} \qquad \underset{(r,1)}{\mathbf{X}} = \underset{(r,1)}{\mathbf{X_0}} + \underset{(r,1)}{\mathbf{x}}$$

A kényszerfeltételi egyenletek

- Lineáris függvénykapcsolatot feltételezve

A kényszerfeltételi egyenletek száma p

$$e_1 = c_{11} \cdot X_1 + c_{12} \cdot X_2 + \ldots + c_{1r} \cdot X_r$$

$$e_2 = c_{21} \cdot X_1 + c_{22} \cdot X_2 + \ldots + c_{2r} \cdot X_r$$

$$\vdots$$

$$e_p = c_{p1} \cdot X_1 + c_{p2} \cdot X_2 + \ldots + c_{pr} \cdot X_r$$

- általánosan

$$e_i = h_i\left(X_1, X_2, \ldots, X_r\right) = h_i\left(X_{10} + x_1, X_{20} + x_2, \ldots, X_{r0} + x_r\right) =$$

$$= h_i\left(X_{10}, X_{20}, \ldots, X_{r0}\right) + \left(\frac{\partial h_i}{\partial X_1}\right)_0 \cdot x_1 + \left(\frac{\partial h_i}{\partial X_2}\right)_0 \cdot x_2 + \ldots + \left(\frac{\partial h_i}{\partial X_r}\right)_0 \cdot x_r + R$$

A kényszerfeltételi egyenletek

- felírhatjuk

$$-w_i = h_i(X_{10}, X_{20}, \dots, X_{r0}) - e_i$$

$$-w_i = c_{i1} \cdot X_{10} + c_{i2} \cdot X_{20} + \dots + c_{ir} \cdot X_{r0} - e_i$$

$$c_{i1} \cdot x_1 + c_{i2} \cdot x_2 + \dots + c_{ir} \cdot x_r - w_i = 0$$

$$\boxed{\underset{(p,r)}{\mathbf{C}} \cdot \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} - \underset{(p,1)}{\mathbf{w}} = \underset{(p,1)}{\mathbf{0}}}$$

$$c_{ij} = \left(\frac{\partial h_i}{\partial X_j} \right)_0$$

A megoldáshoz

- Kétféleképp
  - A változások számának csökkentésével
  - Feltételes szélsőérték-feladat megoldásával

- A szokásos cél itt

$$\underset{(1,n)}{\mathbf{v}^T}\underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}}\underset{(n,1)}{\mathbf{v}}-2\underset{(1,p)}{\mathbf{k}^T}\left(\underset{(p,r)}{\mathbf{C}}\cdot\underset{(r,1)}{\mathbf{x}}-\underset{(p,1)}{\mathbf{w}}\right)=\min$$

A megoldás

- Részletes levezetés nélkül ☺
- A normálegyenlet (hipermátrixos jelölés!)

$$\begin{bmatrix} \underset{(r,r)}{\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{A}} & \underset{(r,p)}{-\mathbf{C}^T} \\ \underset{(p,r)}{-\mathbf{C}} & \underset{(p,p)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \\ \underset{(p,1)}{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(r,1)}{\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{l}} \\ \underset{(p,1)}{-\mathbf{w}} \end{bmatrix}$$

- A megoldás

$$\boxed{\begin{bmatrix} \underset{(r,1)}{\mathbf{x}} \\ \underset{(p,1)}{\mathbf{k}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(r,r)}{\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{A}} & \underset{(r,p)}{-\mathbf{C}^T} \\ \underset{(p,r)}{-\mathbf{C}} & \underset{(p,p)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underset{(r,1)}{\mathbf{A}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{l}} \\ \underset{(p,1)}{-\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underset{(r,r)}{\mathbf{N}} & \underset{(r,p)}{-\mathbf{C}^T} \\ \underset{(p,r)}{-\mathbf{C}} & \underset{(p,p)}{\mathbf{0}} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \underset{(r,1)}{\mathbf{n}} \\ \underset{(p,1)}{-\mathbf{w}} \end{bmatrix}}$$

$$m_0^2 = f^{-1}\mathbf{v}^T\mathbf{P}_{LL}\mathbf{v}$$

$$f = n + p - r > 0$$

A pontossági mérőszámok

- Szintén levezetés nélkül ☺

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{P}_{LL}^{-1}}$$

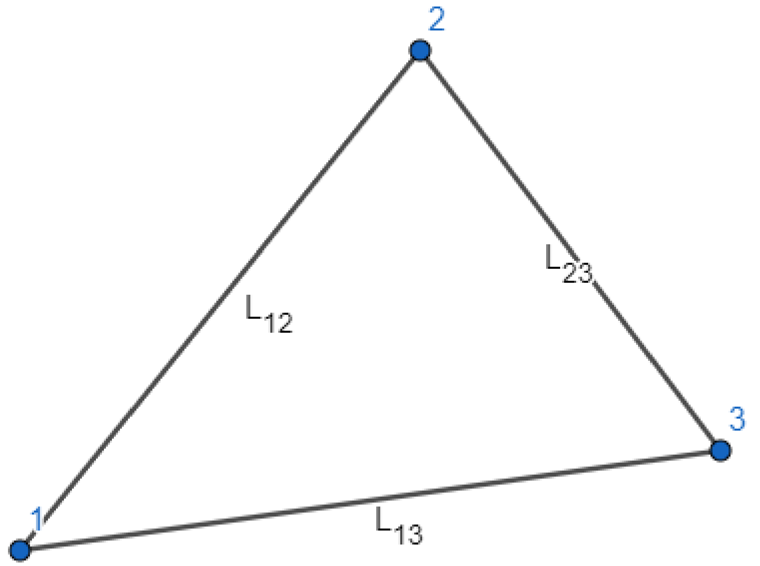
$$\underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}} = \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}} - \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}} \underset{(r,p)}{\mathbf{C}^{T}} \left(\underset{(p,r)}{\mathbf{C}} \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}} \underset{(r,p)}{\mathbf{C}^{T}} \right)^{-1} \underset{(p,r)}{\mathbf{C}} \underset{(r,r)}{\mathbf{N}^{-1}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}} = \underset{(n,r)}{\mathbf{A}} \underset{(r,r)}{\mathbf{Q}_{XX}} \underset{(r,n)}{\mathbf{A}^{T}}$$

$$\underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{vv}} = \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{LL}} - \underset{(n,n)}{\mathbf{Q}_{UU}}$$

Nézzünk egy példát erre is!

- Szinteztünk.
- Mért:
  - L_{12}, L_{23}, L_{13} magasságkülönbség
- Kötött:
  - H_1
- Keresett magasságok: (előzetes magasságok)
  - H_2, H_3
- Kényszer: ΔH_{23} = konst.



$$f = n + p - s = 3 + 1 - 2 > 0$$

Az egyenletek felírása

- Közvetítő egyenletek felírása a szokásos módon
- A kényszer kezelése

$$H_3 - H_2 = \Delta H_{23}$$

- Ebből

$$-w = X_3 - X_2 - \Delta H_{23} = X_{30} + x_3 - X_{20} - x_2 - \Delta H_{23}$$

- Most már felírható

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w} = \left[-\left(X_{30} - X_{20} - \Delta H_{23} \right) \right]$$

Példa!

Köszönöm a figyelmet!