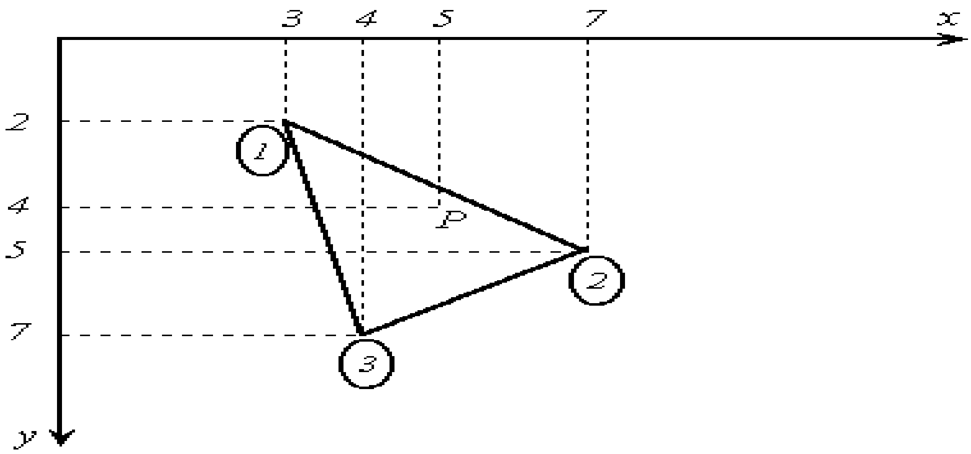
A VÉGESELEM - MÓDSZER ÉS ALKALMAZÁSAI

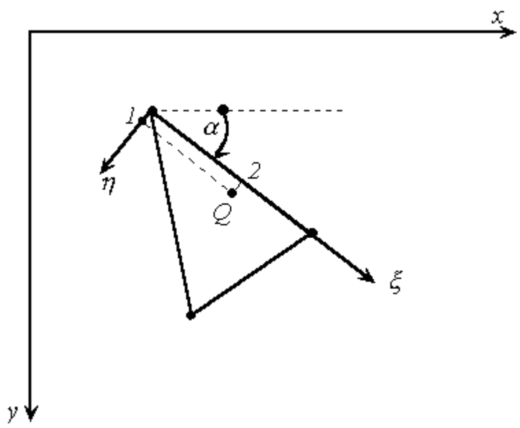
1. Koordináta-rendszerek

Az ábrán látható háromszögelemhez tartozó különböző lokális koordináta-rendszerek vizsgálata.

A vizsgált háromszög ugyanaz mindegyik lokális koordinátarendszernél:



a./ A lokális koordináta-rendszert a globális eltolásából és elforgatásából kaptuk:



Az összefüggés a lokális- és a globális koordináta-rendszerek között:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \mathbf{T}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \xi \\ \eta \end{bmatrix}.$$

A Q pont globális koordinátái:

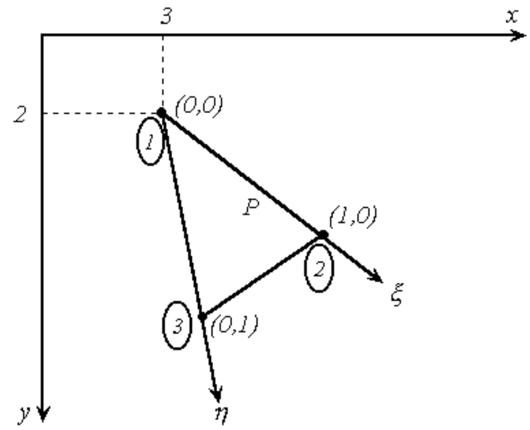
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_Q = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.8 & -0.6 \\ 0.6 & 0.8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

A P pont lokális koordinátái:

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}_P = \mathbf{T}^{\mathbf{T}}\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.8 & 0.6\\ -0.6 & 0.8\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}2.8\\ 0.4\end{bmatrix}.$$

b./ Paraméteres lokális-koordinátarendszer

A koordinátarendszerek és a bázisfüggvények:



$$N_1(\xi,\eta)=1-\xi-\eta$$
$$N_2(\xi,\eta)=\xi$$
$$N_3(\xi,\eta)=\eta$$

A kapcsolat: $x=\sum_{i=1}^{3} N_i\, x_i$, $y=\sum_{i=1}^{3} N_i\, y_i$. Mátrixegyenlettel:

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0\\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\\ x_2\\ y_2\\ x_3\\ y_3\end{bmatrix}$$

. Szokásos alak még (csak lineáris esetben):

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{\mathbf{T}}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}, \text{ ahol } \mathbf{J}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 5\end{bmatrix}. \text{ Így:}$$

$$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta & 0\\ 0 & 1-\xi-\eta & 0 & \xi & 0 & \eta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 7\\ 5\\ 4\\ 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3+4\xi+\eta\\ 2+3\xi+5\eta\end{bmatrix}.$$

Például az R pontnál $(\xi,\eta)_R=[0.2,0.3]\rightarrow(x,y)_R=[4.1,4.1]$.

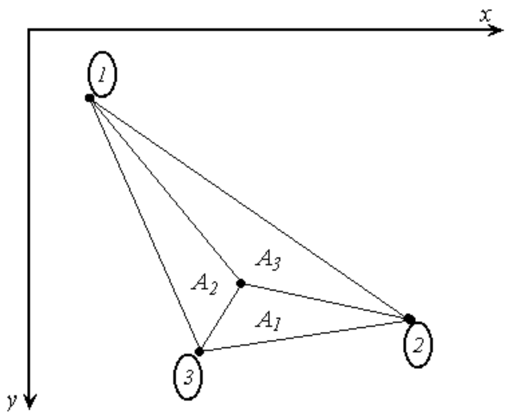
Az inverz kapcsolat alakja:

$$\begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}=\mathbf{J}^{-\mathbf{T}}\left(\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}x_1\\ y_1\end{bmatrix}\right). \text{ Így például: } \begin{bmatrix}\xi\\ \eta\end{bmatrix}_P=\frac{1}{17}\begin{bmatrix}5 & -1\\ -3 & 4\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}5\\ 4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}0.4706\\ 0.1176\end{bmatrix}.$$

c./ Természetes koordináták alkalmazása

Csak szimplexek esetében lehetséges. Ez 1D-nél 2 pont által meghatározott egyenes.
2D-nél 3 pont által meghatározott háromszög, 3D-nél 4pont által definiált tetraéder.

pl. háromszög esetén



$$L_i = \frac{A_i}{A}$$

A kapcsolati egyenlet: $\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix}.$

Ha például: $(L_{1,} L_2, L_3) = [0.1 , 0.3 , 0.6] \rightarrow (x, y) = [4.8 , 5.9]$.

Az inverz kapcsolat:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 4 \\ 2 & 5 & 7 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}_P = \frac{1}{17} \begin{bmatrix} 29 & -2 & -3 \\ -13 & 5 & -1 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4118 \\ 0.4706 \\ 0.1176 \end{bmatrix}.$$

vonalelemnél $L_i = \frac{\ell_i}{\ell}$ térfogat elemnél $L_i = \frac{V_i}{V}$

A kapcsolati egyenlet általában:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{bmatrix}$$

mindig igaz: $\sum L_i = 1$

Végeselem-módszer. Általános összefüggések.

2. Általános összefüggések

A kontinuumfeladatok matematikai felírásánál a potenciális energia stacionaritási feltételét használjuk fel. E szerint az elmozdulások függvényében felírt potenciális energiának stacionaritási pontja van a létrejövő elmozdulásokhoz tartozó pontban.

Először levezetjük a potenciális energia függvényét az elsőrendű elmélet használatával. A kontinuum feladatban négy függvény kapcsolatát - keressük: az $u(x, z, y)$ elmozdulás-, az $\varepsilon(x, z, y)$ alakváltozás-, a
$\sigma(x, z, y)$ feszültség- és a $p(x, z, y)$ teherfüggvényét. Az első kettő között az

$$\varepsilon = Lu$$

geometriai egyenlet tart kapcsolatot, ahol L egy differenciáloperátor. A Hooke-törvényt leíró fizikai egyenlet általános alakja

$$\sigma = D\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)$$

ahol D az anyagállandóktól függő kvadratikus mátrix, ε_0 pedig a nem a feszültségek (pl. hőmérséklet) hatására létrejövő alakváltozások vektora. Az egyensúlyi egyenlet az L operátor transzponáltját tartalmazza:

$$L^T \sigma + p = 0$$

A Π potenciális energia két részből áll: az alakváltozási energiából és a teher potenciáljának változásából. A fajlagos elemi alakváltozási energia a σ és a $d\varepsilon$ növekményvektor skaláris szorzata. Ezt integrálva (most egy háromszög területét számítva) a teljes alakváltozáson megkapjuk a fajlagos alakváltozási energiát. Ezt a teljes köbtartalmon V szerint integrálva adódik az alakváltozási energia. Az elmozdulás és a teher skaláris szorzata adja a teher potenciálváltozását. Ha az eltolódás az erő irányában történik, akkor a teher potenciálja csökken. Megoszló teher esetén integrálni is kell. Így

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \left(\varepsilon - \varepsilon_0\right)^T D\left(\varepsilon - \varepsilon_0\right) dV - \int_V u^T p dV$$

A zárójeleket felbontva az első tag négy tagra esik szét. Ebből egy állandó, mely a stacionaritást nem befolyásolja, ezért elhagyható; másik kettő összevonható, így

$$\Pi = \frac{1}{2}\int_V \varepsilon^T D\varepsilon dV - \int_V \varepsilon^T D\varepsilon_0 dV - \int_V u^T p dV$$

Ebbe a geometriai egyenletet behelyettesítve a potenciális energia az elmozdulásfüggvények függvénye lesz:

$$\Pi(u)=\frac{1}{2}\int_V (Lu)^T D(Lu)dV-\int_V (Lu)^T D\varepsilon_0 dV-\int_V u^T p dV$$

A Ritz-módszer szerint a végtelen dimenziójú függvény tér helyett közelítésképpen csak egy véges dimenziójú altérben keressük a megoldás közelítését, vagyis ismert függvények (bázisfüggvények) ismeretlen együtthatókkal képzett lineáris kombinációjaként vesszük fel a megoldás-függvényt. A végeselem-módszer a Ritz-módszer egy speciális esete, melyben a bázisfüggvények a vizsgált tartomány nagy részén zérusértékűek, és az együtthatóknak általában jól meghatározható fizikai tartalma van:

$$u(x,y,z)=\sum_{i=1}^{n} v_i N_i(x,y,z)$$

A bázisfüggvényeknek folytonosaknak kell lenniük, sőt ha az L operátorban második deriválás is előfordul, akkor még a bázisfüggvények első deriváltjainak is folytonosnak kell lenniük.

3. Végeselem-módszer alapjai

A vizsgált V tartományt elemekre osztjuk, és azon kitüntetett pontokat veszünk fel. Egy elem kitüntetett pontjainak elmozdulásait a v_e vektorba gyűjtjük, és ezekből interpoláljuk a bázisfüggvények felhasználásával a közbenső pontok elmozdulásait:

$$u(x,y,z)=N(x,y,z)v_e$$

Ezt a geometriai egyenletbe helyettesítve

$$\varepsilon = Lu = LNv_e = B(x,y,z)v_e$$

Ezt behelyettesítve a potenciális energia függvényébe, az integrálást csak egy elemre elvégezve (erre utal az e index), és az integrálból kihozva a konstans vektorokat:

$$\Pi_e(v_e)=\frac{1}{2}v_e^T\int_{V_e} B^T DBdVv_e - v_e^T\int_{V_e} B^T D\varepsilon_0 dV - v_e^T\int_{V_e} N^T pdV$$

Bevezetve a

$$K_e=\int_{V_e} B^T DBdV$$

és

$$q_e=\int_{V_e} B^T D\varepsilon_0 dV+\int_{V_e} N^T pdV$$

jelöléseket

$$\Pi_e(v_e)=\frac{1}{2}v_e^T K_e v_e - v_e^T q_e$$

Az összes elem potenciális energiáját összeadjuk, közben az elemekhez tartozó vektorokból és mátrixokból összeállítjuk a teljes szerkezet:
v elmozdulásvektorát,
<u>*K*</u> merevségi mátrixát
és
***q* redukált tehervektorát,**
a teljes szerkezet potenciális energiája a következő lesz:

$$\Pi(v) = \frac{1}{2} v^T K v - v^T q$$

Ez ott stacionárius, ahol a :v vektor szerinti derivált ja zérus, vagyis

$$\frac{d\Pi}{dv} = Kv - q = 0$$

Így egy lineáris egyenletrendszer megoldásával számíthatjuk a kitüntetett pontok elmozdulásait, majd azokból elemenként tetszőleges pont elmozdulása, alakváltozása vagy feszültsége is meghatározható.

4. Alkalmazás: Tárcsák számítása

A tárcsafeladatokban a 4 függvény vektor értelmezése a következő:

Az alapvető változók:

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{Lu} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \\ & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \ \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}.$$

Síkbeli alakváltozási állapotban

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \\ \nu & 1-\nu & \\ & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

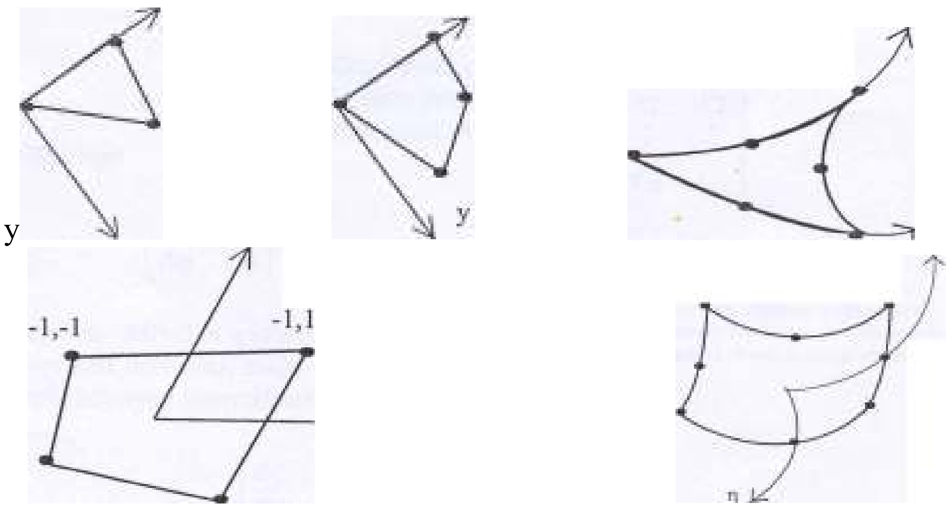
Síkbeli feszültség állapotban

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

Eddig a tárcsa alapösszefüggéseit közöltük, most mutatjuk meg a **<u>végeselem-módszer lépéseit</u>**:

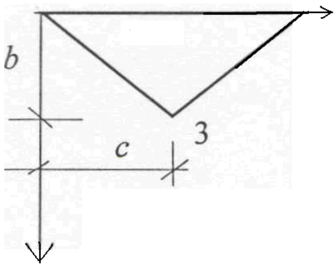
1.) **A vizsgált tartományt véges elemekre osztjuk.** Az elemek lehetnek háromszög vagy négyszög alakúak. Az elemek sarokpontjait kitüntetetteknek tekintjük, sőt esetleg az oldalakon, az elem közepén is vehetünk fel további kitüntetett pontokat. (Ha nem csak a sarkokban vannak kitüntetett pontok - más néven csomópontok - , akkor az oldalak esetleg görbék is lehetnek.)

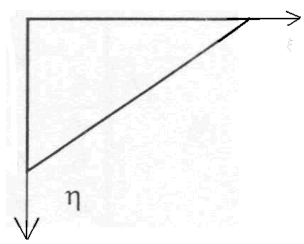
2.) **Felvesszük a koordinátarendszereket.** Az egész szerkezetre érvényes egy globális koordinátarendszer, és felveszünk minden elemhez egy-egy lokális rendszert is. A lokális rendszernek két típusát különböztetjük meg. Az xy rendszert úgy kapjuk, hogy a globális rendszert merevtestszerűen elmozdítjuk úgy, hogy az a lehető legjobban illeszkedjék az elemhez, és így esetleg elérhető, hogy több elem azonos lesz a saját rendszerében. A $\xi\eta$ (ún. paraméteres) koordinátarendszernél sokkal jobb illeszkedést érhetünk el, mert a koordinátarendszer lehet ferdeszögű, sőt görbe vonalú is, valamint a léptékeket úgy választjuk, hogy a csomópontok koordinátái speciális értékek legyenek (lásd 1. ábra).



1. ábra

3.) **Felvesszük a bázis függvényeknek** az elemen értelmezett részeit. A tárcsánál csak a folytonosságot kell biztosítanunk, ezért itt a Lagrange-féle alap-polinomokat használjuk. Ezeknél egy csomópontban egységnyi a függvény értéke, a többi kitüntetett pontban pedig zérus.





2.a. ábra 2.b. ábra

A 2.a ábrán bemutatott háromszögelemhez derékszögű koordinátarendszert választottunk. Ezek bázisfüggvényei:

$$N_1(x,y) = 1 - \frac{x}{a} - \frac{a-c}{ab}y;\; N_2(x,y) = \frac{x}{a} - \frac{c}{ab}y;\; N_3(x,y) = \frac{y}{b}$$

A 2b. ábrán bemutatott háromszögelemhez paraméteres koordinátarendszert választottunk. Ennek bázisfüggvényei:

$N_1(\xi,\eta) = 1 - \xi - \eta$; $N_2(\xi,\eta) = \xi$; $N_3(\xi,\eta) = \eta$

4.) **Jacobi-mátrix előállítása** (ha szükséges).

(pl. 3csp.-os háromszög elemnél)

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{bmatrix}.$$

Az inverz:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}.$$

(megjegyezve $\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ és $\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$)

5.) Az **elmozdulásvektor** két **eltolódásfüggvényét** a **csomópontok eltolódásaiból a bázisfüggvények felhasználásával. interpoláljuk**:

$u(x,y,z) = N(x,y,z)v_e$

6.) Az alakváltozási **B** mátrix előállítása az L operátor és az $\underline{N}$ interpolációs mátrix felhasználásával:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{LN}$$

Ha a bázisfüggvények valóban *x* és *y* polinomjai, akkor a deriválás könnyen elvégezhető, de ha a paraméteres koordináták függvényei, akkor a láncszabályt kell alkalmazni.

($\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x}$ és $\frac{\partial N_i}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial N_i}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial y}$)

7.) A **B** és a **D** mátrix ismeretében az elem merevségi mátrixa a korábbiak szerint a

$$\mathbf{K_e} = \int_{A_e} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,\mathrm{d}A$$

képlettel számítható. (A tárcsa vastagságát állandónak tételeztük fel, így felesleges minden tagot a vastagsággal is szorozni.) Ha a bázisfüggvények a koordináták lineáris függvényei, akkor az integrálandó mátrixok konstansok.

$$\mathbf{K_e} = \mathbf{B^T D B} A$$

Ha azonban a lokális koordináták függvénye, akkor pl. háromszög esetén a

$$\mathbf{K_e} = \int_{A_e}\int_0^1\int_0^{1-\eta} \mathbf{B^T D B} |J| d\xi d\eta$$

képlettel számítandó. Az integrálást gyakran numerikusan végzik el. Ha a paraméteres koordinátarendszert használtuk, akkor az elem merevségi mátrixa a globális rendszerben van értelmezve, hiszen a deriválásnál és az integrálásnál is a két koordinátarendszer pontos kapcsolatát leíró összefüggéseket használtuk. Ha azonban a lokális rendszert a globális merevtestszerű elmozdításával kaptuk, akkor a merevségi mátrix a lokális rendszerben adódik, és azt (a rúdszerkezeteknél tanult módon) blokkonként a globális rendszerbe kell transzformálni.

8.) Az **elemek merevségi mátrixaiból összeállítjuk a szerkezet merevségi mátrixát**. A módszer megegyezik a rúdszerkezeteknél tanult módszerrel, csak ott az elem merevségi mátrixát 2x2 blokkra (*szabadságfok* x *szabadságfok*) bontottuk, itt *csxcs (csomópontszám x csomópontszám*) blokk van. A megtámasztásokat itt is nagymerevségű rugókkal helyettesítjük, a rugóállandók <u>*a merevségi mátrix főátlójának megfelelő eleméhez adódnak*</u>.

9.) Az **elemek terhét a csomópontokra redukáljuk**. Ha a merevtestszerűen elmozdított lokális koordinátarendszert alkalmaztuk, akkor a redukált teher vektorát is ebben kaptuk meg, ezért azt blokkonként a globális rendszerbe kell transzformálni.

$$q_e = \int_{V_e} B^T D\varepsilon_0 dV + \int_{V_e} N^T p dV$$

10.) A szerkezet $\boldsymbol{q_r}$ **redukált tehervektorának előállítása** (számítási módja megegyezik a rúdszerkezeteknél tanult módszerrel), a csomópontokon ható és az oda redukált terheket a vektor megfelelő blokkjához adjuk.

ll.) Az egész szerkezetre vonatkozó $Kv=q_r$ **lineáris egyenletrendszert kell megoldani**, mellyel megkapjuk a csomópontok eltolódásait.

12.) **A további ismeretlenek (ε, σ) kiszámítását elemenként lehet végezni**. A $\boldsymbol{v}$ vektorból kivesszük az elem csomópontjainak eltolódásait $(\mathbf{v_e})$. (Ha az elem lokális koordinátarendszerét a merevtestszerű elmozdítással kaptuk, akkor e vektor blokkjait először a lokális rendszerbe transzformáljuk.) Az elem egy tetszőleges *P* pontjának eltolódását, alakváltozását, feszültségeit úgy kapjuk, hogy rendre behelyettesítünk a következő képletekbe:

$$u(x,y,z) = N(x,y,z)v_e$$

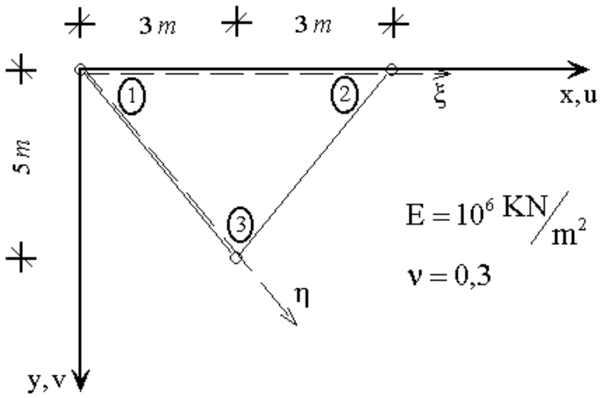
$$\varepsilon = Lu = LNv_e = B(x,y,z)v_e$$

$$\sigma = D(\varepsilon - \varepsilon_0) = D(Bv_e - \varepsilon_0)$$

Ha a bázisfüggvények lineárisak voltak, akkor az elemen konstans az alakváltozási és a feszültségvektor is.

Mintapéldák: Az elem merevségi mátrixa és tehervektora

1.Példa: Határozzuk meg egy sík alakváltozási állapotú tárcsafeladat vizsgálatához szükséges háromszög alakú elem merevségi mátrixát!



Az alapvető változók:

$$\mathbf{u}=\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\varepsilon}=\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\\varepsilon_y\\\gamma_{xy}\end{bmatrix}=\mathbf{Lu}=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \\ & \frac{\partial}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\sigma}=\begin{bmatrix}\sigma_x\\\sigma_y\\\tau_{xy}\end{bmatrix}=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \\ \nu & 1-\nu & \\ & & \frac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix}.$$

Az anyagi merevségi mátrix együtthatója: $\dfrac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}=\dfrac{10^6}{1.3\cdot 0.4}=1.923\cdot 10^6$.

A bázisfüggvényekhez használjunk hárompontos elemet (korábbi gyakorlatokon már vizsgáltuk):

$$N_1=1-\xi-\eta,\ N_2=\xi,\ N_3=\eta.$$

Segítségükkel: $\mathbf{u}=\mathbf{N}\mathbf{v}_e=\begin{bmatrix}N_1 & & N_2 & & N_3 & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\v_1\\u_2\\v_2\\u_3\\v_3\end{bmatrix}$.

Az alakváltozási mátrix elemeinek előállításához szükségünk lesz a Jacobi-mátrixra, illetve annak inverzére:

$$\mathbf{J}=\begin{bmatrix}\frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi}\\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\partial N_1}{\partial\xi} & \frac{\partial N_2}{\partial\xi} & \frac{\partial N_3}{\partial\xi}\\ \frac{\partial N_1}{\partial\eta} & \frac{\partial N_2}{\partial\eta} & \frac{\partial N_3}{\partial\eta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1 & y_1\\x_2 & y_2\\x_3 & y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\6 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & 0\\3 & 5\end{bmatrix}.$$ Az inverz:

$$\mathbf{J}^{-1}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x}\\ \dfrac{\partial\xi}{\partial y} & \dfrac{\partial\eta}{\partial y}\end{bmatrix}=\frac{1}{30}\begin{bmatrix}5 & 0\\ -3 & 6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/6 & 0\\ -0.1 & 1/5\end{bmatrix}.$$ Mivel $\dfrac{\partial N_i}{\partial x}=\dfrac{\partial N_i}{\partial\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial x}+\dfrac{\partial N_i}{\partial\eta}\dfrac{\partial\eta}{\partial x}$, az alakváltozási mátrix egyes elemei:

$$\frac{\partial N_1}{\partial x}=-1\cdot\frac{1}{6}-1\cdot 0=-\frac{1}{6},\quad \frac{\partial N_2}{\partial x}=1\cdot\frac{1}{6}+0\cdot 0=\frac{1}{6},\quad \frac{\partial N_3}{\partial x}=0\cdot\frac{1}{6}+1\cdot 0=0,$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial y}=-1\cdot(0.1)-1\cdot\frac{1}{5}=-0.1\,,\quad \frac{\partial N_2}{\partial y}=1\cdot(-0.1)+0\cdot\frac{1}{5}=-0.1,\quad \frac{\partial N_3}{\partial y}=0\cdot(-0.1)+1\cdot\frac{1}{5}=0.2\,.$$

Az alakváltozási mátrix:

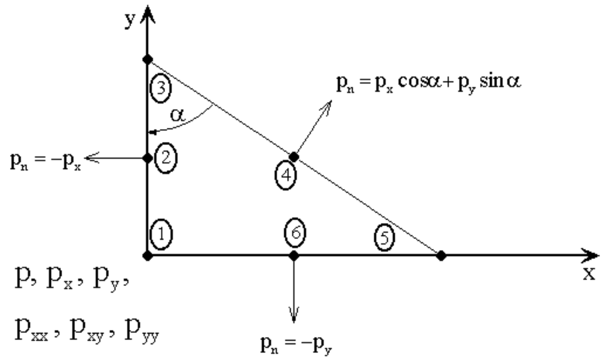
$$\mathbf{B}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial}{\partial x} & \\ & \dfrac{\partial}{y}\\ \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial x}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}N_1 & & N_2 & & N_3 & \\ & N_1 & & N_2 & & N_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1/6 & & 1/6 & & & \\ & -0.1 & & -0.1 & & 0.2\\ -0.1 & -1/6 & -0.1 & 1/6 & 0.2 & \end{bmatrix}.$$

A elem merevségi mátrixa:

$$\mathbf{K}_e=\int_{A_e}\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,dA=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}\,A_e=\mathbf{B}^{\mathbf{T}}1.923\cdot 10^6\begin{bmatrix}0.7 & 0.3 & \\ 0.3 & 0.7 & \\ & & 0.2\end{bmatrix}\mathbf{B}\cdot\frac{6\cdot 5}{2}.$$ Egy elemet gyakorlásképpen kiszámítunk:

$$K_{e,16}=1.923\cdot 10^6\cdot 15\begin{bmatrix}-1/6 & 0 & -0.1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.7 & 0.3 & \\ 0.3 & 0.7 & \\ & & 0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0.2\\ 0\end{bmatrix}=-0.288\cdot 10^6\,.$$

2.Példa: Vizsgáljuk meg a „klasszikus” lemezelem merevségi mátrixának előállításához szükséges lépések sorozatát.



A modell alapvető változói:

$$\mathbf{u} = [w], \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{Lu} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} \\ \dfrac{-\partial^2}{\partial x^2} \\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} [w],$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & \\ \nu & 1 & \\ & & \dfrac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon} = 888.9 \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & \\ 0.3 & 1 & \\ & & 0.35 \end{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}.$$

A bázisfüggvényeknél válasszuk a 21 szabadságfokú, ötödfokú polinommal jellemezhető elemet:

$$\mathbf{x}^\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & x^2y & xy^2 & y^3 & . & . & . & xy^4 & y^5 \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{x}^\mathbf{T}}{\partial y} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & . & . \end{bmatrix},$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{x}^\mathbf{T}}{\partial x^2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & . & . \end{bmatrix}, \text{stb.}$$

A $\widetilde{\mathbf{B}}$ mátrix elemei:

$$\widetilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & . & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & . & & & & & \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & . & & & & & \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4 & . & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & . & . & . & . & . & . \\ . & & & & & & . & & & & & . \\ . & & & & & & . & & & & & . \\ . & & & & & & . & & & & & . \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & . & . & N_{21} \end{bmatrix} = \mathbf{x}^\mathbf{T} \widetilde{\mathbf{B}}^{-1}.$$

Az alakváltozási mátrix: $\mathbf{B}=\mathbf{LN}=\mathbf{Lx}^{\mathbf{T}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}=\mathbf{B}_{\mathbf{0}}\widetilde{\mathbf{B}}^{-1}$. A $\mathbf{B}_{\mathbf{0}}$ mátrix elemei:

$$\mathbf{B}_{\mathbf{0}}=\mathbf{Lx}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\\ \dfrac{-\partial^2}{\partial x^2}\\ 2\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}\end{bmatrix}\mathbf{x}^{\mathbf{T}}=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0&2&0&0&.&.\\0&0&0&-2&0&0&-6x&-2y&.&.\\0&0&0&0&2&0&0&4x&.&.\end{bmatrix}.$$

Az elem merevségi mátrixa:

$$\mathbf{K}_e=\int_{A_e}\tilde{\mathbf{B}}^{-1\mathbf{T}}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1}dA=\tilde{\mathbf{B}}^{-1\mathbf{T}}\int_{A_e}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}\ dA\ \tilde{\mathbf{B}}^{-1}=\tilde{\mathbf{B}}^{-1\mathbf{T}}\mathbf{K}_{\mathbf{0}}\tilde{\mathbf{B}}^{-1},$$

ahol

$$\mathbf{K}_{\mathbf{0}}=\int_0^2\int_0^{5-2.5y}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}^{\mathbf{T}}\mathbf{D}\mathbf{B}_{\mathbf{0}}dx\ dy\ .$$